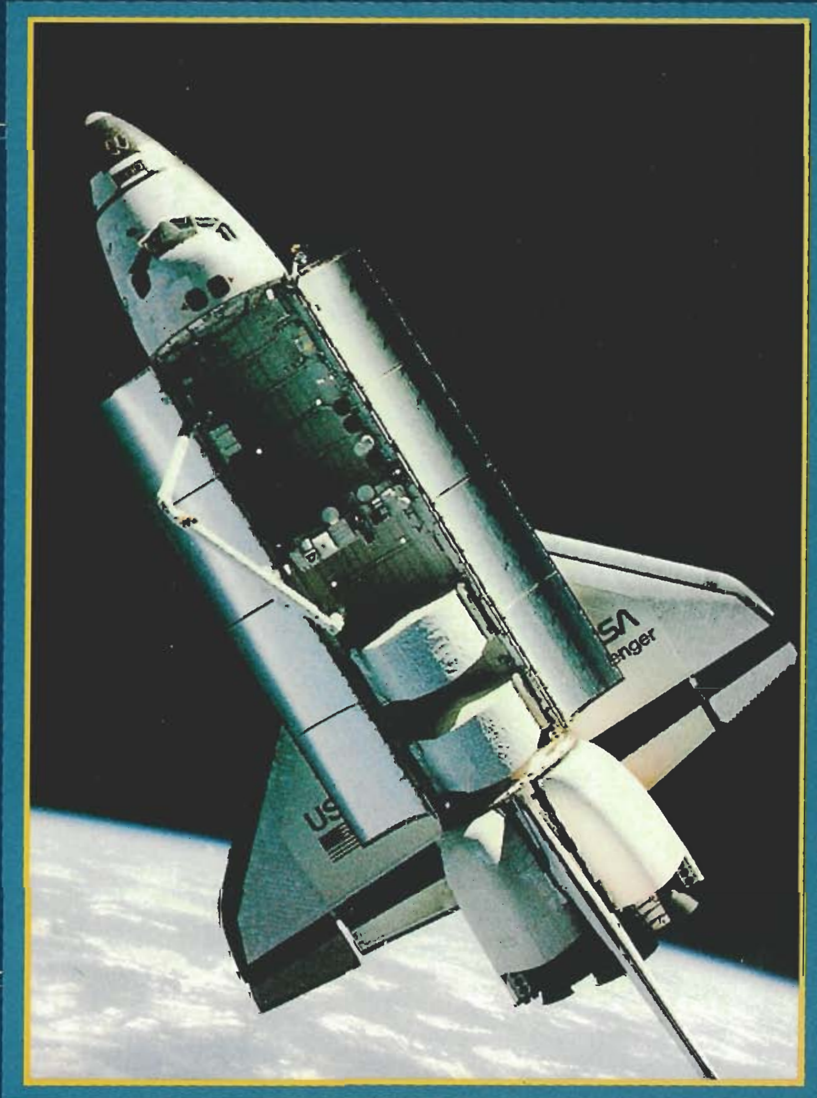
SISTEMAS DE CONTROL AUTOMÁTICO

SÉPTIMA EDICIÓN





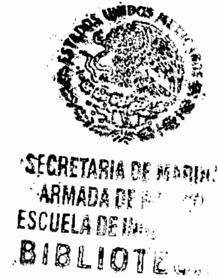
BENJAMIN C. KUO

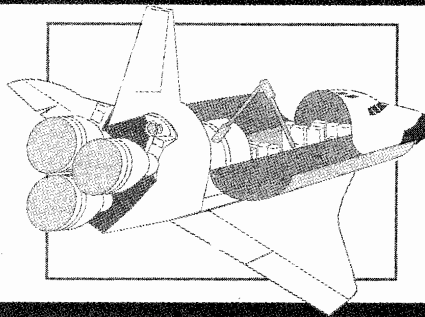

SECRETARIA DE MARINA
ARMADA DE MEXICO
ESCUELA DE INGENIERO
BIBLIOTECA

SISTEMAS DE CONTROL AUTOMÁTICO

Sistemas de control automático

SÉPTIMA EDICIÓN





Benjamin C. Kuo



Professor Emeritus

Departament of Electrical and Computer Engineering
University of Illinois at Urbana-Champaign

TRADUCCIÓN:

ING. GUILLERMO ARANDA PÉREZ
Ing. Mecánico Electricista
Universidad La Salle

REVISOR TÉCNICO:

FRANCISCO RODRÍGUEZ RAMÍREZ
Ing. Mecánico Electricista
Coordinador de Dinámica de Sistemas Físicos
Facultad de Ingeniería, UNAM

PRENTICE HALL HISPANOAMERICANA, S. A.

MÉXICO • **NUEVA YORK** • BOGOTÁ • LONDRES • SYDNEY
PARÍS • MUNICH • TORONTO • NUEVA DELHI • TOKIO • SINGAPUR
RÍO DE JANEIRO • ZURICH

EDICION EN ESPAÑOL:

PRESIDENTE DIVISIÓN LATINOAMÉRICA DE SIMON AND SCHUSTER:	RAYMUNDO CRUZADO GONZÁLEZ
DIRECTOR GENERAL:	MOISÉS PÉREZ ZAVALA
GERENTE DIVISION UNIVERSITARIA:	ENRIQUE IVÁN GARCÍA HERNÁNDEZ
GERENTE EDITORIAL COLLEGE:	JOSÉ TOMÁS PÉREZ BONILLA
EDITOR:	LUIS GERARDO CEDEÑO PLASCENCIA
GERENTE DE PRODUCCIÓN:	JULIÁN ESCAMILLA LIQUIDANO
GERENTE DE TYCE:	JORGE BONILLA TALAVERA
GERENTE DE IMPRESIÓN:	ALBERTO SIERRA OCHOA
SUPERVISOR DE TRADUCCIÓN:	JOSÉ LUIS NÚÑEZ
SUPERVISOR DE PRODUCCIÓN:	OLGA ADRIANA SÁNCHEZ NAVARRETE

EDICIÓN EN INGLÉS:

Acquisitions editor: Linda Ratts
Production editor: Irwin Zucker
Interior design: Amy Rosen
Buyer: Bill Scazzero
Cover design: Bruce Kenselaar
Cover photo: Courtesy of NASA
Editorial assistant: Naomi Goldman

KUO: SISTEMAS DE CONTROL AUTOMATICO 7ª/Edición

Traducido del inglés de la obra AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS

All rights reserved. Authorized translation from English language edition published by Prentice-Hall Inc.

Todos los derechos reservados. Traducción autorizada de la edición en inglés publicada por Prentice Hall-Inc.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from the publisher.

Prohibida la la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o método sin autorización por escrito del editor.

Derechos reservados © 1996 respecto a la primera edición en español publicada por PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, S.A.
Enrique Jacob 20, Col. El Conde
53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México

ISBN 968-880-723-0

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1524



Original English Language Edition Published by Prentice-Hall Inc.
Copyright © MCMXCV
All rights reserved

EDIMSA, S.A.
AV. TLAHUAC No.43-F
IZTAPALAPA, MÉXICO, D.F.
C.P. 09820

ISBN 0-13-304759-8





IMPRESO EN MÉXICO/ PRINTED IN MEXICO

Contenido

Prefacio xix

Prefacio al software de computadora para sistemas de control xxii

1 Introducción 1

1-1 Introducción 1

1-1-1 Componentes básicos de un sistema de control 2
1-1-2 Ejemplos de aplicaciones de sistemas de control 3
1-1-3 Sistemas de control en lazo abierto (Sistemas no realimentados) 9
1-1-4 Sistemas de control en lazo cerrado (Sistemas de control realimentados) 9

1-2 ¿Qué es realimentación y cuáles son sus efectos? 11

1-2-1 Efecto de la realimentación en la ganancia global 12
1-2-2 Efecto de la realimentación en la estabilidad 12
1-2-3 Efecto de la realimentación en la sensibilidad 13
1-2-4 Efecto de la realimentación en las perturbaciones externas o ruido 14

1-3 Tipos de sistemas de control realimentado 15

1-3-1 Sistemas de control lineales contra no lineales 15
1-3-2 Sistemas invariantes con el tiempo contra variantes con el tiempo 16

1-4 Resumen 19

2 Fundamentos matemáticos 21

2-1 Introducción 21

2-2 Conceptos sobre variable compleja 22

2-2-1 Variable compleja 22
2-2-2 Funciones de una variable compleja 22
2-2-3 Función analítica 23

2-2-4 Singularidades y polos de una función 24
2-2-5 Ceros de una función 24

2-3 Ecuaciones diferenciales 25

2-3-1 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales 25
2-3-2 Ecuaciones diferenciales no lineales 25
2-3-3 Ecuaciones diferenciales de primer orden: ecuaciones de estado 26

2-4 Transformada de Laplace 28

2-4-1 Definición de la transformada de Laplace 29
2-4-2 Transformada inversa de Laplace 30
2-4-3 Teoremas importantes de la Transformada de Laplace 31

2-5 Transformada inversa de Laplace mediante la expansión en fracciones parciales 34

2-5-1 Expansión en fracciones parciales 35
2-5-2 Solución por computadora de la expansión en fracciones parciales 39

2-6 Aplicación de la transformada de Laplace a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales 41

2-7 Teoría de matrices elemental 44

2-7-1 Definición de una matriz 45

2-8 Álgebra de matrices 49

2-8-1 Igualdad de matrices 50
2-8-2 Suma y resta de matrices 50
2-8-3 Ley asociativa de matrices (suma y resta) 51
2-8-4 Ley conmutativa de matrices (suma y resta) 51
2-8-5 Multiplicación de matrices 51
2-8-6 Reglas de multiplicación de matrices 52
2-8-7 Multiplicación por un escalar k 53
2-8-8 Inversa de una matriz 53
2-8-9 Rango de una matriz 54
2-8-10 Solución de matrices con ayuda de computadora 55

2-9 Forma matricial de las ecuaciones de estado 55

2-10 Ecuaciones en diferencias 57

2-11 La transformada *z* **58**

2-11-1 Definición de la transformada *z* 58

2-11-2 Relación entre la transformada de Laplace y la transformada *z* 59

2-11-3 Algunos teoremas importantes de la transformada *z* 61

2-11-4 Transformada *z* inversa 64

2-11-5 Solución por computadora de la expansión en fracciones parciales de $Y(z)/z$ 66

2-12 Aplicación de la transformada *z* a la solución de ecuaciones en diferencias lineales **67**

2-13 Resumen **68**

3 Funciones de transferencia, diagramas de bloques y gráficas de flujo de señales 77

3-1 Introducción **77**

3-2 Respuesta al impulso y función de transferencia de sistemas lineales **78**

3-2-1 Respuesta al impulso 78

3-2-2 Función de transferencia (sistemas de una entrada y una salida) 78

3-2-3 Función de transferencia (sistemas multivariables) 81

3-3 Diagramas de bloques **83**

3-3-1 Diagramas de bloques de un sistema de control 84

3-3-2 Diagramas de bloques y funciones de transferencia de un sistema multivariable 86

3-4 Gráficas de flujo de señales **89**

3-4-1 Elementos básicos de una gráfica de flujo de señales 89

3-5 Resumen de las propiedades básicas de una gráfica de flujo de señales **90**

3-6 Definiciones de los términos de una gráfica de flujo de señales **91**

3-7 Álgebra de las gráficas de flujo de señales **94**

3-7-1 Gráfica de flujo de señales de un sistema de control realimentado 94

3-8 Fórmula de ganancia para gráficas de flujo de señales 96

3-8-1 Aplicaciones de la fórmula de ganancia entre nodos de salida y nodos intermedios 98

3-9 Aplicación de la fórmula de ganancia a diagramas de bloques 99

3-10 Diagramas de estado 100

3-10-1 De ecuaciones diferenciales al diagrama de estado 102

3-10-2 De diagramas de estado a la función de transferencia 104

3-10-3 De diagramas de estado a las ecuaciones de estado y de salida 105

3-11 Funciones de transferencia de sistemas en tiempo discreto 106

3-11-1 Funciones de transferencia de sistemas en tiempo discreto con elementos en cascada 111

3-11-2 Función de transferencia del retén de orden cero 113

3-11-3 Funciones de transferencia en lazo cerrado de sistemas en tiempo discreto 114

3-12 Resumen 117

4 Modelado matemático de sistemas físicos 134

4-1 Introducción 134

4-2 Ecuaciones de circuitos eléctricos 135

4-3 Modelado de elementos de sistemas mecánicos 138

4-3-1 Movimiento de traslación 138

4-3-2 Movimiento de rotación 142

4-3-3 Conversión entre movimientos de traslación y de rotación 145

4-3-4 Trenes de engranes, palancas y bandas 147

4-3-5 Juego y zona muerta 150

4-4 Ecuaciones de sistemas mecánicos 151

4-5 Detectores y codificadores en sistemas de control 160

4-5-1 Potenciómetro 160

4-5-2 Tacómetros 166

4-5-3 Codificador incremental 168

4-6 Motores de cd en sistemas de control **171**
4-6-1 Principios de operación básicos de motores de cd 172
4-6-2 Clasificación básica de motores de cd de imán permanente 173
4-6-3 Modelado matemático de motores de cd de imán permanente 175
4-6-4 Curvas par-velocidad de un motor de cd 180
4-6-5 Curvas par-velocidad de un sistema amplificador/motor de cd 181

4-7 Linealización de sistemas no lineales **183**

4-8 Sistemas con retardo **189**
4-8-1 Aproximación de funciones de retardo mediante funciones racionales 190

4-9 Amplificadores operacionales **191**
4-9-1 Amplificador operacional 192
4-9-2 Sumas y restas 192
4-9-3 Configuraciones de amplificadores operacionales de primer orden 194

4-10 Sistema de seguimiento del sol **197**
4-10-1 Sistema de coordenadas 198
4-10-2 Detector de error 198
4-10-3 Amplificador operacional 199
4-10-4 Amplificador de rastreo 200
4-10-5 Tacómetro 200
4-10-6 Motor de cd 200

4-11 Resumen **200**

5 Análisis de variable de estado 226

5-1 Introducción **226**

5-2 Representación matricial de las ecuaciones de estado **227**

5-3 Matriz de transición de estado **230**
5-3-1 Significado de la matriz de transición de estado 232
5-3-2 Propiedades de la matriz de transición de estado 232

5-4 Ecuación de transición de estado **233**

5-4-1 Ecuación de transición de estado a partir del diagrama de estado 236

5-5 Relación entre las ecuaciones de estado y ecuaciones diferenciales de orden superior **240**

5-6 Relación entre las ecuaciones de estado y las funciones de transferencia **242**

5-7 Ecuación característica, valores y vectores característicos **245**

5-7-1 Valores característicos 247

5-7-2 Vectores característicos 248

5-8 Transformaciones de similitud **250**

5-8-1 Propiedades invariantes de las transformaciones de similitud 252

5-8-2 Forma canónica controlable 253

5-8-3 Forma canónica observable 256

5-8-4 Forma canónica diagonal 258

5-8-5 Forma canónica de Jordan 261

5-9 Descomposición de funciones de transferencia **263**

5-9-1 Descomposición directa 263

5-9-2 Descomposición en cascada 269

5-9-3 Descomposición en paralelo 271

5-10 Controlabilidad de sistemas lineales **273**

5-10-1 Concepto general sobre controlabilidad 275

5-10-2 Definición de controlabilidad de estado 276

5-10-3 Pruebas alternas sobre controlabilidad 277

5-11 Observabilidad de sistemas lineales **279**

5-11-1 Definición de observabilidad 280

5-11-2 Pruebas alternas sobre observabilidad 280

5-12 Relación entre controlabilidad, observabilidad y funciones de transferencia **281**

5-13 Teoremas invariantes sobre controlabilidad y observabilidad **284**

5-14 Ecuaciones de estado de sistemas lineales en tiempo discreto **286**

5-14-1 Ecuaciones de estado discretas 287

5-14-2 Soluciones de las ecuaciones de estado discretas: Ecuaciones de transición de estado discreto 289

5-15 Solución de las ecuaciones de estado discreto mediante la transformada z **291**

5-15-1 Matriz función de transferencia y ecuación característica 292

5-16 Diagramas de estado de sistemas en tiempo discreto **294**

5-16-1 Diagramas de estado de sistemas de datos muestreados 296

5-17 Ejemplo final: sistema de suspensión magnética de una bola **299**

5-18 Resumen **303**

6 Estabilidad de sistemas de control lineales 327

6-1 Introducción **327**

6-2 Estabilidad de entrada acotada y salida acotadas: Sistemas en tiempo continuo **328**

6-2-1 Relación entre las raíces de la ecuación característica y la estabilidad 329

6-3 Estabilidad de entrada cero y estabilidad asintótica de sistemas en tiempo continuo **330**

6-4 Métodos para determinar la estabilidad **333**

6-5 Criterio de Routh-Hurwitz **334**

6-5-1 Criterio de Hurwitz 335

6-5-2 Arreglo de Routh 336

6-5-3 Casos especiales cuando el arreglo de Routh termina prematuramente 339

6-6 Estabilidad de sistemas en tiempo discreto **343**
6-6-1 Estabilidad BIBO 344
6-6-2 Estabilidad de entrada cero 344

6-7 Pruebas de estabilidad para sistemas en tiempo discreto **345**
6-7-1 Método de la transformada bilineal 346
6-7-2 Pruebas de estabilidad directas 349

6-8 Resumen **351**

7 Análisis de sistemas de control en el dominio del tiempo 361

7-1 Respuesta en el tiempo de sistemas en tiempo continuo: Introducción **361**

7-2 Señales de prueba típicas para obtener la respuesta en tiempo de sistemas de control **363**

7-3 Error en estado estable **365**
7-3-1 Error en estado estable causado por elementos de sistemas no lineales 365
7-3-2 Error en estado estable de sistemas de control lineales en tiempo continuo 367

7-4 Respuesta al escalón unitario y especificaciones en el dominio del tiempo **385**

7-5 Respuesta transitoria de un sistema prototipo de segundo orden **387**
7-5-1 Factor de amortiguamiento relativo y factor de amortiguamiento 388
7-5-2 Frecuencia natural no amortiguada 390
7-5-3 Sobrepaso máximo 394
7-5-4 Tiempo de retardo y tiempo de levantamiento 396
7-5-5 Tiempo de asentamiento 398

7-6 Análisis en el dominio del tiempo de un sistema de control de posición **402**
7-6-1 Respuesta transitoria al escalón unitario 405
7-6-2 Respuesta en estado estable 409
7-6-3 Respuesta en el tiempo a una entrada rampa unitaria 409
7-6-4 Respuesta en el tiempo de un sistema de tercer orden 411

7-7 Efectos de añadir polos y ceros a las funciones de transferencia **415**

7-7-1 Adición de un polo en la función de transferencia de la trayectoria directa: Sistemas con realimentación unitaria 416

7-7-2 Adición de un polo en la función de transferencia en lazo cerrado 417

7-7-3 Adición de un cero en la función de transferencia en lazo cerrado 419

7-7-4 Adición de un cero en la función de transferencia de la trayectoria directa: Sistemas con realimentación unitaria 420

7-8 Polos dominantes de las funciones de transferencia **422**

7-8-1 Factor de amortiguamiento relativo 423

7-8-2 Forma apropiada para despreciar los polos insignificantes considerando la respuesta en estado estable 424

7-9 Aproximación a sistemas de orden superior por sistemas de bajo orden: El enfoque formal **424**

7-9-1 Criterio de aproximación 425

7-10 Propiedades en el dominio del tiempo de sistemas en tiempo discreto **437**

7-10-1 Respuesta en el tiempo de sistemas de control en tiempo discreto 437

7-10-2 Transformación de trayectorias entre el plano s y el plano z 442

7-10-3 Relación entre las raíces de la ecuación característica y la respuesta transitoria 445

7-10-4 Análisis de error en estado estable de sistemas de control en tiempo discreto 447

7-11 Resumen **454**

8 La técnica del lugar geométrico de las raíces 470

8-1 Introducción **470**

8-2 Propiedades básicas del lugar geométrico de las raíces **472**

8-3 Propiedades y construcción del lugar geométrico de las raíces **477**

8-3-1 Puntos $K = 0$ y $K = \pm\infty$ 477

8-3-2 Número de ramas del lugar geométrico de las raíces 478

8-3-3 Simetría del lugar geométrico de las raíces 479
8-3-4 Ángulos de las asíntotas del lugar geométrico de las raíces: comportamiento del lugar geométrico de las raíces en $|s| = \infty$ 479
8-3-5 Intersección de las asíntotas (centroide) 481
8-3-6 Lugar geométrico de las raíces sobre el eje real 483
8-3-7 Ángulos de salida y ángulos de entrada del lugar geométrico de las raíces 485
8-3-8 Intersección del lugar geométrico de las raíces con el eje imaginario 488
8-3-9 Puntos de ruptura (puntos de silla) sobre el lugar geométrico de las raíces 488
8-3-10 Sensibilidad de las raíces 495
8-3-11 Cálculo de K sobre el lugar geométrico de las raíces 498

8-4 Solución por computadora 505

8-4-1 rlplot de CSAD 505
8-4-2 Root del programa CC 508

8-5 Algunos aspectos importantes sobre la construcción del lugar geométrico de las raíces 509

8-5-1 Efectos de la adición de polos y ceros de $G(s)H(s)$ 509

8-6 Contornos de las raíces: variación de parámetros múltiples 517

8-7 Lugar geométrico de las raíces de sistemas en tiempo discreto 524

8-8 Resumen 528

9 Análisis en el dominio de la frecuencia 539

9-1 Introducción 539

9-1-1 Respuesta en frecuencia de sistemas en lazo cerrado 541
9-1-2 Especificaciones en el dominio de la frecuencia 543

9-2 M_r, ω_r y ancho de banda del prototipo de segundo orden 544

9-2-1 Pico de resonancia y frecuencia de resonancia 544
9-2-2 Ancho de banda 547

9-3 Efectos de la adición de un cero en la función de transferencia de la trayectoria directa 551

9-4 Efectos de la adición de un polo en la función de transferencia de la trayectoria directa 555

9-5 Criterio de estabilidad de Nyquist: Fundamentos 557

9-5-1 El problema de estabilidad 557

9-5-2 Definición de encierrro e incluido 559

9-5-3 Número de encierros e inclusiones 560

9-5-4 Principio del argumento 560

9-5-5 Trayectoria de Nyquist 565

9-5-6 Criterio de Nyquist y la gráfica de $L(s)$ o $G(s)H(s)$ 567

9-6 Criterio de Nyquist para sistemas con función de transferencia de fase mínima 568

9-6-1 Aplicación del Criterio de Nyquist a funciones de transferencia de fase mínima que no son estrictamente propias 570

9-7 Relación entre el lugar geométrico de las raíces y el diagrama de Nyquist 570

9-8 Ejemplos ilustrativos: Criterio de Nyquist aplicado a funciones de transferencia de fase no mínima 574

9-9 Criterio general de Nyquist: para funciones de transferencia de fase mínima y no mínima 578

9-9-1 Sistema con funciones de transferencia de fase mínima 582

9-9-2 Sistemas con funciones de transferencia en lazo impropias 583

9-10 Ejemplos ilustrativos: Criterio general de Nyquist para funciones de transferencia de fase mínima y no mínima 583

9-11 Efectos de la adición de polos y ceros a $L(s)$ sobre la forma del lugar geométrico de Nyquist 594

9-12 Análisis de estabilidad de sistemas en lazos múltiples 598

9-13 Estabilidad de sistemas de control lineales con retardos puros 600

9-13-1 Trayectoria crítica 603

9-13-2 Aproximación de $e^{-T_d s}$ 605

9-14 Estabilidad relativa: Margen de ganancia y margen de fase **605**
9-14-1 Margen de ganancia 608
9-14-2 Margen de fase 610

9-15 Análisis de estabilidad con las trazas de Bode **613**
9-15-1 Trazas de Bode para sistemas con retrasos puros 615

9-16 Estabilidad relativa relacionada con la pendiente de la curva de magnitud de las trazas de Bode **618**
9-16-1 Sistema condicionalmente estable 618

9-17 Análisis de estabilidad con la traza de magnitud-fase **621**

9-18 Lugar geométrico de *M*-constante en el plano $G(j\omega)$ **622**

9-19 Lugar geométrico de fase constante en el plano $G(j\omega)$ **625**

9-20 Lugar geométrico de *M*-constante en el plano de magnitud-fase: la Carta de Nichols **627**

9-21 Solución por computadora **631**

9-22 Carta de Nichols aplicada a sistemas con realimentación no unitaria **634**

9-23 Estudios de sensibilidad en el dominio de la frecuencia **636**

9-24 Análisis en el dominio de la frecuencia de sistemas de control de datos muestreados **638**
9-24-1 Trazas de Bode con la transformación *w* 641

9-25 Resumen **645**

10 Diseño de sistemas de control 664

10-1 Introducción **664**
10-1-1 Especificaciones de diseño 665
10-1-2 Configuraciones de controladores 667
10-1-3 Principios fundamentales de diseño 670

10-2 Diseño con el controlador PD **671**
10-2-1 Interpretación en el dominio del tiempo del control PD 674

10-2-2 Interpretación del control PD en el dominio de la frecuencia 676
10-2-3 Resumen de los efectos de un control PD 678

10-3 Diseño con el controlador PI 691

10-3-1 Interpretación en el dominio del tiempo y diseño del control PI 694
10-3-2 Interpretación en el dominio de la frecuencia y diseño del control PI 695

10-4 Diseño con el controlador PID 708

10-5 Diseño con el controlador de adelanto de fase 714

10-5-1 Interpretación y diseño en el dominio del tiempo del control de adelanto de fase 715
10-5-2 Interpretación y diseño en el dominio de la frecuencia del control de adelanto de fase 717
10-5-3 Efectos de la compensación de adelanto de fase 736
10-5-4 Limitaciones del control de adelanto de fase de una sola etapa 736
10-5-5 Controlador de adelanto de fase de etapas múltiples 737
10-5-6 Consideraciones sobre sensibilidad 742

10-6 Diseño con el controlador de atraso de fase 743

10-6-1 Interpretación y diseño en el dominio del tiempo del control de atraso de fase 743
10-6-2 Interpretación y diseño en el dominio de la frecuencia del control de atraso de fase 747
10-6-3 Efectos y limitaciones del control de atraso de fase 758

10-7 Diseño con el controlador de atraso-adelanto 759

10-8 Diseño mediante cancelación de polos y ceros: Filtro de muesca 761

10-8-1 Filtro activo de segundo orden 764
10-8-2 Interpretación y diseño en el dominio de la frecuencia 766

10-9 Controladores prealimentados y en la trayectoria directa 775

10-10 Diseño de sistemas de control robusto 778

10-11 Control realimentado de lazos menores 789

10-11-1 Control realimentado de velocidad o tacométrico 790
10-11-2 Control realimentado de lazos menores mediante filtros activos 790

10-12 Control mediante realimentación de estado 794

10-13 Diseño por ubicación de polos a través de la realimentación de estado 796

10-14 Realimentación de estado con control integral 802

10-15 Resumen 809

11 Diseño de sistemas de control en tiempo discreto 836

11-1 Introducción 836

11-2 Implantación digital de controladores analógicos 837

11-2-1 Implantación digital del controlador PID 838

11-2-2 Implantación digital de los controladores de atraso y adelanto 842

11-3 Controladores digitales 843

11-3-1 Realizaciones físicas de controladores digitales 843

11-4 Diseño de sistemas en tiempo discreto en el dominio de la frecuencia y en el plano z 847

11-4-1 Controladores de adelanto y atraso de fase en el dominio w 847

11-5 Diseño de sistemas de control en tiempo discreto de respuesta con oscilaciones muertas 855

11-6 Diseño por ubicación de polos mediante la realimentación de estado 857

11-7 Resumen 859

Apéndice A Trazas en el dominio de la frecuencia 864

Apéndice B Tabla de transformadas de Laplace 887

Apéndice C Tabla de transformadas z 889

Respuestas y sugerencias a problemas selectos 890

Índice 898

Prefacio (léame)

Una gran cantidad de pensamiento, realimentación y esfuerzo se han invertido en la elaboración y preparación de la séptima edición. Este formato que comenzó en la sexta edición es ahora casi un estándar entre los textos introductorios sobre sistemas de control. Parece ser que mejora la lectura y la presentación gráfica de temas complejos.

Una parte significativa del libro se revisó y amplió. Los puntos principales de revisión son los siguientes:

1. Se mejoró el aprendizaje y diseño asistidos por computadora. Las soluciones por computadora de problemas muestra se insertan en varios puntos en el texto.
2. Se incrementó el esfuerzo para hacer que el material difícil sea fácil de aprender.
3. Cierto material menos importante que probablemente no ha utilizado la mayoría de los usuarios se eliminó o redujo.
4. Los problemas al final de los capítulos se revisaron y ampliaron, y añadieron nuevos problemas. Se hace énfasis en la solución por computadora.
5. Se redefinieron muchos temas, por ejemplo los errores en estado estable para sistemas con realimentación no unitaria.
6. El material sobre el diseño en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo se consolidó en un solo capítulo. Estos dos temas de diseño son tratados lado a lado para que el lector pueda realizar comparaciones de forma inmediata.

Con la ayuda de Don Fowley, editor ejecutivo de Simon & Schuster, el libro se revisó extensamente antes de la revisión formal. El autor está en deuda con el Profr. Duane Hanselman, de la Universidad de Maine, por la revisión de la sexta edición y por las valiosas sugerencias que proporcionó durante la misma. El Profr. Hanselman, quién también revisó varios capítulos de esta nueva edición, contribuyó en el material de amplificadores operacionales. Sus sugerencias a la revisión fueron invaluables y verdaderamente añadieron nuevas dimensiones al texto.

Los párrafos siguientes están dirigidos a tres grupos: los profesores que han adoptado el libro o quienes esperamos que lo seleccionen como texto; ingenieros practicantes que buscan resolver problemas y, finalmente, a los estudiantes que están leyendo el libro porque ha sido adoptado como texto para el curso.

Al profesor: El material contenido en este libro es una consecuencia del curso de sistemas de control a nivel licenciatura, impartido por el autor en la Universidad de Illinois en Champaign, Urbana, durante 30 años. Las primeras seis ediciones han sido adoptadas por cientos de universidades en EUA y alrededor del mundo, así como traducido a seis idiomas. La séptima edición ha sido ampliada a un total de once capítulos y tres apéndices. Se ha hecho gran énfasis en el diseño de sistemas de control y a las soluciones por computadora. Muchos sistemas, tal como **el sistema seguidor del Sol, control de nivel de líquido, control**

de un motor de cd, control de carga de un vehículo espacial, y otros, son manejados como ejemplos numéricos desde el análisis hasta el diseño. Existe más material en este libro que el que se puede cubrir en un semestre. El material sobre sistemas de control en tiempo discreto sigue al tratamiento de sistemas de control en tiempo continuo en capítulos selectos. Personalmente, encuentro más fácil introducir los sistemas en tiempo discreto como una extensión de sus contrapartes analógicos, además, siendo realistas, es difícil cubrir todos los temas de control digital en un curso de un semestre. El Cap. 11 está dedicado al diseño de sistemas de control en tiempo discreto.

Una selección que muestra sección por sección para un curso de un semestre se presenta en el *Manual del Instructor,* disponible con el editor para los instructores calificados. El *Manual* también contiene soluciones detalladas de los problemas del libro, así como problemas para tareas adicionales y posibles problemas para examen.

Al ingeniero practicante: Este libro está escrito teniendo en mente a los lectores, ya que es accesible para el autoestudio. El objetivo es tratar los temas en una forma clara y completa. El libro no sigue el formato de teorema-prueba-Q.E.D y no emplea matemáticas pesadas. El autor ha sido consultado extensamente por la industria durante sus 35 años de carrera magisterial, y ha participado en la solución de numerosos problemas de sistemas de control, desde sistemas aeroespaciales hasta controles industriales, controles automotrices y control de periféricos para computadoras. Aunque es difícil adoptar todos los detalles y realismo de los problemas prácticos en un libro de texto de este nivel, algunos ejemplos y problemas reflejan la versión simplificada de sistemas en la vida real.

A los estudiantes: Para este momento se habrán dado cuenta que están inscritos en este curso y que su profesor ¡ha adoptado este libro! No tienen que decir nada acerca de dicha selección, aunque ustedes pueden expresar su opinión acerca del libro después de leerlo. Peor aún, una de las razones por las que su profesor eligió este libro es porque él o ella intenta hacerlos trabajar duro. Por favor no me malentiendan. Lo que realmente quiero decir es que aunque éste es un libro de fácil estudio (en mi opinión), no es un libro sin sentido. No tiene caricaturas o fotografías bonitas para divertirlos. A partir de aquí todo es negocio y trabajo duro. Deberán tener los prerrequisitos en temas que se encuentran en un curso típico de sistemas lineales, tales como resolver ecuaciones diferenciales, transformada de Laplace y sus aplicaciones, análisis de sistemas lineales en el dominio de la frecuencia y respuesta en el tiempo. En este libro no encontrarán nuevas matemáticas a las que no hayan sido expuestos con anterioridad. Lo que es interesante y retador es que van a aprender cómo aplicar algunas de las matemáticas que han adquirido durante los últimos dos o tres años de estudios en la universidad.

Este libro tiene un total de 188 ejemplos ilustrativos. Algunos de éstos son simples, con el fin de ilustrar nuevas ideas y ciertos temas. Otros ejemplos son muy elaborados para acercar el mundo práctico a ustedes. Aún más, el objetivo de este libro es presentar un material complejo en una forma clara y completa. Una de las estrategias de aprendizaje importantes para ustedes como estudiantes es no confiar estrictamente en el libro asignado. Cuando se estudia cierto tema, se debe ir a la biblioteca a revisar algunos textos similares para enterarse de cómo otros autores tratan el mismo tema. Ustedes pueden tener una mejor perspectiva sobre los temas y descubrir que un autor puede tratar el material con más cuidado y más completamente que los otros. No se distraigan con descripciones de ejemplos demasiado simplificados. Tan pronto como se encuentren en el mundo real, afrontarán el diseño de sistemas de control con órdenes que pueden confundir su mente.

La mayoría de los estudiantes en la universidad no creen que el material que pueden aprender en el salón de clases se aplicará directamente en la industria. Algunos de mis estudiantes regresaron del campo y de sus visitas a industrias, totalmente sorprendidos al encontrar que el material que aprendieron en el curso sobre sistemas de control se emplea actualmente en la industria. Están admirados de encontrar que este libro es una referencia popular entre los ingenieros practicantes. Desafortunadamente, estas visitas para automotivación y para darse cuenta de la realidad ocurren cerca del fin de su último año escolar, lo cual a menudo es tarde para lograr que los estudiantes se motiven. Les estoy diciendo esto en una etapa temprana con la esperanza de que el libro y su profesor los motiven para aprender algo acerca de sistemas de control. Su profesor probablemente les dirá lo mismo en la clase, pero pueden no creerle. Por último, los temas tratados en este libro no son difíciles, sin embargo, tienen que realizar los ejercicios para obtener su comprensión completa. Existen muchas ayudas de aprendizaje disponibles para ustedes: los programas listados en el **Prefacio al software de computadora para sistemas de control** les ahorrarán gran tiempo en resolver los problemas. Las preguntas de repaso y los resúmenes al final de cada capítulo, y las preguntas y sugerencias para los problemas selectos, deberán serles útiles.

Espero que disfruten este libro. Representa otra gran adquisición de un libro de texto (inversión) en su carrera universitaria. Les debo advertir de no vender su libro al final del semestre. Si hacen esto, no sólo violarán el axioma de finanzas: "compre barato y venda caro", sino que probablemente cuando vayan a la industria, su primera tarea involucrará el diseño de un sistema de control, sin importar su especialización.

Agradecimientos especiales: El autor desea agradecer al personal de Prentice Hall: Donald Fowley, editor ejecutivo; Linda Ratts, gerente editorial; Susan Handy, asistente editorial; y muchas otras personas que contribuyeron en diversas formas a la séptima edición. Agradecimientos especiales a Irwin Zucker; editor de producción, quien manejó en una forma excelente la edición y producción del libro. La forma profesional en que el personal de Prentice Hall, desde arriba hasta abajo, apoyó este proyecto, hizo de esta tarea difícil algo más agradable.

El autor también desea expresar su aprecio a Marcia Horton y Tim Bozik, editores en jefe, por su visión y apoyo en la producción de la sexta edición en dos colores, el cual estableció el estándar para libros de texto de sistemas de control.

Finalmente, el autor desea pagar tributo a su familia, en especial a su esposa, Margaret, por su apoyo y tolerancia en muchas formas a éste y a muchos de sus proyectos profesionales durante los últimos 40 años. 1994 marca no sólo la terminación de la séptima edición de *Sistemas de Control Automático*, sino también nuestro cuadragésimo aniversario de bodas. Sin su apoyo moral, estos proyectos nunca hubieran podido ser terminados.

B. C. Kuo
Champaign, Illinois
Año del perro dorado

Prefacio al software de computadora para sistemas de control

En años recientes, el análisis y diseño de sistemas de control han sido afectados dramáticamente por la proliferación del uso de las computadoras, especialmente de las computadoras personales. Las computadoras personales se han hecho tan poderosas y avanzadas que pueden resolver problemas de sistemas de control complejos con facilidad. Actualmente, la mayoría de las escuelas y compañías están equipadas con computadoras personales que se adquieren fácilmente.

El libro se escribió sin tener ningún software en mente. Evidentemente, existen disponibles muchos paquetes comerciales muy buenos, algunos de los cuales, ya sea para PC IBM® o compatibles o para la computadora Apple Macintosh®, se pueden usar como complemento para este libro.

El siguiente software está disponible para las versiones PC y Macintosh.

ACSP Versión 2.0 por Benjamin C. Kuo

La versión 2.0 es un paquete de software actualizado para PC IBM, XT, AT, PS/2®, o cualquier computadora compatible. Un total de ocho programas nuevos y siete programas revisados están contenidos en dos discos flexibles de 3.5 pulgadas. Los programas ofrecen en pantalla gráficas a color de alta resolución. Los programas soportan el mouse, de tal forma que la alimentación de datos y comandos, así como la selección de menús se puede realizar mediante el mismo. Otra mejora importante de la versión 2.0 respecto a las anteriores es la capacidad para vaciado de datos en pantalla. Los resultados del análisis y diseño se pueden imprimir en una Epson/IBM o cualquier impresora de matriz de puntos compatible, así como en una impresora LaserJet con la misma resolución del monitor. Los programas se describen a continuación:

Programas nuevos

linsys análisis de sistemas lineales y diseño mediante realimentación de estado en el dominio de la variable de estado

polyroot calcula las raíces de polinomios

matrixm multiplicación de dos matrices

pfe expansión en fracciones parciales de funciones de transferencia en el dominio de s

clrsp respuesta en tiempo (respuestas al impulso, escalón y rampa) de sistemas de control en lazo abierto y en lazo cerrado en tiempo continuo

rootloci diagrama del lugar geométrico de las raíces de ecuaciones en el dominio de *s*

freqrp análisis en el dominio de la frecuencia de sistemas lineales en tiempo continuo

freqcad diseño asistido por computadora de sistemas de control lineales en tiempo continuo en el dominio de la frecuencia

Programas revisados

freq análisis en el dominio de la frecuencia

rootl análisis del lugar geométrico de las raíces

sfg gráficas de flujo de señal

state análisis en variables de estado

timea análisis en el dominio del tiempo

timed diseño en el dominio del tiempo

ztform análisis con transformada *z*

ACSP es publicado y distribuido por Prentice Hall, una división de Simon & Schuster.

MATLAB® Herramientas para el diseño y análisis de sistemas de control, segunda edición por D.C. Hanselman y B. C. Kuo, Prentice Hall, 1995

CSAD es un conjunto de herramientas de **MATLAB** manejadas por menú y mouse para completar los estudios universitarios de sistemas de control en tiempo continuo. Las siguientes descripciones muestran qué son y qué no son dichas herramientas y los archivos M más importantes.

▲ **ES** un conjunto (más de 70) archivos M que se ejecutan en cualquier versión 3.5 de **MATLAB.** No son necesarias las herramientas de Sistemas de control ni el de Señales y sistemas.

▲ **NO ES** otro texto que muestra a los estudiantes cómo utilizar **MATLAB** para el diseño y análisis de sistemas de control.

▲ **NO ES** solamente una colección de archivos M para aumentar las herramientas de Sistemas de control o la Edición de estudiantes de MATLAB.

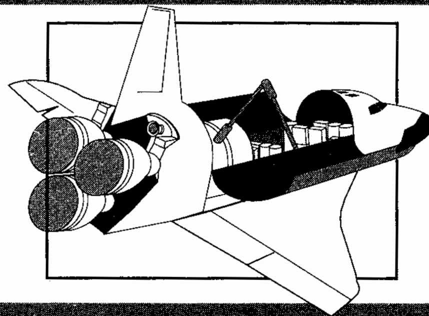
▲ **ES** un conjunto de archivos M y un texto de referencia que lo acompaña, que permiten a los estudiantes analizar y diseñar sistemas de control *sin el peso de programar en MATLAB o manipular datos en MATLAB.* El usuario pregunta por información mediante la selección de menús y con el mouse selecciona puntos de interés sobre las gráficas.

Lista de los 10 archivos M más importantes

1. **pidesign (tddesign)**	diseño de controladores tipo PID
2. **lldesign (fddesign)**	diseño de controladores tipo adelanto/atraso
3. **rlplot**	gráfica del lugar geométrico de las raíces
4. **tftplot**	respuesta al escalón a partir de una descripción en función de transferencia
5. **svplot**	respuesta al escalón a partir de una descripción en variables de estado
6. **svdesign (svstuff)**	diseño y análisis en variables de estado
7. **bplot**	trazas de Bode
8. **mvpplot**	trazas de magnitud contra frecuencia (Nichols) en el dominio de la frecuencia
9. **plrplots**	trazas polares (Nyquist) en el dominio de la frecuencia
10. **iltplot**	transformada inversa de Laplace (*i.e.*, gráficas de respuesta en el tiempo) a partir de su descripción en la transformada de Laplace

B. C. Kuo
Champaign, Illinois

1 Introducción



PALABRAS CLAVE Y TEMAS

- ▲ Sistemas de control
- ▲ Realimentación
- ▲ Sistemas lineales *vs.* no lineales
- ▲ Sistemas invariantes con el tiempo *vs.* sistemas variantes con el tiempo
- ▲ Sistemas en tiempo discreto

1-1 Introducción

El objetivo de este capítulo es familiarizar al lector con el siguiente material:

1. ¿Qué es un sistema de control?
2. ¿Por qué son importantes los sistemas de control?
3. ¿Cuáles son los componentes básicos de un sistema de control?
4. Algunos ejemplos de aplicaciones de sistemas de control.
5. ¿Por qué se incluye la realimentación en la mayoría de los sistemas de control?
6. Tipos de sistemas de control.

Una de las preguntas que más comúnmente hace un novato en sistemas de control es: ¿Qué es un sistema de control? Para responder a esta pregunta, se puede decir que en nuestra vida diaria existen numerosos objetivos que necesitan cumplirse. Por ejemplo, en el ámbito doméstico, se requiere regular la temperatura y humedad de las casas y edificios para tener un ambiente cómodo. Para transportación, se requiere controlar que un automóvil o un aeroplano se muevan de un lugar a otro en una forma segura y exacta. En la industria, los procesos de manufactura tienen un sinnúmero de objetivos para productos que satisfacerán requerimientos de precisión y costo. Un ser humano es capaz de realizar una gran cantidad de tareas, incluyendo tomar decisiones. Algunas de estas tareas tales como coger objetos y caminar de un punto a otro se realizan en una forma rutinaria. Bajo ciertas condiciones, algunas de estas tareas se realizan de la mejor forma posible. Por ejemplo, un atleta que corre una distancia de 100 metros tiene el objetivo de correr dicha distancia en el menor tiempo posible. Por otro lado, un corredor de maratón no sólo debe correr la distancia lo más rápido posible sino también debe controlar el consumo de energía y desarrollar la mejor estrategia para la carrera. La búsqueda para alcanzar tales "objetivos" requiere normalmente utilizar un sistema de control que implante ciertas estrategias de control.

▲ Los sistemas de control se encuentran en forma abundante en la civilización moderna.

En años recientes, los sistemas de control han asumido un papel cada vez más importante en el desarrollo y avance de la civilización moderna y la tecnología. Prácticamente, cada aspecto de las actividades de nuestra vida diaria está afectado por algún tipo de sistema de control. Los sistemas de control se encuentran en gran cantidad en todos los sectores de la industria, tales como control de calidad de los productos manufacturados, líneas de ensamble automático, control de máquinas-herramienta, tecnología espacial y sistemas de armas, control por computadora, sistemas de transporte, sistemas de potencia, robótica y muchos otros. Aun el control de inventarios y los sistemas económicos y sociales se pueden visualizar a través de la teoría de control automático.

1-1-1 Componentes básicos de un sistema de control

Los componentes básicos de un sistema de control se pueden describir mediante:

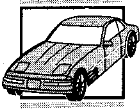
1. Objetivos de control.
2. Componentes del sistema de control.
3. Resultados o salidas.

La relación básica entre estos tres componentes se ilustra en la Fig. 1-1. En términos más técnicos, los **objetivos** se pueden identificar como **entradas,** o **señales actuantes** u, y los resultados también se llaman **salidas,** o **variables controladas,** y. En general, el objetivo de un sistema de control es controlar las salidas en alguna forma prescrita mediante las entradas a través de los elementos del sistema de control.



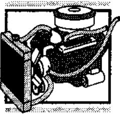
Figura 1-1 Componentes básicos de un sistema de control

1-1-2 Ejemplos de aplicaciones de sistemas de control



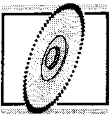
Control de la dirección de un automóvil

Como un ejemplo simple del sistema de control mostrado en la Fig. 1-1, se considera el sistema de control de la dirección de un automóvil. La dirección de las dos ruedas delanteras se puede visualizar como la variable controlada, o la salida, y; la dirección del volante es la señal actuante, o la entrada u. El sistema de control o proceso en este caso, está compuesto del mecanismo de la dirección y de la dinámica del automóvil completo. Sin embargo, si el objetivo es controlar la velocidad del automóvil, entonces la presión ejercida sobre el acelerador sería la señal actuante, y la velocidad del automóvil sería la variable controlada. El sistema de control total simplificado de un automóvil se puede ver como uno con dos entradas (volante y acelerador) y dos salidas (dirección y velocidad). En este caso las dos entradas y las dos salidas son independientes, pero en general, hay sistemas en que los controles están acoplados. Los sistemas con más de una entrada y más de una salida son llamados **sistemas multivariables.**



Control de la velocidad en ralentí de un automóvil

Como otro ejemplo de un sistema de control, se considera el control de la velocidad en ralentí de un automóvil. El objetivo de tal sistema de control es mantener la velocidad en ralentí del motor en un valor relativamente bajo (para economía de combustible) sin importar las cargas aplicadas al motor (transmisión, aire acondicionado, etc.). Sin el control de la velocidad en ralentí, cualquier cambio súbito en la aplicación de la carga del motor causa una caída en la velocidad del motor que puede provocar que el motor se detenga. Por tanto, los objetivos principales del control de velocidad en ralentí son 1) eliminar o minimizar las caídas de velocidad cuando se aplica carga al motor, y 2) mantener la velocidad en ralentí del motor en un valor deseado. La Fig. 1-2 muestra el sistema de control de la velocidad en ralentí desde el punto de vista de las entradas y salidas del sistema. En este caso, el ángulo del acelerador α y el par de carga T_L (debido a la aplicación del aire acondicionado, dirección hidráulica, transmisión, frenos de potencia, etc.), son las entradas, y la velocidad del motor ω es la salida. El motor es el proceso controlado del sistema.



Sistema de control de una rueda de impresión (margarita)

La Fig. 1-3 muestra un ejemplo del sistema de control de una rueda de impresión (margarita) de un procesador de textos o una máquina de escribir electrónica. La margarita, que típicamente tiene 96 o 100 caracteres, se mueve a la posición donde se encuentra el carácter deseado para colocarlo frente al martillo para la impresión por impacto. La selección del carácter se realiza en la forma usual mediante el teclado. Cada vez que alguna tecla se presiona, un

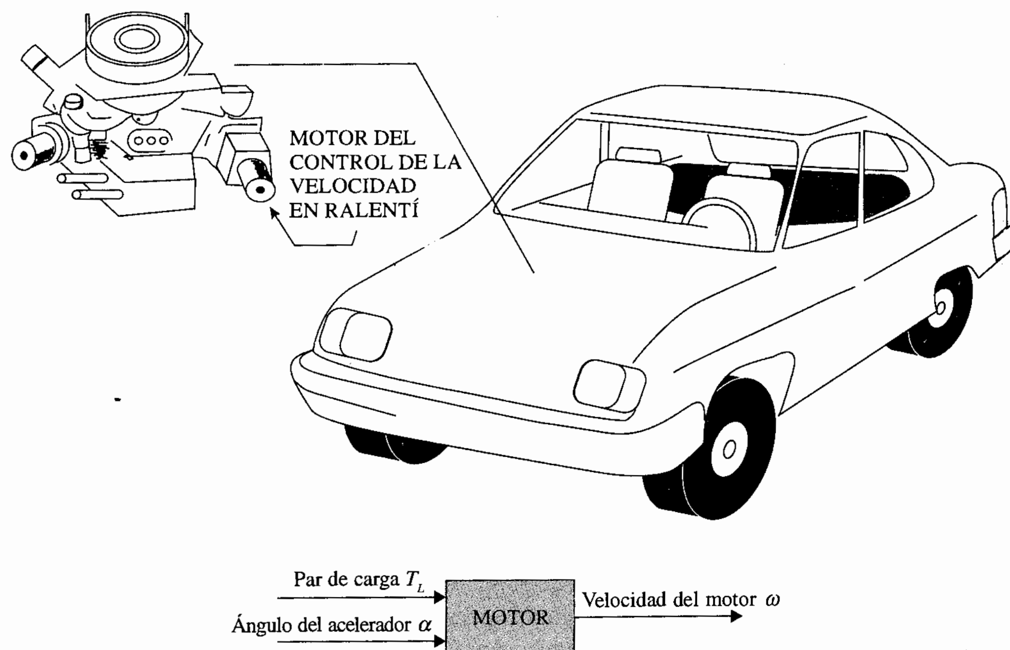
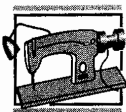


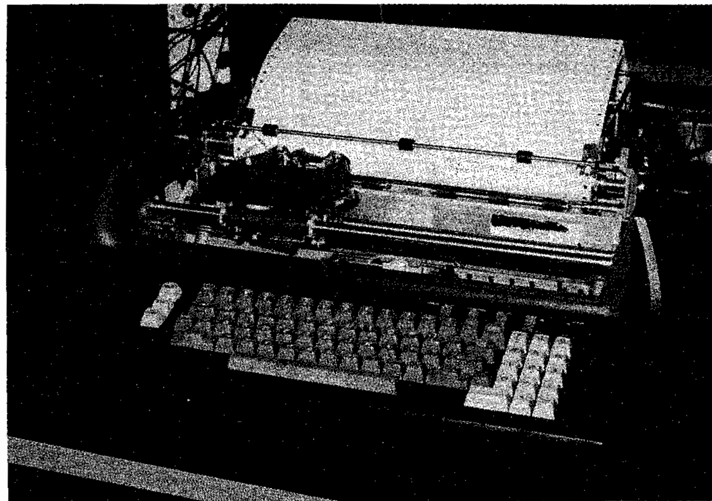
Figura 1-2 Sistema de control de la velocidad en Ralentí.

microprocesador de control calcula la dirección y la distancia a recorrer y envía la señal lógica de control al amplificador de potencia que controla el motor que a su vez maneja la margarita. En la práctica, las señales de control generadas por el microprocesador de control deben ser capaces de mover la margarita de una posición a otra lo suficientemente rápido y con una alta calidad de impresión, lo cual significa que la posición de la margarita debe ser controlada con exactitud. La Fig. 1-4 muestra un conjunto típico de entradas y salidas para este sistema. Cuando se proporciona la entrada de referencia, la señal se representa como un escalón. Como las bobinas eléctricas del motor tienen inductancia y las cargas mecánicas tienen inercia, la margarita no puede responder a la entrada en forma instantánea. Típicamente, la margarita sigue la respuesta que se muestra, y se establece en la nueva posición después de un tiempo t_1. La impresión no debe comenzar hasta que la margarita haya alcanzado el alto total, si no, el carácter será embarrado. La Fig. 1-4 muestra que después que la margarita se ha detenido, el periodo de t_1 a t_2 está reservado para la impresión, de tal forma que el sistema esté listo para recibir un nuevo comando después del tiempo t_2.

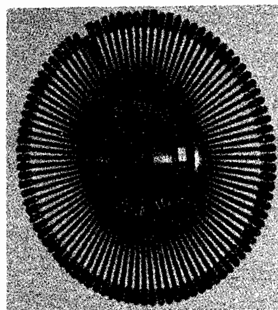


Máquina de coser industrial

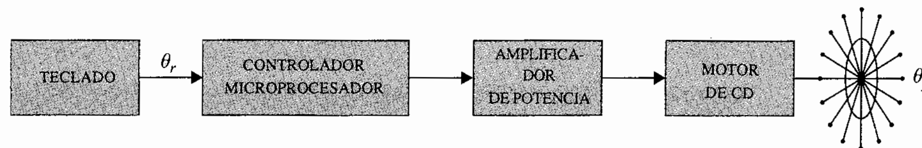
El coser, como una operación de ensamble básica en el proceso de fabricación de una prenda es, en principio, una operación bastante complicada y laboriosa. Para tener un bajo costo y una alta productividad, la industria de la costura tiene que confiar en complejas máquinas de coser para incrementar la velocidad y exactitud de las operaciones de costura. La Fig. 1-5



(a)



(b)



(c)

Figura 1-3 (a) Procesador electrónico de textos (b) Rueda de impresión (margarita). (c) Sistema de control en lazo abierto de un procesador de textos.

muestra una máquina de coser típica, la cual, en comparación con una máquina de coser doméstica, es estrictamente un dispositivo de un solo propósito y alta precisión. Sólo puede producir un tipo de puntada pero es extremadamente rápida, con una velocidad típica de 100 puntadas por segundo. Una puntada corresponde a una revolución del eje principal de la

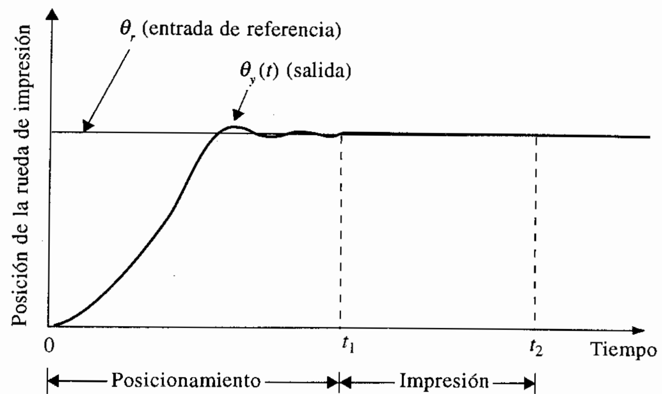
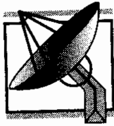


Figura 1-4 Entradas y salidas típicas del sistema de control de la rueda de impresión.

máquina, el cual alcanza velocidades tan altas como 8000 rpm. Un perfil de velocidad ideal de un ciclo de arranque y paro de la máquina se presenta en la Fig. 1-6. Típicamente, no debe existir un sobrepaso de velocidad en el punto A ni un sobrepaso negativo en el punto B. El tiempo de aceleración t_a, el tiempo de desaceleración t_b, y el tiempo de posicionamiento t_{ps}, deben ser tan pequeños como sea posible. Cuando la máquina alcanza el punto de alto, C, no debe haber oscilaciones. Para alcanzar estos objetivos de desempeño, el sistema de control de la máquina debe ser diseñado con especificaciones muy estrictas.

Control del seguimiento del Sol de colectores solares



Para alcanzar la meta de desarrollar energía eléctrica económicamente y combustibles no fósiles, el gobierno de EUA ha patrocinado muchas organizaciones en la investigación y el desarrollo de métodos de conversión de energía solar, que incluyen técnicas de conversión mediante celdas solares. En la mayoría de estos sistemas, la necesidad de alta eficiencia dictó el empleo de dispositivos para el seguimiento del Sol. La Fig. 1-7 muestra un campo de colectores solares. La Fig. 1-8 muestra un método conceptual de extracción eficiente de agua mediante energía solar. Durante las horas del día, el colector solar produce electricidad para



Figura 1-5 Máquina de coser industrial.

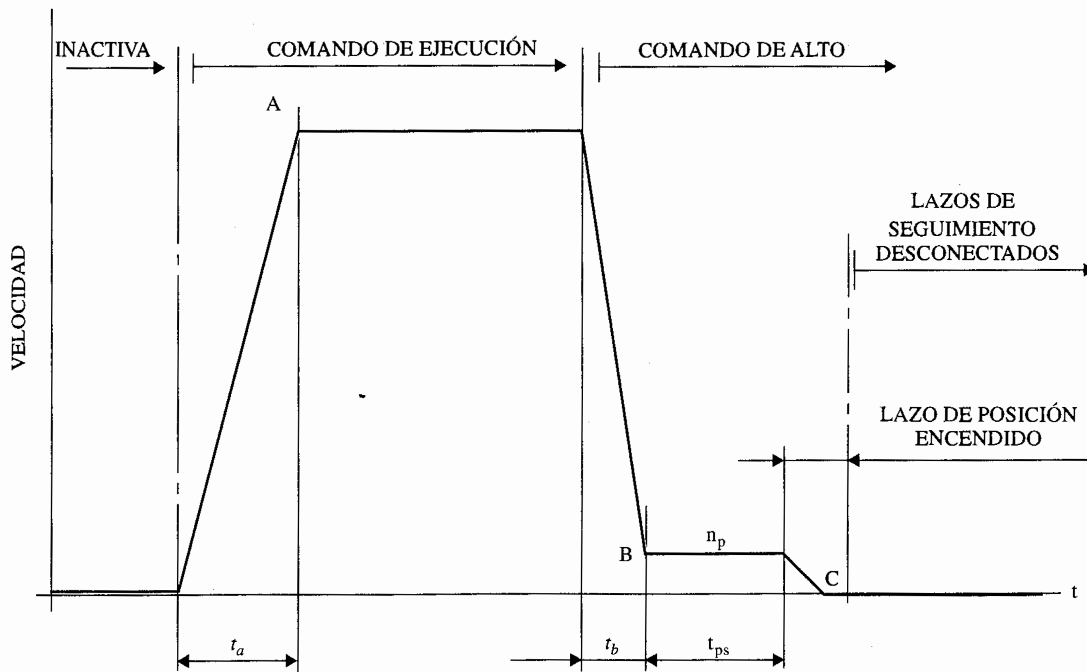


Figura 1-6 Perfil de velocidad ideal de un ciclo de arranque y paro de una máquina de coser industrial.

bombear el agua desde los mantos de agua subterráneos hasta unos depósitos (quizá unas montañas y colinas cercanas), y en las horas de la mañana, el agua puede dejarse salir hacia los sistemas de irrigación.

Una de las funciones más importantes de los colectores solares es que el disco colector debe seguir al Sol en forma exacta. Por tanto, el movimiento del disco colector debe ser controlado por complejos sistemas de control. La Fig. 1-9 describe la filosofía general del

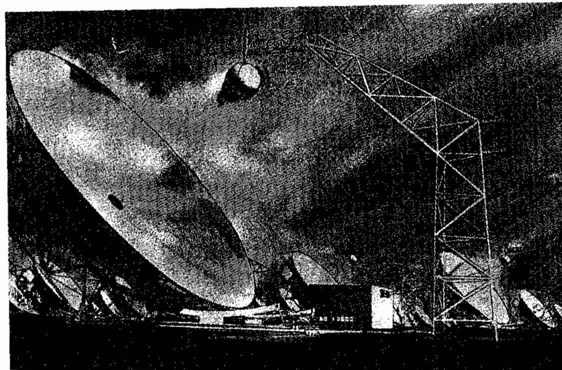


Figura 1-7 Campo de colectores solares.

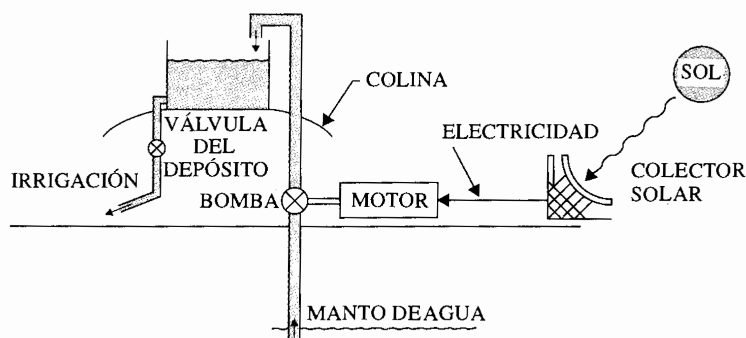


Figura 1-8 Método conceptual para la extracción eficiente de agua que emplea energía solar.

sistema seguidor del Sol junto con algunos componentes importantes. La filosofía básica del sistema de control es que el ángulo del disco colector se modifica o ajusta a una velocidad deseada predeterminada mediante el error de posición actual determinado por el detector del Sol. El controlador asegura que el colector esté apuntando directamente al Sol durante la mañana y le envía un comando de "inicio de seguimiento". Durante el día, el controlador constantemente calcula la velocidad del Sol para los dos ejes de control (acimut y elevación). El controlador emplea la velocidad del Sol y la información del detector del Sol como entradas para generar los comandos del motor para mover el disco colector.

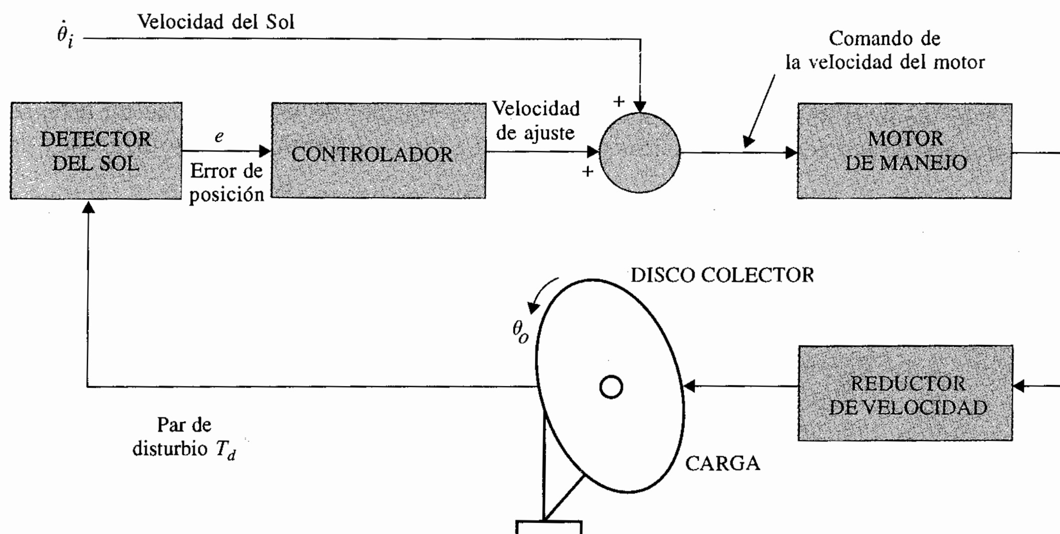


Figura 1-9 Componentes importantes del sistema de control seguidor del Sol.

1-1-3 Sistemas de control en lazo abierto (sistemas no realimentados)

▲ Los sistemas en lazo abierto son económicos pero normalmente inexactos.

El sistema de control de velocidad en ralentí o el sistema de control de la rueda de impresión ilustrados en las Figs. 1-2 y 1-3 respectivamente, son sistemas no complejos que se denominan **sistemas de control en lazo abierto.** No es difícil ver que estos sistemas no pueden satisfacer requerimientos de desempeño críticos. Por ejemplo, si el ángulo del acelerador α es colocado en cierto valor inicial que corresponde a determinada velocidad de la máquina, cuando se aplica un par de carga T_L, no existe forma de prevenir una caída en la velocidad del motor. La única forma de hacer que el sistema trabaje es tener algunos medios para ajustar α en respuesta al cambio en el par de carga con el fin de mantener ω en el nivel deseado. De forma similar, no existe garantía de que la margarita se detenga en la posición deseada una vez que se ha dado el comando. La lavadora eléctrica convencional es otro ejemplo de un sistema de control en lazo abierto porque, generalmente, el tiempo de lavado es determinado por el juicio o estimación del operador humano.

Los elementos de un sistema de control en lazo abierto se pueden dividir en dos partes: el **controlador** y el **proceso controlado,** como se muestra en la Fig. 1-10. Una señal de entrada o comando r sc aplica al controlador, cuya salida actúa como señal actuante u; la señal actuante controla el proceso controlado de tal forma que la variable controlada y se desempeñe de acuerdo con estándares prestablecidos. En los casos simples, el controlador puede ser un amplificador, unión mecánica, filtro, u otro elemento de control. En los casos más complejos, el controlador puede ser una computadora tal como un microprocesador. Debido a la simplicidad y economía de los sistemas de control en lazo abierto, se les encuentra en muchas aplicaciones no críticas.

1-1-4 Sistema de control en lazo cerrado (sistemas de control realimentado)

Lo que hace falta en el sistema de control en lazo abierto para que sea más exacto y más adaptable es una conexión o realimentación desde la salida hacia la entrada del sistema. Para obtener un control más exacto, la señal controlada y debe ser realimentada y comparada con la entrada de referencia, y se debe enviar una señal actuante proporcional a la diferencia de la entrada y la salida a través del sistema para corregir el error. Un sistema con una o más trayectorias de realimentación como el que se acaba de describir se denomina **sistema en lazo cerrado.**

Un sistema de control en lazo cerrado de la velocidad en ralentí se presenta en la Fig. 1-11. La entrada de referencia ω_r proporciona la velocidad en ralentí deseada. La velocidad del motor en ralentí debe estar de acuerdo con el valor de la referencia ω_r, y cualquier diferencia tal como la producida por el par de carga T_L, es detectada por el transductor de velocidad y el

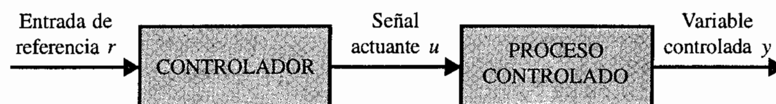


Figura 1-10 Elementos de un sistema de control en lazo abierto.

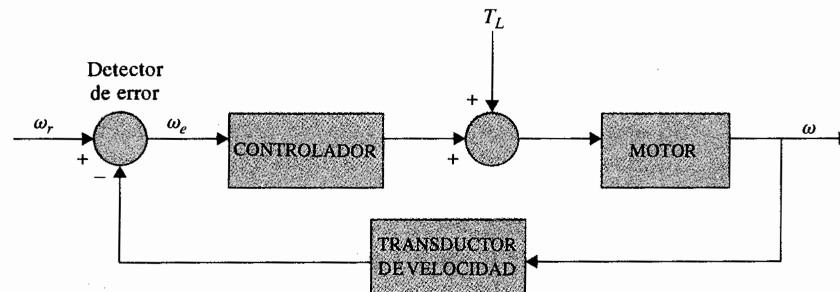
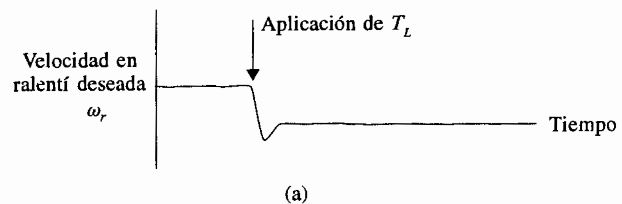


Figura 1-11 Diagrama de bloques de un sistema de control de velocidad en ralentí en lazo cerrado.

▲ Los sistemas en lazo cerrado tienen muchas ventajas sobre los sistemas en lazo abierto.

detector de error. El controlador operará sobre la diferencia y producirá una señal para ajustar el ángulo α del acelerador para corregir el error. La Fig. 1-12 compara los desempeños típicos de los sistemas de control de velocidad en ralentí en lazo abierto y lazo cerrado. En la Fig. 1-12(a), la velocidad en ralentí del sistema en lazo abierto caerá y se estabilizará en un valor inferior después de aplicar un par de carga. En la Fig. 1-12(b), la velocidad en ralentí del sistema en lazo cerrado se recupera rápidamente a su valor prestablecido después de la aplicación de T_L. El objetivo del sistema de control de velocidad en ralentí ilustrado, conocido como **sistema regulador,** es mantener la salida del sistema en el nivel prestablecido.

La Fig. 1-13 muestra un sistema de control de una rueda de impresión (margarita) con realimentación. En este caso la posición de la margarita se establece mediante un detector de posición cuya salida se compara con la posición deseada alimentada desde el teclado y procesada por el microprocesador. Por tanto, el motor es controlado para colocar la rueda de impresión en la posición deseada en una forma exacta. La información de la velocidad de la margarita se puede procesar en el microprocesador a partir del dato de posición de tal forma que el perfil de movimiento de la margarita se pueda controlar de una mejor forma.



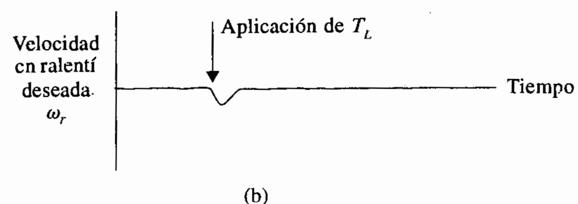


Figura 1-12 (a) Respuesta típica del sistema de control de velocidad en ralentí en lazo abierto. (b) Respuesta típica del sistema de control de velocidad en ralentí en lazo cerrado.

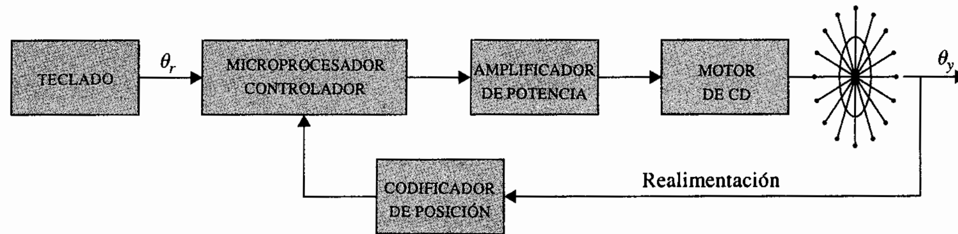


Figura 1-13 Sistema de control de la rueda de impresión en lazo cerrado.

1-2 ¿Qué es realimentación y cuáles son sus efectos?

El motivo de utilizar realimentación, ilustrado por los ejemplos de la Sec. 1-1, es de alguna forma muy simplificada. En estos ejemplos, el uso de la realimentación es para reducir el error entre la entrada de referencia y la salida del sistema. Sin embargo, el significado de los efectos de la realimentación en sistemas de control es más complejo que los demostrados en estos ejemplos simples. La reducción del error del sistema es sólo uno de los efectos más importantes que la realimentación realiza sobre el sistema. En la siguiente sección se mostrará que la realimentación también tiene efectos en características del desempeño del sistema como la **estabilidad, ancho de banda, ganancia global, perturbaciones** y **sensibilidad.**

▲ La realimentación existe donde hay una secuencia cerrada de relaciones causa-efecto.

Para entender los efectos de la realimentación sobre un sistema de control, es esencial examinar el fenómeno en el más amplio sentido. Cuando la realimentación es introducida en forma deliberada para propósitos de control, su existencia se identifica fácilmente. Sin embargo, existen numerosas situaciones en donde un sistema físico, que normalmente se reconocería como un sistema inherentemente no realimentado, se vuelve uno realimentado cuando se observa de cierta manera. En general, se puede establecer que cuando una secuencia cerrada de **relaciones causa-efecto** existe entre las variables de un sistema, se dice que existe realimentación. Este punto de vista admitirá, inevitablemente, realimentación en un gran número de sistemas que normalmente se identificarían como sistemas no realimentados. Sin embargo, con la disponibilidad de la realimentación y de la teoría de sistemas de control, esta definición general permite que numerosos sistemas, con o sin realimentación, sean estudiados en una forma sistemática una vez que la existencia de la realimentación en el sentido mencionado previamente sea establecida.

Ahora se investigarán los efectos de la realimentación en varios aspectos del desempeño de los sistemas. Sin los fundamentos matemáticos necesarios de la teoría de sistemas lineales, en este punto, sólo se puede emplear la notación de sistemas estáticos para la explicación. Se considera el sistema realimentado sencillo con la configuración de la Fig. 1-14, donde r es la señal de entrada, y la señal de salida, e el error, y b la señal de realimentación. Los parámetros G y H se pueden considerar como ganancias constantes. Mediante manipulación algebraica simple, es fácil mostrar que la relación entrada-salida del sistema es:

$$M = \frac{y}{r} = \frac{G}{1 + GH} \tag{1-1}$$

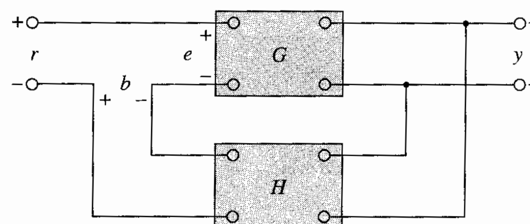


Figura 1-14 Sistema realimentado.

Empleando las ecuaciones básicas de las estructura de los sistemas realimentados, se pueden analizar algunos de los efectos significativos de la realimentación.

1-2-1 Efecto de la realimentación en la ganancia global

▲ La realimentación puede incrementar la ganancia de un sistema en un intervalo de frecuencias pero reducirla en otro.

Como se observa en la ecuación (1-1), la realimentación afecta la ganancia G de un sistema no realimentado por un factor de $1 + GH$. El sistema de la Fig. 1-14 se dice tener **realimentación negativa,** ya que un signo menos se asigna a la señal realimentada. La cantidad GH puede incluir el signo menos, por tanto *el efecto general de la realimentación es que puede incrementar o disminuir la ganancia G.* En un sistema de control práctico, G y H son funciones de la frecuencia, por tanto, la magnitud de $1 + GH$ puede ser mayor que 1 en un intervalo de frecuencia pero menor que 1 en otro. En consecuencia, *la realimentación puede incrementar la ganancia del sistema en un intervalo de frecuencia pero reducirla en otro.*

1-2-2 Efecto de la realimentación en la estabilidad

▲ Un sistema es inestable si su salida está fuera de control.

La estabilidad es una noción que describe si un sistema es capaz de seguir el comando de entrada, o en general, si dicho sistema es útil. En una forma rigurosa, *un sistema se dice inestable si sus salidas salen de control.* Para investigar el efecto de la realimentación sobre la estabilidad, se hace referencia a la expresión de la ecuación (1-1). Si $GH = -1$, la salida del sistema es infinita para cualquier entrada finita, y el sistema se dice inestable. Por tanto, se debe establecer que *la realimentación puede ocasionar que un sistema que es originalmente estable, se convierta en inestable.* Evidentemente, la realimentación es una arma de dos filos; cuando no se usa adecuadamente, puede ser dañina. Se debe puntualizar que, sin embargo, se está tratando con el caso estático, y en general, $GH = -1$ no es la única condición para la estabilidad. El tema de la estabilidad de sistemas se trata formalmente en el Cap. 6.

Se puede demostrar que una de las ventajas de incorporar realimentación es que puede estabilizar un sistema inestable. Supongamos que el sistema realimentado de la Fig. 1-14 es inestable debido a que $GH = -1$. Si se introduce otro lazo de realimentación a través de una ganancia negativa F, como se muestra en la Fig. 1-15, la relación entrada-salida del sistema total es:

$$\frac{y}{r} = \frac{G}{1 + GH + GF} \tag{1-2}$$

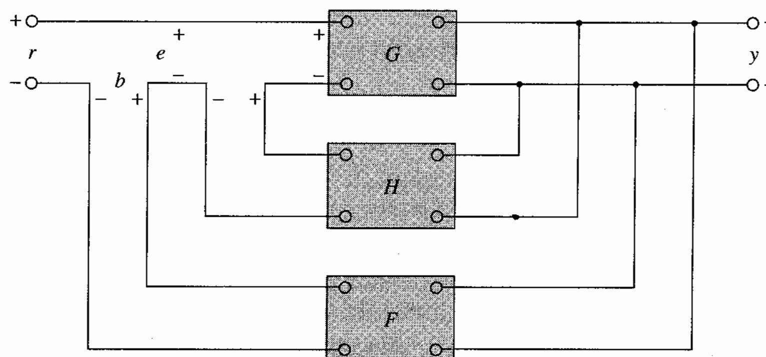


Figura 1-15 Sistema realimentado con dos lazos de realimentación.

▲ La realimentación puede mejorar la estabilidad o ser dañina para la misma.

Es aparente que si bien las propiedades de G y H son tales que el sistema realimentado de lazo interno es inestable porque $GH = -1$, el sistema total puede ser estable mediante la selección apropiada de la ganancia F de lazo de realimentación externo. En la práctica, GH es una función de la frecuencia, y la condición para la estabilidad del sistema en lazo cerrado depende de **la magnitud** y **la fase** de GH. Por último, *la realimentación puede mejorar la estabilidad o serle dañina si no se aplica adecuadamente.*

1-2-3 Efecto de la realimentación en la sensibilidad

A menudo, las consideraciones sobre sensibilidad son importantes en el diseño de sistemas de control. Ya que todos los elementos físicos tienen propiedades que cambian con el ambiente y la edad, no se pueden considerar a los parámetros de un sistema de control como completamente estacionarios durante la vida de operación del sistema. Por ejemplo, la resistencia del embobinado de un motor eléctrico cambia a medida que la temperatura del motor se eleva durante la operación. La máquina de escribir electrónica descrita en la Sec. 1-1, algunas veces no funciona normalmente cuando se enciende por primera vez debido a que los parámetros están cambiando durante el calentamiento. Este fenómeno es llamado "enfermedad de las mañanas". La mayoría de las máquinas de duplicación tiene un periodo de calentamiento durante el cual la operación es bloqueada cuando se encienden por primera vez.

En general, un buen sistema de control debe ser insensible a la variación de los parámetros pero sensible a los comandos de entrada. Se van a investigar qué efectos tiene la realimentación sobre la sensibilidad a la variación de parámetros. En referencia al sistema de la Fig. 1-14, se considera a G como la ganancia de los parámetros, la cual puede variar. La sensibilidad de la ganancia del sistema total, M, con respecto a la variación de G se define como:

$$S_G^M = \frac{\partial M/M}{\partial G/G} = \frac{\text{porcentaje de cambio en } M}{\text{porcentaje de cambio en } G} \tag{1-3}$$

▲ La realimentación puede incrementar o reducir la sensibilidad de un sistema.

en donde ∂M denota el cambio incremental en M debido al cambio incremental en G, ∂G. Utilizando la ecuación (1-1), la función de sensibilidad se escribe como

$$S_G^M = \frac{\partial M}{\partial G}\frac{G}{M} = \frac{1}{1 + GH} \qquad (1\text{-}4)$$

La relación muestra que si GH es una constante positiva, la magnitud de la función de sensibilidad se puede hacer arbitrariamente pequeña cuando GH se incrementa, mientras el sistema permanece estable. Aparentemente, en un sistema en lazo abierto, la ganancia del sistema responde de una forma uno a uno respecto a la variación en G (*i.e.*, $S_G^M = 1$). Nuevamente, se debe recordar que en la práctica GH es una función de la frecuencia; la magnitud de $1 + GH$ puede ser menor a uno para algunas frecuencias, por tanto, en algunos casos, la realimentación puede ser dañina a la sensibilidad de la variación de parámetros. En general, la sensibilidad de la ganancia de un sistema realimentado a la variación de los parámetros depende de donde estén localizados los parámetros. El lector puede obtener la sensibilidad del sistema de la Fig. 1-14 debido a la variación de H.

1-2-4 Efecto de la realimentación sobre perturbaciones externas o ruido

Todos los sistemas físicos están sujetos a algunos tipos de señales exógenas o ruido durante su operación. Ejemplos de estas señales son el voltaje de ruido térmico en circuitos electrónicos y el ruido de conmutación en motores eléctricos. Las perturbaciones externas, tal como el viento que actúa sobre una antena, son también muy comunes en sistemas de control. Por tanto, en el diseño de sistemas de control, se deben dar consideraciones para que el sistema sea insensible a ruido y perturbaciones externas y sensible a comandos de entrada.

El efecto de la realimentación sobre el ruido y perturbaciones depende grandemente de en qué parte del sistema ocurren las señales exógenas. No se pueden obtener conclusiones generales, pero en muchas situaciones, *la realimentación puede reducir los efectos del ruido y las perturbaciones en el desempeño del sistema.* En referencia al sistema de la Fig. 1-16, en la que r denota la señal de comando y n es la señal de ruido. En ausencia de realimentación, $H = 0$, la salida y debida a n actuando sola es:

▲ La realimentación puede reducir el efecto del ruido.

$$y = G_2 n \qquad (1\text{-}5)$$

Con la presencia de realimentación, la salida del sistema debido a n actuando sola es:

$$y = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H} n \qquad (1\text{-}6)$$

Al comparar la ecuación (1-6) con la (1-5) se observa que la componente de ruido en la salida de la ecuación (1-6) se reduce por el factor $1 + G_1 G_2 H$ si éste último es mayor que la unidad y el sistema permanece estable.

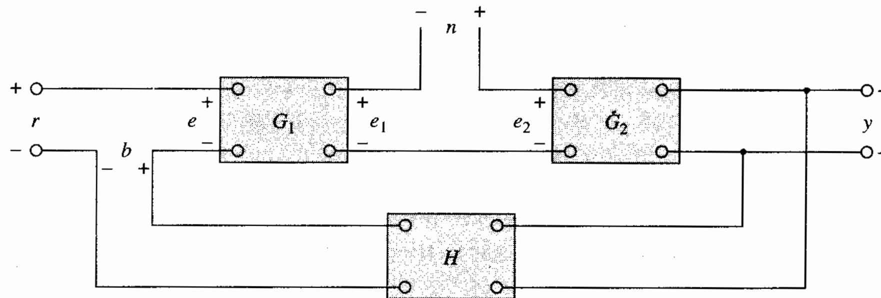


Figura 1-16 Sistema realimentado con una señal de ruido.

▲ La realimentación también puede afectar el ancho de banda, la impedancia y las respuestas transitorias y en frecuencia.

En el Cap. 10 las configuraciones de controladores prealimentados y en la trayectoria directa se utilizan junto con la realimentación para reducir los efectos de las perturbaciones y el ruido. En general, la realimentación también tiene efectos sobre el ancho de banda, la impedancia, la respuesta transitoria y la respuesta en frecuencia. Estos efectos se verán más adelante.

1-3 Tipos de sistemas de control realimentados

Los sistemas de control realimentados se pueden clasificar en diversas formas, dependiendo del propósito de la clasificación. Por ejemplo, de acuerdo con el método de análisis y diseño, los sistemas de control se clasifican en **lineales** y **no lineales, variantes con el tiempo** o **invariantes con el tiempo.** De acuerdo con los tipos de señales usados en el sistema, se hace referencia a sistemas en **tiempo continuo** y en **tiempo discreto,** o sistemas **modulados** y **no modulados.** A menudo, los sistemas de control se clasifican de acuerdo con su propósito principal. Por ejemplo, un **sistema de control de posición** y un **sistema de control de velocidad** controlan las variables de salida de acuerdo con la forma como su nombre lo indica. En el Cap. 7 el **tipo** de un sistema de control se define de acuerdo con la forma de la función de transferencia en lazo abierto. En general, existen muchas formas de identificar un sistema de control de acuerdo con alguna función especial del sistema. Es importante que algunas de estas formas comunes de clasificar a los sistemas de control sean conocidas para obtener una perspectiva propia antes de embarcarse en su análisis y diseño.

1-3-1 Sistemas de control lineales *vs.* no lineales

▲ La mayoría de los sistemas de la vida real tienen características no lineales.

Esta clasificación está hecha de acuerdo con los métodos de análisis y diseño. Estrictamente hablando, los sistemas lineales no existen en la práctica, ya que todos los sistemas físicos son no lineales en algún grado. Los sistemas de control realimentados son modelos ideales fabricados por el analista para simplificar el análisis y diseño. Cuando las magnitudes de las señales en un sistema de control están limitadas en intervalos en los cuales los componentes del

sistema exhiben una característica lineal (*i.e.*, se aplica el principio de superposición), el sistema es esencialmente lineal. Pero cuando las magnitudes de las señales se extienden más allá del intervalo de porción lineal, dependiendo de la severidad de la no linealidad, el sistema no se debe seguir considerando lineal. Por ejemplo, los amplificadores usados en los sistemas de control a menudo exhiben un efecto de saturación cuando la señal de entrada es muy grande; el campo magnético de un motor normalmente tiene propiedades de saturación. Otros efectos no lineales que se encuentran en sistemas de control son el juego entre dos engranes acoplados, la característica de resorte no lineal, la fuerza de fricción no lineal o par entre dos miembros móviles, etc. Muy a menudo las características no lineales son introducidas en forma intencional en un sistema de control para mejorar su desempeño o proveer un control más efectivo. Por ejemplo, para alcanzar un control de tiempo mínimo, un tipo de controlador prendido-apagado (relevador) se emplea en muchos misiles o sistemas de control de naves espàciales. Típicamente en estos sistemas, los motores de reacción están a los lados del vehículo para producir un par de reacción para control de altitud. Estos motores de reacción son controlados en una forma o totalmente prendidos o totalmente apagados, por lo que una cantidad fija de aire es aplicada desde un motor de reacción dado durante cierto tiempo para controlar la altitud del vehículo espacial.

Para sistemas lineales, existe una gran cantidad de técnicas analíticas y gráficas para fines de diseño y análisis. La mayoría del material en este libro está enfocado al análisis y diseño de sistemas lineales. Por otro lado, los sistemas no lineales son difíciles de tratar en forma matemática, y no existen métodos generales disponibles para resolver una gran variedad de clases de sistemas no lineales. En el diseño de sistemas de control, es práctico, primero diseñar el controlador con base en un modelo de un sistema lineal despreciando las no linealidades del sistema. Entonces, el controlador diseñado se aplica al modelo del sistema no lineal para su evaluación o rediseño mediante simulación en computadora.

▲ No hay métodos generales para resolver una amplia clase de sistemas no lineales.

1-3-2 Sistemas invariantes con el tiempo *vs.* variantes con el tiempo

Cuando los parámetros del sistema de control son estacionarios con respecto al tiempo durante la operación del sistema, el sistema se denomina **sistema invariante con el tiempo.** En la práctica, la mayoría de los sistemas físicos contienen elementos que derivan o varían con el tiempo. Por ejemplo, la resistencia de la bobina de un motor eléctrico variará cuando el motor es excitado por primera vez y su temperatura está aumentando. Otro ejemplo de un sistema variante es el sistema de control de un misil guiado en el cual la masa del misil decrece a medida que el combustible a bordo se consume durante el vuelo. Aunque un sistema variante en el tiempo sin no linealidades es aún un sistema lineal, el análisis y diseño de esta clase de sistemas son mucho más complejos que los de un **sistema lineal invariante con el tiempo.**

Sistemas de control en tiempo continuo

Un **sistema en tiempo continuo** es aquel en el que las señales en varias partes del sistema son todas funciones de la variable continua tiempo t. Entre todos los sistemas de control en tiempo continuo, las señales se pueden clasificar posteriormente como de ca o cd. A diferencia de la definición general de señales de ca y cd utilizadas en ingeniería eléctrica, los **sistemas de**

control de ca y **cd** tienen un significado especial en la terminología de sistemas de control. Cuando se hace referencia a un sistema de control de ca, usualmente significa que las señales en el sistema están *moduladas* según algún esquema de modulación. Por otro lado, cuando se hace referencia a un sistema de control de cd, no significa que todas las señales en el sistema sean unidireccionales; entonces no habría movimientos de control correctivo. Un **sistema de control de cd** simplemente implica que las señales *no son moduladas*, pero aún son señales de ca de acuerdo con la definición anterior. El esquema de un sistema de control en lazo cerrado se presenta en la Fig. 1-17. Las formas de ondas típicas de las señales en respuesta a una función escalón de entrada se muestran en la figura. Los componentes típicos de un sistema de control de cd son potenciómetros, amplificadores de cd, motores de cd, tacómetros de cd, etcétera.

El esquema de un **sistema de control de ca** que desempeña esencialmente la misma tarea que el de la Fig. 1-17 se presenta en la Fig. 1-18. En este caso, las señales en el sistema están moduladas; esto es, la información se transmite mediante una señal portadora de ca. Observe que la variable controlada-salida permanece aún similar a la del sistema de cd. En este caso, las señales moduladas son demoduladas por la característica de paso bajo del motor de ca. Los sistemas de control de ca se utilizan en una forma extensa en aeronaves y sistemas de control de misiles, en los que el ruido y las perturbaciones a menudo crean problemas. Al utilizar sistemas de control de ca modulados con una portadora de 400 Hz o mayor, el sistema será menos susceptible a ruido de baja frecuencia. Los componentes típicos de un sistema de control de ca son: sincros, amplificadores de ca, motores de ca, giroscopios, acelerómetros, etcétera.

En la práctica, no todos los sistemas de control son estrictamente de cd o ca. Un sistema puede incorporar una mezcla de componentes de ca y cd, empleando moduladores y demoduladores para acoplar las señales en varios puntos del sistema.

Sistemas de control en tiempo discreto

Los **sistemas de control en tiempo discreto** difieren de los sistemas de control en tiempo continuo en que las señales en uno o más puntos del sistema son, ya sea en la forma de pulsos

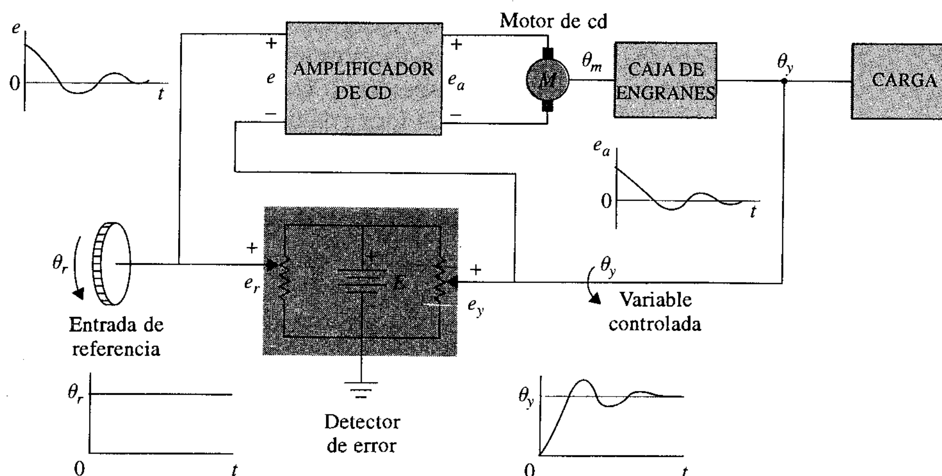


Figura 1-17 Diagrama de un sistema típico de cd en lazo cerrado.

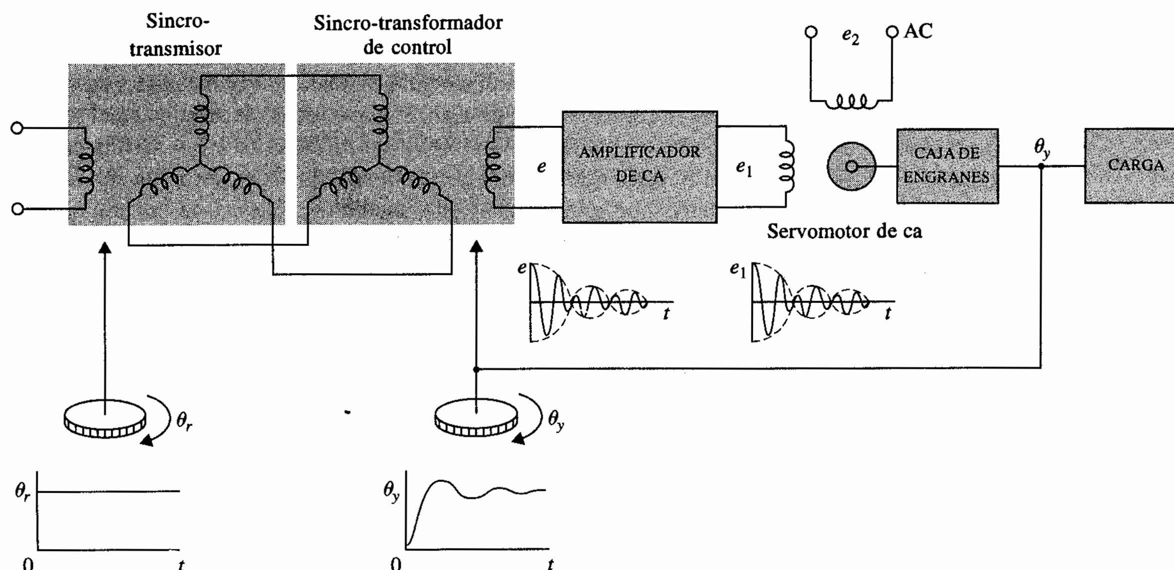


Figura 1-18 Diagrama de un sistema de control de ca típico en lazo cerrado.

o un código digital. Normalmente, los sistemas en tiempo discreto se subdividen en **sistemas de control de datos muestreados** y **sistemas de control digital**. Los sistemas de control de datos muestreados se refieren a una clase más general de sistemas en tiempo discreto en los que las señales están en la forma de pulsos de datos. Un sistema de control digital se refiere al uso de una computadora o controlador digital en el sistema, de tal forma que las señales están en código digital, tal como un código binario. Por ejemplo, el sistema de control de la rueda de impresión mostrada en la Fig. 1-13 es un sistema de control digital típico, ya que el microprocesador recibe y envía datos digitales.

En general, un sistema de datos muestreados recibe datos o información sólo en forma intermitente en instantes específicos. Por ejemplo, la señal de error en un sistema de control se puede proporcionar en la forma de pulsos, en cuyo caso el sistema de control no recibe información acerca del error durante los periodos entre dos pulsos consecutivos. Estrictamente, un sistema de datos muestreados también se puede clasificar como un sistema de ca, ya que la señal del sistema está modulada por pulsos.



Figura 1-19 Diagrama de bloques de un sistema de control de datos muestreados.

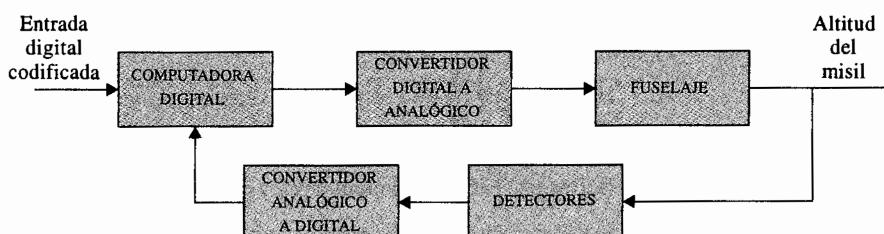


Figura 1-20 Sistema de autopiloto digital para un misil guiado.

La Fig. 1-19 ilustra cómo funciona un sistema de datos muestreados. Una señal continua de entrada $r(t)$ es aplicada al sistema. La señal de error $e(t)$ es muestreada por un dispositivo de muestreo, el **muestreador,** cuya salida es una secuencia de pulsos. La velocidad de muestreo puede o no ser uniforme. Existen muchas ventajas al incorporar muestreo en un sistema de control. Una de ellas es que el costoso equipo que se utiliza en el sistema puede ser compartido en tiempo entre varios canales de control. Otra ventaja es que los datos en la forma de pulsos son menos susceptibles a ruido.

▲ Normalmente, los sistemas de control digital son menos susceptibles al ruido.

Debido a que las computadoras digitales proveen ciertas ventajas en tamaño y flexibilidad, el control por computadora se ha hecho muy popular en los últimos años. Muchos sistemas de aeronaves contienen controladores digitales que a su vez contienen miles de elementos discretos en un espacio no mayor que el tamaño de este libro. La Fig. 1-20 muestra los elementos básicos de un autopiloto digital para el control de un misil guiado.

1-4 Resumen

En este capítulo se introdujeron algunos de los conceptos básicos de lo que es un sistema de control y cuál es su tarea. Se describieron los componentes básicos de un sistema de control. Para demostrar los efectos de la realimentación en una forma rudimentaria, se clarificaron las preguntas de por qué la mayoría de los sistemas son en lazo cerrado. Lo más importante es que la realimentación es una arma de dos filos, puede beneficiar así como dañar a un sistema de control. Estos puntos son las tareas y retos en el diseño de un sistema de control, el cual involucra consideraciones sobre criterios de desempeño como la estabilidad, sensibilidad, ancho de banda y exactitud. Finalmente, los varios tipos de sistemas de control se clasificaron de acuerdo con las señales que manejan, linealidad y objetivos del control. Se dieron varios ejemplos para ilustrar los puntos importantes en el análisis y diseño de sistemas de control. Se apuntó el hecho de que la mayoría de los sistemas que se encuentran en la vida real, son, de alguna manera, no lineales y variantes con el tiempo. La idea de concentrar el estudio a sistemas lineales es debido, en primera instancia, a la disponibilidad de métodos analíticos unificados y fáciles de entender para el análisis y diseño de sistemas lineales.

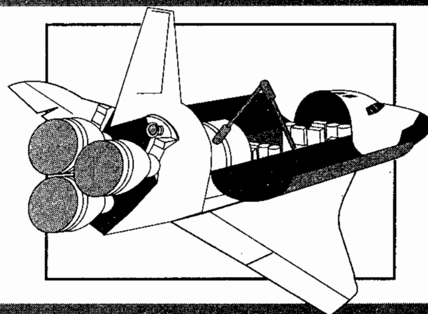
Preguntas de repaso

1. Haga una lista de las ventajas y desventajas de un sistema en lazo abierto.
2. Haga una lista de las ventajas y desventajas de un sistema en lazo cerrado.
3. Defina un sistema de control de ca y cd.
4. Establezca las ventajas de un sistema de control digital sobre un sistema de control en tiempo continuo.
5. Normalmente, un sistema de control en lazo cerrado es más exacto que uno en lazo abierto. (V) (F)
6. Algunas veces, la realimentación se utiliza para mejorar la sensibilidad de un sistema de control. (V) (F)
7. Si un sistema en lazo abierto es inestable, al aplicar realimentación siempre se mejora su estabilidad. (V) (F)
8. La realimentación puede incrementar la ganancia del sistema en un intervalo de frecuencias y disminuirla en otro. (V) (F)
9. Algunas veces, elementos no lineales se introducen intencionalmente en un sistema de control para mejorar su desempeño. (V) (F)
10. Los sistemas en tiempo discreto son más susceptibles a ruido, debido a la naturaleza de sus señales. (V) (F)

Respuestas a las preguntas de falso y verdadero

5. (V) **6.** (V) **7.** (F) **8.** (V) **9.** (V) **10.** (F)

2 Fundamentos matemáticos



PALABRAS CLAVE Y TEMAS

- ▲ Variables complejas
- ▲ Transformada de Laplace
- ▲ Expansión en fracciones parciales
- ▲ Ecuaciones diferenciales
- ▲ Ecuaciones de estado
- ▲ Ecuaciones en diferencias
- ▲ Teoría de matrices
- ▲ Transformada *z*

2-1 Introducción

Los estudios de los sistemas de control dependen fuertemente del uso y aplicación de las matemáticas. Uno de los propósitos principales de los estudios de sistemas de control, es desarrollar un conjunto de herramientas analíticas, de tal forma que el diseñador pueda llegar a diseños razonablemente predecibles y confiables, sin depender por completo de la experimentación o de una extensa simulación en computadora.

Para el estudio de la teoría clásica de control, que representa una buena parte de este libro, los antecedentes matemáticos requeridos incluyen temas tales como la **teoría de la variable compleja, ecuaciones diferenciales y en diferencias, transformada de Laplace y transformada *z*,** etcétera. Por otro lado, la teoría de control moderna requiere de un mayor apoyo matemático. Además de los temas anteriormente citados, la teoría de control moderna

basada en la **teoría de matrices, teoría de conjuntos, álgebra lineal y transformación lineal, cálculo variacional, programación matemática, teoría de probabilidades,** y otras matemáticas avanzadas.

En este capítulo se presenta el material de apoyo necesario para la discusión de los temas de sistemas de control que se presentan en este libro. Debido a limitaciones de espacio y al hecho de que la mayoría de los temas están considerados como repaso para el lector, el tratamiento de estos temas matemáticos no es exhaustivo. El lector que desee adentrarse más en este campo, se le remite a los libros dedicados a cada tema.

2-2 Concepto de variable compleja

2-2-1 Variable compleja

Una variable compleja s tiene dos componentes: una componente real σ y una imaginaria ω. En forma gráfica, la componente real de s está representada por el eje σ en la dirección horizontal y la componente imaginaria se mide a lo largo del eje vertical $j\omega$, en el plano complejo s. La Fig. 2-1 ilustra el plano complejo s, en donde cualquier punto arbitrario $s = s_1$ está definido por las coordenadas $\sigma = \sigma_1$, y $\omega = \omega_1$, o simplemente $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$.

2-2-2 Funciones de una variable compleja

Se dice que la función $G(s)$ es una función de la variable compleja s, si para cada valor de s existen uno o más valores correspondientes de $G(s)$. Debido a que s se define con partes real e imaginaria, la función $G(s)$ también está representada por sus partes real e imaginaria:

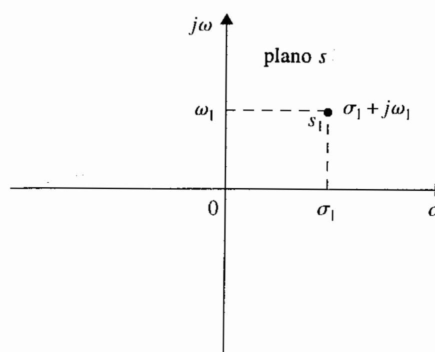


Figura 2-1 Plano complejo s.

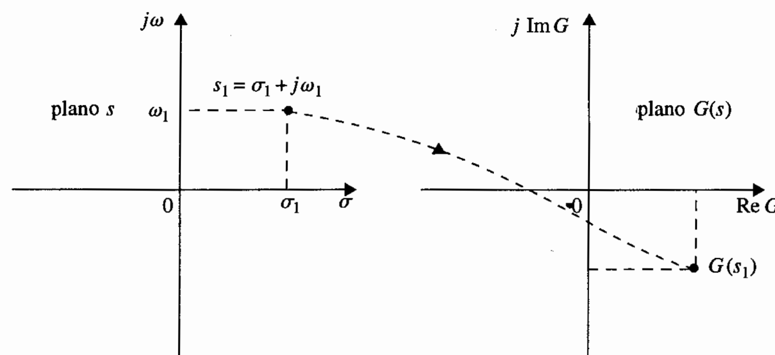


Figura 2-2 Mapeo de valores simples desde el plano s al plano $G(s)$.

esto es:

$$G(s) = \text{Re}\, G(s) + j\, \text{Im}\, G(s) \tag{2-1}$$

donde Re $G(s)$ denota la parte real de $G(s)$ e Im $G(s)$ representa la parte imaginaria de $G(s)$. La función $G(s)$ también está representada mediante el plano complejo $G(s)$, con Re $G(s)$ como el eje real e Im $G(s)$ como el imaginario. Si para cada valor de s existe sólo un valor correspondiente de $G(s)$ en el plano $G(s)$, se dice que $G(s)$ es una **función univaluada,** y el mapeo de los puntos en el plano s dentro de los puntos en el plano $G(s)$ se describe como un **solo valor** (Fig. 2-2). Si el mapeo desde el plano $G(s)$ al plano s también es un valor sencillo, el mapeo se denomina **uno a uno.** Sin embargo, existen muchas funciones cuyo mapeo desde el plano de función al plano de la variable compleja no es un solo valor. Por ejemplo, dada la siguiente función:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \tag{2-2}$$

es aparente que para cada valor de s, existe sólo un valor correspondiente para $G(s)$. Sin embargo, para el mapeo inverso esto no es verdad, por ejemplo, el punto $G(s) = \infty$ está mapeado en dos puntos, $s = 0$ y $s = -1$, en el plano s.

2-2-3 Función analítica

*Una función $G(s)$ de una variable compleja s se llama **función analítica** en una región del plano s si la función y todas sus derivadas existen en dicha región.* Por ejemplo, la función dada en la ecuación (2-2) es analítica en cada punto en el plano s, excepto en los puntos $s = 0$ y $s = -1$. En estos dos puntos, el valor de la función es infinita. Como otro ejemplo, la función $G(s) = s + 2$ es analítica en cada punto en el plano s finito.

2-2-4 Singularidades y polos de una función

Las **singularidades** de una función son los puntos en el plano s en donde la función o sus derivadas no existen. Un **polo** es el tipo más común de singularidad y juega un papel muy importante en los estudios de la teoría de control clásica.

La definición de un polo se puede enunciar como: *Si una función $G(s)$ es analítica y univaluada, en la vecindad de s_i, se dice que tiene un polo de orden r en $s = s_i$, si el límite*

$$\lim_{s \to s_i} [(s - s_i)^r G(s)]$$

tiene un valor finito diferente de cero. En otras palabras, el denominador de $G(s)$ debe incluir el factor $(s - s_i)^r$, por lo que cuando $s = s_i$, la función se vuelve infinita. Si $r = 1$, el polo en $s = s_i$ se llama un **polo sencillo.** Como un ejemplo, la función

$$G(s) = \frac{10(s+2)}{s(s+1)(s+3)^2} \tag{2-3}$$

tiene un polo de orden 2 en $s = -3$ y polos sencillos en $s = 0$ y $s = -1$. También se puede decir que la función $G(s)$ es analítica en el plano s, excepto en estos polos.

2-2-5 Ceros de una función

La definición de un **cero** de una función se puede enunciar como: *Si la función $G(s)$ es analítica en $s = s_i$, se dice que tiene un cero de orden r en $s = s_i$, si el límite*

$$\lim_{s \to s_i} [(s - s_i)^{-r} G(s)]$$

▲ Los números totales de polos y de ceros de una función racional son iguales, contando los que están en el infinito.

tiene un valor finito diferente de cero. O, simplemente, $G(s)$ tiene un cero de orden r en $s = s_i$, si $1/G(s)$ tiene un polo de orden r en $s = s_i$. Por ejemplo, la función de la ecuación (2-3) tiene un cero sencillo en $s = -2$.

Si la función que se considera es una función racional de s, esto es, un cociente de dos polinomios en s, el número total de polos es igual al número total de ceros, al contar los polos y ceros de orden múltiple, y al tomar en cuenta los polos y ceros en el infinito. La función de la ecuación (2-3) tiene cuatro polos finitos en $s = 0$, -1, -3 y -3; existe un cero finito en $s = -2$, pero hay tres ceros infinitos, ya que:

$$\lim_{s \to \infty} G(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{10}{s^3} = 0 \tag{2-4}$$

Por tanto, la función tiene un total de cuatro polos y cuatro ceros en el plano s, incluyendo los que están en el infinito.

2-3 Ecuaciones diferenciales

2-3-1 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

Una gran variedad de sistemas en ingeniería se modelan matemáticamente mediante ecuaciones diferenciales. Estas ecuaciones generalmente involucran derivadas e integrales de variables dependientes con respecto a la variable independiente. Por ejemplo, un circuito eléctrico *RLC* en serie (resistencia–inductancia–capacitancia) se puede representar por la ecuación diferencial:

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = e(t) \tag{2-5}$$

en donde R es la resistencia, L la inductancia, C la capacitancia, $i(t)$ la corriente en la red y $e(t)$ el voltaje aplicado. En este caso, $e(t)$ es la función de excitación, t la variable independiente e $i(t)$ la variable dependiente o desconocida que será determinada al resolver la ecuación diferencial.

La ecuación (2-5) se denomina como una ecuación diferencial de segundo orden, y se hace referencia al sistema como un **sistema de segundo orden.** Estrictamente hablando, la ecuación (2-5) se debe nombrar como una ecuación integrodiferencial, ya que involucra una integral.

En general, la ecuación diferencial de un sistema de n-ésimo orden se escribe como:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t) \tag{2-6}$$

que también se conoce como **ecuación diferencial ordinaria lineal** si los coeficientes a_0, a_1, . . . , a_{n-1} no son funciones de $y(t)$.

En este libro, debido a que se trata sólo con sistemas de parámetros concentrados, todas las ecuaciones diferenciales son del tipo ordinario. Para sistemas con parámetros distribuidos, tales como los sistemas de transferencia de calor, se emplean las ecuaciones en derivadas parciales.

2-3-2 Ecuaciones diferenciales no lineales

Muchos sistemas físicos son no lineales y se deben describir mediante ecuaciones diferenciales no lineales. Por ejemplo, la ecuación diferencial que describe el movimiento de un péndulo que se muestra en la Fig. 2-3 es:

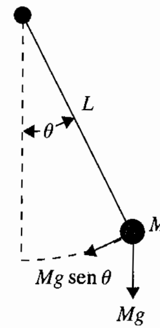


Figura 2-3 Péndulo simple.

$$ML\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + Mg \operatorname{sen} \theta(t) = 0 \tag{2-7}$$

Ya que $\theta(t)$ aparece con una función seno, la ecuación (2-7) es no lineal, y el sistema se conoce como **sistema no lineal.**

2-3-3 Ecuaciones diferenciales de primer orden: Ecuaciones de estado

En general, una ecuación diferencial de n-ésimo orden se puede descomponer en n ecuaciones diferenciales de primer orden. Ya que, en principio, las ecuaciones diferenciales de primer orden son más fáciles de resolver que otras de orden más alto, existen razones por las que las ecuaciones diferenciales de primer orden se emplean en los estudios analíticos de sistemas de control.

Para la ecuación diferencial de la ecuación (2-5), se tiene:

$$x_1(t) = \int i(t)\, dt \tag{2-8}$$

y

$$x_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = i(t) \tag{2-9}$$

La ecuación (2-5) se descompone en las siguientes dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \tag{2-10}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{LC}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}e(t) \tag{2-11}$$

En forma similar, para la ecuación (2-6), se define:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= y(t) \\
x_2(t) &= \frac{dy(t)}{dt} \\
&\vdots \\
x_n(t) &= \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}
\end{aligned}
\qquad (2\text{-}12)
$$

Entonces la ecuación diferencial de n-ésimo orden se descompone en n ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) \\
\frac{dx_2(t)}{dt} &= x_3(t) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n(t)}{dt} &= -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - \cdots - a_{n-2}x_{n-1}(t) - a_{n-1}x_n(t) + f(t)
\end{aligned}
\qquad (2\text{-}13)
$$

Observe que la última ecuación se obtiene al igualar el término de la derivada de mayor orden en la ecuación (2-6) con el resto de los términos. En la teoría de los sistemas de control, el conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden de la ecuación (2-13) se conoce como **ecuaciones de estado,** y $x_1, x_2, \ldots, x_n$, son llamadas **variables de estado.**

Definición de las variables de estado

▲ El estado de un sistema se refiere al pasado, presente y futuro del sistema.

El **estado** de un sistema se refiere a las condiciones **pasadas, presentes** y **futuras** del sistema. Desde un sentido matemático, es conveniente definir un conjunto de **variables de estado** y **ecuaciones de estado** para modelar sistemas dinámicos. Las variables $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ definidas en la ecuación (2-12) son las variables de estado de un sistema de n-ésimo orden descrito por la ecuación (2-6), y las n ecuaciones diferenciales de primer orden son las ecuaciones de estado. En general, existen algunas reglas básicas relacionadas con la definición de una variable de estado y lo que constituye una ecuación de estado. Las variables de estado deben satisfacer las siguientes condiciones:

▲ Las variables de estado deben siempre ser un conjunto mínimo.

1. En cualquier tiempo inicial $t = t_0$, las variables de estado $x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0)$ definen los **estados iniciales** del sistema.

2. Una vez que las entradas del sistema para $t \geq t_0$ y los estados iniciales antes definidos son especificados, las variables de estado deben definir completamente el comportamiento futuro del sistema.

Las variables de estado de un sistema se definen como un ***conjunto mínimo*** *de variables* $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, *de cuyo conocimiento en cualquier tiempo* t_0, *y del conocimiento de la información de la entrada de excitación que se aplica subsecuentemente, son suficientes para determinar el estado del sistema en cualquier tiempo* $t > t_0$.

Ecuaciones de salida

▲ La salida de un sistema debe ser siempre medible.

No se deben confundir las variables de estado con las salidas de un sistema. Una salida de un sistema es una variable que puede ser **medida,** pero una variable de estado no siempre satisface este requerimiento. Por ejemplo, en un motor eléctrico, las variables de estado como el flujo de corriente, la velocidad del rotor y el desplazamiento se pueden medir físicamente, y estas variables califican como variables de salida. Por otra parte, el flujo magnético también se puede considerar como una variable de estado en un motor eléctrico, ya que representa el estado pasado, presente y futuro del motor, pero no puede ser medido directamente durante el funcionamiento, y por tanto, no califica como una variable de salida. En general, una variable de salida se puede expresar como una combinación algebraica de las variables de estado. Para el sistema descrito por la ecuación (2-6), si $y(t)$ se designa como la salida, la ecuación de salida es $y(t) = x_1(t)$.

2-4 Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una de las herramientas matemáticas utilizadas para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. En comparación con el método clásico de resolución de ecuaciones diferenciales lineales, la transformada de Laplace tiene dos características atractivas.

1. La solución de la ecuación homogénea y la solución particular se obtienen en una sola operación.
2. La transformada de Laplace convierte la ecuación diferencial en una ecuación algebraica en s. Entonces es posible manipular la ecuación algebraica mediante reglas algebraicas simples, para obtener la solución en el dominio s. La solución final se obtiene tomando la transformada inversa de Laplace.

2-4-1 Definición de la transformada de Laplace

Dada la función real $f(t)$ que satisface la condición:

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-\sigma t}|\,dt < \infty \tag{2-14}$$

para alguna σ real finita, la transformada de Laplace de $f(t)$ se define como:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \tag{2-15}$$

o

$$F(s) = \text{transformada de Laplace de } f(t) = \mathcal{L}[f(t)] \tag{2-16}$$

▲ La respuesta de un sistema causal no precede a la entrada.

La variable s se denomina el **operador de Laplace,** que es una variable compleja; esto es, $s = \sigma + j\omega$. La ecuación (2-15) también se conoce como **transformada de Laplace unilateral,** ya que la integral se evalúa desde $t = 0$ hasta ∞. Esto simplemente significa que toda la información contenida en $f(t)$ antes de $t = 0$ se ignora o se considera cero. Esta suposición no implica ninguna limitante en las aplicaciones de la transformada de Laplace a problemas de sistemas lineales, ya que en los estudios en el dominio del tiempo, la referencia de tiempo se escoge a menudo en $t = 0$. Además, para un sistema físico cuando una entrada se aplica en $t = 0$, la respuesta del sistema no comienza antes que $t = 0$; esto es, la respuesta no precede a la excitación. Tal sistema es también conocido como **causal** o simplemente, **físicamente realizable.**

Estrictamente, la transformada de Laplace unilateral se debe definir desde $t = 0^-$ hasta $t = \infty$. El símbolo $t = 0^-$ implica que el límite de $t \to 0$ se toma por la izquierda de $t = 0$. Este proceso limita situaciones en donde la función $f(t)$ no es continua o tiene un impulso en $t = 0$. Para los temas tratados en este libro, la ecuación que define la transformada de Laplace en la ecuación (2-15) se utiliza rara vez en la solución de un problema, ya que las expresiones de transformadas que se utilizan ya están dadas o se pueden encontrar en la tabla de transformadas de Laplace. Por tanto, el punto fino al utilizar 0^- o 0^+ nunca se necesita especificar. Por sencillez, simplemente se utilizará $t = 0$ o $t = t_0$ como el tiempo inicial en todas las discusiones subsecuentes.

El siguiente ejemplo ilustra cómo se utiliza la ecuación (2-15) para evaluar la transformada de Laplace de $f(t)$.

Ejemplo 2-1

Sea $f(t)$ una función escalón unitario que se define como:

$$f(t)\begin{cases} u_s(t) = 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{2-17}$$

La transformada de Laplace de $f(t)$ se obtiene como:

$$F(s) = \mathscr{L}[u_s(t)] = \int_0^\infty u_s(t)e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s} \tag{2-18}$$

La ecuación (2-18) es válida si:

$$\int_0^\infty |u_s(t)e^{-\sigma t}|\,dt = \int_0^\infty |e^{-\sigma t}|\,dt < \infty \tag{2-19}$$

lo que significa que la parte real de s, σ, debe ser mayor a cero. En la práctica, a la transformada de Laplace de la función escalón unitario se le indica simplemente como $1/s$, y rara vez uno se tiene que preocupar por la región en el plano s en donde la integral de la transformada converge absolutamente. ▲

Ejemplo 2-2

Considere la función exponencial:

$$f(t) = e^{-\alpha t} \qquad t \geq 0 \tag{2-20}$$

donde α es una constante real. La transformada de Laplace de $f(t)$ se escribe como:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}e^{-st}\,dt = \frac{e^{-(s+\alpha)t}}{s+\alpha}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s+\alpha} \tag{2-21}$$

▲

2-4-2 Transformada inversa de Laplace

Dada la transformada de Laplace $F(s)$, la operación para obtener $f(t)$ se denomina como la **transformada inversa de Laplace** que se denota por:

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] \tag{2-22}$$

La integral de la transformada inversa de Laplace se representa como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}\,ds \tag{2-23}$$

en donde c es una constante real que es mayor que las partes reales de todas las singularidades de $F(s)$. La ecuación (2-23) representa una integral de línea que se evalúa en el plano s. Para funciones simples, la operación de la transformada inversa de Laplace se puede llevar a cabo simplemente refiriéndose a la tabla de transformadas de Laplace, tal como la que se presenta en el Apéndice B. Para funciones complejas, la transformada inversa de Laplace se puede obtener, primero realizando una expansión en fracciones parciales (Sec. 2-5) de $F(s)$ y después se utiliza la tabla de transformadas. Un programa de computadora, tal como el **pfe,** de las herramientas de **CSAD** en conjunto con **MATLAB** también se pueden utilizar para la expansión en fracciones parciales/inversa de la transformada de Laplace. Encontrará mayores detalles sobre lo anterior en la Sec. 2-5.

2-4-3 Teoremas importantes de la transformada de Laplace

Las aplicaciones de la transformada de Laplace, en muchos casos se simplifican al emplear las propiedades de la transformada. Estas propiedades se presentan con los siguientes teoremas, para los cuales no se da ninguna prueba.

▲ **Teorema 1.** *Multiplicación por una constante*

Sea k una constante y $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$. Entonces:

$$\mathscr{L}[kf(t)] = kF(s) \tag{2-24}$$

▲ **Teorema 2.** *Suma y resta*

Sean $F_1(s)$ y $F_2(s)$ las transformadas de Laplace de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, respectivamente. Entonces:

$$\mathscr{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s) \tag{2-25}$$

▲ **Teorema 3.** *Diferenciación*

Sea $F(s)$ la transformada de Laplace de $f(t)$, y $f(0)$ es el límite de $f(t)$, cuando t tiende a 0. La transformada de Laplace de la derivada con respecto al tiempo de $f(t)$ es:

$$\mathscr{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - \lim_{t\to 0} f(t) = sF(s) - f(0) \tag{2-26}$$

En general, para las derivadas de orden superior de $f(t)$,

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \lim_{t\to 0}\left[s^{n-1}f(t) + s^{n-2}\frac{df(t)}{dt} + \cdots + \frac{d^{n-1}f(t)}{dt^{n-1}}\right]$$
$$= s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \qquad (2\text{-}27)$$

en donde $f^{(i)}(0)$ denota la derivada de i-ésimo orden de $f(t)$ con respecto a t, evaluada en $t = 0$.

▲ **Teorema 4.** *Integración*

La transformada de Laplace de la primera integral de $f(t)$ con respecto al tiempo, es la transformada de Laplace de $f(t)$ dividida entre s, esto es:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} \qquad (2\text{-}28)$$

Para la integración de n-ésimo orden:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\cdots\int_0^{t_n} f(\tau)\,d\tau\,dt_1\,dt_2\cdots dt_{n-1}\right] = \frac{F(s)}{s^n} \qquad (2\text{-}29)$$

▲ **Teorema 5.** *Traslación en el tiempo*

La transformada de Laplace de $f(t)$ retrasada un tiempo T es igual a la transformada de Laplace de $f(t)$ multiplicada por e^{-Ts}; esto es:

$$\mathcal{L}[f(t-T)u_s(t-T)] = e^{-Ts}F(s) \qquad (2\text{-}30)$$

en donde $u_s(t - T)$, denota la función escalón unitario que está desplazada en tiempo a la derecha por T.

▲ **Teorema 6.** *Teorema del valor inicial*

Si la transformada de Laplace de $f(t)$ es $F(s)$, entonces:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \qquad (2\text{-}31)$$

si el límite existe.

▲ **Teorema 7.** *Teorema del valor final*

▲ El teorema del valor final es válido sólo si $sF(s)$ no tiene polos sobre el eje $j\omega$ o en el semiplano derecho del plano s.

Si la transformada de Laplace de $f(t)$ es $F(s)$, y si $sF(s)$ es analítica sobre el eje imaginario y en el semiplano derecho del plano s, entonces:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{2-32}$$

El teorema del valor final es muy útil para el análisis y diseño de sistemas de control, ya que proporciona el valor final de una función de tiempo mediante el conocimiento del comportamiento de su transformada de Laplace en $s = 0$. El teorema del valor final *no* es válido si $sF(s)$ contiene algún polo cuya parte real es cero o positiva, lo que equivale al requisito de que $sF(s)$ sea analítica en el semiplano derecho como se especifica en el enunciado del teorema. Los siguientes ejemplos ilustran el cuidado que debe tomarse en la aplicación de este teorema.

Ejemplo 2-3

Considere la función:

$$F(s) = \frac{5}{s(s^2 + s + 2)} \tag{2-33}$$

Debido a que $sF(s)$ es analítica sobre el eje imaginario y en el semiplano derecho del plano s, el teorema del valor final puede ser aplicado. Utilizando la ecuación (2-32), se tiene:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \frac{5}{s^2 + s + 2} = \frac{5}{2} \tag{2-34}$$

▲

Ejemplo 2-4

Considere la función:

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \tag{2-35}$$

lo cual es la transformada de Laplace de $f(t) = \text{sen}\ \omega t$. Debido a que la función $sF(s)$ tiene dos polos sobre el eje imaginario del plano s, en este caso el teorema del valor final *no* puede ser aplicado. En otras palabras, aún cuando el teorema del valor final pudiese arrojar un valor cero como el valor final de $f(t)$, el resultado es erróneo. ▲

▲ **Teorema 8.** *Traslación compleja*

La transformada de Laplace de $f(t)$ multiplicada por $e^{\mp\alpha t}$, donde α es una constante, es igual a la transformada de Laplace $F(s)$, con s remplazada por $s \pm \alpha$; esto es:

$$\mathcal{L}[e^{\mp\alpha t} f(t)] = F(s \pm \alpha) \tag{2-36}$$

▲ **Teorema 9.** *Convolución real (multiplicación compleja)*

Sean $F_1(s)$ y $F_2(s)$ las transformadas de Laplace de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, respectivamente, y que $f_1(t) = 0$, $f_2(t) = 0$, para $t < 0$; entonces:

$$\begin{aligned} F_1(s)F_2(s) &= \mathscr{L}[f_1(t) * f_2(t)] \\ &= \mathscr{L}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau\right] = \mathscr{L}\left[\int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau)\,d\tau\right] \end{aligned} \tag{2-37}$$

donde el símbolo "*" denota la **convolución** en el dominio del tiempo.

La ecuación (2-37) muestra que la multiplicación de dos funciones transformadas en el dominio complejo s, es equivalente a la convolución de dos funciones reales correspondientes en t en el dominio de t. Un factor importante por recordar es que *la transformada inversa de Laplace del producto de dos funciones en el dominio de s* ***no*** *es igual al producto de las dos funciones reales correspondientes en el dominio de t*; esto es, en general:

$$\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] \neq f_1(t)f_2(t) \tag{2-38}$$

Existe también una relación dual al teorema de la convolución real, llamada **convolución compleja** o **multiplicación real.** Esencialmente, el teorema establece que la multiplicación en el dominio real de t es equivalente a la convolución en el dominio complejo de s; esto es:

$$\mathscr{L}[f_1(t)f_2(t)] = F_1(s) * F_2(s) \tag{2-39}$$

en donde, en este caso, * denota la convolución compleja. Aquí no se proporcionan los detalles de la fórmula de la convolución compleja.

La Tabla 2-1 resume los teoremas de la transformada de Laplace.

2-5 Transformada inversa de Laplace mediante la expansión en fracciones parciales

En la mayoría de los problemas de sistemas de control, la evaluación de la transformada inversa de Laplace no recae en el uso de la integral de inversión de la ecuación (2-23). Más bien, la operación de la transformada inversa de Laplace que involucra funciones racionales se puede realizar mediante el empleo de la tabla de transformadas de Laplace y la expansión en fracciones parciales. Esta última y la búsqueda de la transformada inversa en la tabla de transformadas se pueden realizar a través de programas de computadora.

Tabla 2-1 Teoremas de la transformada de Laplace

Multiplicación por una constante	$\mathscr{L}[kf(t)] = kF(s)$
Suma y resta	$\mathscr{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
Diferenciación	$\mathscr{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$
	$\mathscr{L}\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
	en donde
	$f^{(k)}(0) = \left.\frac{d^kf(t)}{dt^k}\right\vert_{t=0}$
Integración	$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$
	$\mathscr{L}\left[\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\cdots\int_0^{t_n} f(\tau)\,d\tau\,dt_1\,dt_2\cdots dt_{n-1}\right] = \frac{F(s)}{s^n}$
Traslación en tiempo	$\mathscr{L}[f(t-T)u_s(t-T)] = e^{-Ts}F(s)$
Teorema de valor inicial	$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$
Teorema de valor final	$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$ si $sF(s)$ no tiene polos en/o a la derecha del eje imaginario en el plano s
Traslación compleja	$\mathscr{L}[e^{\mp\alpha t}f(t)] = F(s \pm \alpha)$
Convolución real	$F_1(s)F_2(s) = \mathscr{L}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau\right] = \mathscr{L}\left[\int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau)\,d\tau\right] = \mathscr{L}[f_1(t) * f_2(t)]$

2-5-1 Expansión en fracciones parciales

Cuando la solución mediante la transformada de Laplace de una ecuación diferencial es una función racional en s, se puede escribir como:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \tag{2-40}$$

en donde $P(s)$ y $Q(s)$ son polinomios en s. Se supone que el *grado de $P(s)$ en s es mayor que el de $Q(s)$*. El polinomio $P(s)$ se puede escribir como:

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{2-41}$$

en donde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ son coeficientes reales. Los métodos de la expansión en fracciones parciales serán dados para los casos de polos simples, polos de orden múltiple y polos complejos conjugados de $G(s)$.

$G(s)$ Tiene polos simples

Si todos los polos de $G(s)$ son simples y reales, la ecuación (2-40) se puede escribir como:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \cdots (s + s_n)} \tag{2-42}$$

en donde $s_1 \neq s_2 \neq \ldots \neq s_n$. Al aplicar la expansión en fracciones parciales, la ecuación (2-42) se escribe como:

$$G(s) = \frac{K_{s1}}{s + s_1} + \frac{K_{s2}}{s + s_2} + \cdots + \frac{K_{sn}}{s + s_n} \tag{2-43}$$

El coeficiente K_{si} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se determina al multiplicar ambos miembros de la ecuación (2-42) o de la ecuación (2-43) por el factor $(s + s_i)$ y después se hace que s sea igual a $-s_i$. Para encontrar el coeficiente K_{s1}, por ejemplo, se multiplican ambos miembros de la ecuación (2-42) por $(s + s_1)$ y se hace que $s = -s_1$. Por lo que,

$$K_{s1} = \left[(s + s_1)\frac{Q(s)}{P(s)} \right] \Bigg|_{s=-s_1} = \frac{Q(-s_1)}{(s_2 - s_1)(s_3 - s_1) \cdots (s_n - s_1)} \tag{2-44}$$

Ejemplo 2-5

Considere la función:

$$G(s) = \frac{5s + 3}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} \tag{2-45}$$

que se expande en fracciones parciales como:

$$G(s) = \frac{K_{-1}}{s + 1} + \frac{K_{-2}}{s + 2} + \frac{K_{-3}}{s + 3} \tag{2-46}$$

Los coeficientes K_{-1}, K_{-2}, y K_{-3} se determinan como sigue:

$$K_{-1} = [(s + 1)X(s)]|_{s=-1} = \frac{5(-1) + 3}{(2 - 1)(3 - 1)} = -1 \tag{2-47}$$

$$K_{-2} = [(s + 2)X(s)]|_{s=-2} = \frac{5(-2) + 3}{(1 - 2)(3 - 2)} = 7 \tag{2-48}$$

$$K_{-3} = [(s + 3)X(s)]|_{s=-3} = \frac{5(-3) + 3}{(1 - 3)(2 - 3)} = -6 \tag{2-49}$$

Por lo que la ecuación (2-46) se convierte en:

$$G(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{7}{s+2} - \frac{6}{s+3} \tag{2-50}$$

▲

$G(s)$ Tiene polos de orden múltiple

Si r de los n polos de $G(s)$ son idénticos, o se dice que el polo en $s = -s_i$ es de multiplicidad r, $G(s)$ se escribe:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\cdots(s+s_{n-r})(s+s_i)^r} \tag{2-51}$$

$(i \neq 1, 2, \ldots, n-r)$. Entonces $G(s)$ se puede expandir como:

$$\begin{aligned} G(s) = {} & \frac{K_{s1}}{s+s_1} + \frac{K_{s2}}{s+s_2} + \cdots + \frac{K_{s(n-r)}}{s+s_{n-r}} \\ & |\leftarrow n - r \text{ términos de polos simples} \rightarrow| \\ & + \frac{A_1}{s+s_i} + \frac{A_2}{(s+s_i)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(s+s_i)^r} \\ & |\leftarrow r \text{ términos de polos repetidos} \rightarrow| \end{aligned} \tag{2-52}$$

Los $(n-r)$ coeficientes, $K_{s1}, K_{s2}, \ldots, K_{s(n-r)}$, que corresponden a los polos simples, se pueden evaluar con el método descrito por la ecuación (2-44). Las ecuaciones para determinar los coeficientes que corresponden a los polos de orden múltiple se describen como sigue:

$$A_r = [(s+s_i)^r G(s)]\big|_{s=-s_i} \tag{2-53}$$

$$A_{r-1} = \frac{d}{ds}[(s+s_i)^r G(s)]\big|_{s=-s_i} \tag{2-54}$$

$$A_{r-2} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}[(s+s_i)^r G(s)]\big|_{s=-s_i} \tag{2-55}$$

$$\vdots$$

$$A_1 = \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}[(s+s_i)^r G(s)]\big|_{s=-s_i} \tag{2-56}$$

Ejemplo 2-6

Considere la función:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)} \tag{2-57}$$

Al utilizar la forma de la ecuación (2-52), $G(s)$ se escribe como:

$$G(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{K_{-2}}{s+2} + \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{(s+1)^3} \tag{2-58}$$

Los coeficientes correspondientes a los polos simples son:

$$K_0 = [sG(s)]|_{s=0} = \frac{1}{2} \tag{2-59}$$

$$K_{-2} = [(s+2)G(s)]|_{s=-2} = \frac{1}{2} \tag{2-60}$$

y los del polo de tercer orden son:

$$A_3 = [(s+1)^3G(s)]|_{s=-1} = -1 \tag{2-61}$$

$$A_2 = \frac{d}{ds}[(s+1)^3G(s)]|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s(s+2)}\right]\Bigg|_{s=-1} = 0 \tag{2-62}$$

$$A_1 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}[(s+1)^3G(s)]|_{s=-1} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{s(s+2)}\right]\Bigg|_{s=-1} = -1 \tag{2-63}$$

La expansión en fracciones parciales completa es:

$$G(s) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^3} \tag{2-64}$$

▲

$G(s)$ Tiene polos complejos conjugados simples

La expansión en fracciones parciales de la ecuación (2-43) también es válida para los polos complejos conjugados simples. Debido a que los polos complejos conjugados son más difíciles de manejar y son de interés especial en los estudios de sistemas de control, merecen un tratamiento especial.

Suponiendo que $G(s)$ de la ecuación (2-40) contiene un par de polos complejos:

$$s = -\alpha + j\omega \quad \text{and} \quad s = -\alpha - j\omega$$

Los coeficientes correspondientes de estos polos son:

$$K_{-\alpha+j\omega} = (s + \alpha - j\omega)G(s)|_{s=-\alpha+j\omega} \tag{2-65}$$

$$K_{-\alpha-j\omega} = (s + \alpha + j\omega)G(s)|_{s=-\alpha-j\omega} \tag{2-66}$$

Ejemplo 2-7

Considere la función:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{2-67}$$

Suponiendo que los valores de ζ y ω_n son tales que los polos de $G(s)$ son complejos. Entonces $G(s)$ se expande como sigue:

$$G(s) = \frac{K_{-\alpha+j\omega}}{s + \alpha - j\omega} + \frac{K_{-\alpha-j\omega}}{s + \alpha + j\omega} \tag{2-68}$$

en donde:

$$\alpha = \zeta\omega_n \tag{2-69}$$

y

$$\omega = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \tag{2-70}$$

Los coeficientes en la ecuación (2-68) se determinan como:

$$K_{-\alpha+j\omega} = (s + \alpha - j\omega)G(s)\big|_{s=-\alpha+j\omega} = \frac{\omega_n^2}{2j\omega} \tag{2-71}$$

$$K_{-\alpha-j\omega} = (s + \alpha + j\omega)G(s)\big|_{s=-\alpha-j\omega} = -\frac{\omega_n^2}{2j\omega} \tag{2-72}$$

La expansión en fracciones parciales completa de la ecuación (2-67) es:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{2j\omega}\left[\frac{1}{s + \alpha - j\omega} - \frac{1}{s + \alpha + j\omega}\right] \tag{2-73}$$

Al tomar la transformada inversa de Laplace en ambos miembros de la ecuación (2-73), se tiene:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{\omega_n^2}{2j\omega} e^{-\alpha t}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \\ &= \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}\, t \qquad t \geq 0 \end{aligned} \tag{2-74}$$

▲

2-5-2 Solución por computadora de la expansión en fracciones parciales

La expansión en fracciones parciales se puede realizar mediante un programa de computadora. Por ejemplo, la función **pfe** de las herramientas **CSAD** asociada con **MATLAB** y **pfe** de **ACSP** se pueden utilizar para realizar la expansión en fracciones parciales al introducir la

expresión de la función de transferencia $G(s)$. A continuación se proporciona una corrida típica en **CSAD** para la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{20(s + 10)}{s(s + 2)^2(s^2 + 10s + 100)} \tag{2-75}$$

pfe de CSAD

Al introducir **pfe** <CR> en el prompt de **MATLAB** ≫, el programa responde:

```
Enter Numerator polynomial vector >20*[1 10] <CR>
Enter Denominator polynomial vector >([1 0],[1 2],[1 2],[1 10 100])
<CR>
```

La respuesta de **pfe** es:

```
Terms in the partial fraction expansion are:
Complex Conjugate Pole at: -5.000 +/- j8.660

       (0.02721)(S + 5   )
  ----------------------------
  (S + 5    )^2 + (8.66    )^2

       (0.003928)(8.66)
  ----------------------------
  (S + 5    )^2 + (8.66    )^2

Time Domain: 0.02721*exp(-5t)*cos(8.66t)*u(t)

               + 0.003828*exp(-5t)*sin(8.66t)*u(t)

Double pole on Real Axis at: -2.000

      -0.5272     -0.9524
      -------  +  -----------
       S + 2      (S + 2  )^2

Time Domain: -0.5272*exp(-2t)*u(t)

             -0.9524*t*exp(-2t)*u(t)

Pole at the origin:

      0.5
      ---
       S

Time Domain: 0.5*u(t)

Partial Fraction Expansion Complete
```

Observe que **CSAD** también regresa la transformada inversa de Laplace de $G(s)$.

2-6 Aplicación de la transformada de Laplace a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

Las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales se pueden resolver mediante el método de la transformada de Laplace con la ayuda de los teoremas de la transformada de Laplace dados en la Sec. 2-4, de la expansión en fracciones parciales, y de una tabla de transformadas de Laplace. El procedimiento se detalla como sigue:

1. Transformar la ecuación diferencial al dominio de s mediante la transformada de Laplace, utilizando la tabla de transformadas de Laplace.
2. Manipular las ecuaciones algebraicas transformadas y resolverlas para la variable de salida.
3. Realizar la expansión en fracciones parciales de la ecuación algebraica transformada.
4. Obtener la transformada inversa de Laplace de la tabla de transformadas de Laplace.

Se ilustra el método mediante varios ejemplos.

Ejemplo 2-8

Considere la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 5u_s(t) \tag{2-76}$$

en donde $u_s(t)$ es la función escalón unitario. Las condiciones iniciales son $y(0) = -1$ y $y^{(1)}(0) = dy(t)/dt|_{t=0} = 2$. Para resolver la ecuación diferencial, primero se toma la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (2-76):

$$s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = 5/s \tag{2-77}$$

Al sustituir los valores de las condiciones iniciales en la ecuación (2-77) y al resolver para $Y(s)$, se obtiene:

$$Y(s) = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s+1)(s+2)} \tag{2-78}$$

La ecuación (2-78) se expande en fracciones parciales para dar:

$$Y(s) = \frac{5}{2s} - \frac{5}{s+1} + \frac{3}{2(s+2)} \tag{2-79}$$

Al tomar la transformada inversa de Laplace de la ecuación (2-79), se obtiene la solución completa como:

$$y(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} \qquad t \geq 0 \qquad (2\text{-}80)$$

El primer término en la ecuación (2-80) es la solución en estado estable o la solución particular; los dos últimos términos representan la solución transitoria, o la solución homogénea. A diferencia del método clásico, que requiere de pasos separados para obtener las soluciones transitoria y en estado estable, el método de la transformada de Laplace proporciona la solución completa en una operación.

Si sólo es de interés la magnitud de la solución en estado estable de $y(t)$, se puede aplicar el teorema de valor final de la ecuación (2-32). Por lo que,

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{-s^2 - s + 5}{s^2 + 3s + 2} = \frac{5}{2} \qquad (2\text{-}81)$$

en donde primero se ha verificado y encontrado que la función $sY(s)$ tiene polos solamente en el semiplano izquierdo del plano s, por lo que el teorema del valor final es válido. ▲

Ejemplo 2-9

Considere la ecuación diferencial lineal:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 34.5\frac{dy(t)}{dt} + 1000y(t) = 1000u_s(t) \qquad (2\text{-}82)$$

Los valores iniciales de $y(t)$ y $dy(t)/dt$ son cero. Al tomar la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (2-82) y al resolver para $Y(s)$, se obtiene:

$$Y(s) = \frac{1000}{s(s^2 + 34.5s + 1000)} = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \qquad (2\text{-}83)$$

en donde $\zeta = 0.5455$ y $\omega_n = 31.62$. La transformada inversa de Laplace de la ecuación (2-83) se puede obtener en un sinnúmero de formas. La tabla de transformadas de Laplace en el Apéndice B proporciona directamente el par de transformadas de la ecuación (2-83). El resultado es:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \theta) \qquad t \geq 0 \qquad (2\text{-}84)$$

en donde:

$$\theta = \cos^{-1}\zeta = 56.94° \qquad (2\text{-}85)$$

Por lo que:

$$y(t) = 1 - 1.193e^{-17.25t}\operatorname{sen}(26.5t + 56.94°) \qquad t \geq 0 \qquad (2\text{-}86)$$

La ecuación (2-86) se puede obtener al expandir en fracciones parciales a la ecuación (2-83), sabiendo que los polos están en $s = 0, -\alpha + j\omega$, y $-\alpha - j\omega$, en donde:

$$\alpha = \zeta\omega_n = 17.25 \qquad (2\text{-}87)$$

$$\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 26.5 \qquad (2\text{-}88)$$

La expansión en fracciones parciales de la ecuación (2-83) se escribe como:

$$Y(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{K_{-\alpha+j\omega}}{s+\alpha-j\omega} + \frac{K_{-\alpha-j\omega}}{s+\alpha+j\omega} \tag{2-89}$$

en donde:

$$K_0 = sY(s)|_{s=0} = 1 \tag{2-90}$$

$$K_{-\alpha+j\omega} = (s+\alpha-j\omega)Y(s)|_{s=-\alpha+j\omega} = \frac{e^{-j\phi}}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{2-91}$$

$$K_{-\alpha-j\omega} = (s+\alpha+j\omega)Y(s)|_{s=-\alpha-j\omega} = \frac{-e^{-j\phi}}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{2-92}$$

El ángulo ϕ está dado por:

$$\phi = 180° - \cos^{-1}\zeta \tag{2-93}$$

y se ilustra en la Fig. 2-4.

La transformada inversa de Laplace de la ecuación (2-89) se escribe ahora como:

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + \frac{1}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}[e^{j(\omega t-\phi)} - e^{-j(\omega t-\phi)}] \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t - \phi) \qquad t \geq 0 \end{aligned} \tag{2-94}$$

Al sustituir la ecuación (2-93) en la ecuación (2-94) para ϕ, se tiene:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \cos^{-1}\zeta) \qquad t \geq 0 \tag{2-95}$$

o

$$y(t) = 1 - 1.193e^{-17.25t}\operatorname{sen}(26.5t + 56.94°) \qquad t \geq 0 \tag{2-96}$$

▲

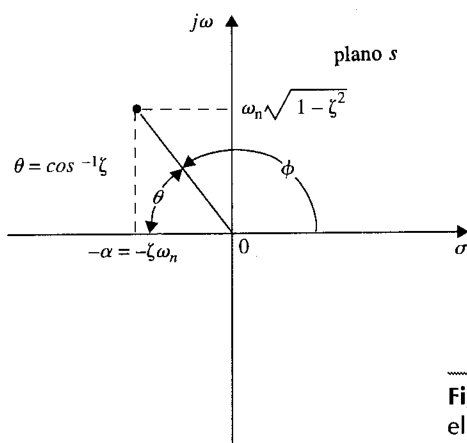


Figura 2-4 Localización de las raíces en el plano s.

2-7 Teoría elemental de matrices

En el estudio de la teoría del control moderna, a menudo es deseable utilizar notación matricial para simplificar expresiones matemáticas complejas. La notación matricial usualmente hace que la ecuación sea mucho más fácil de manejar y manipular.

Como una motivación de por qué utilizar la notación matricial, considere el siguiente conjunto de n ecuaciones algebraicas simultáneas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= y_n \end{aligned} \quad (2\text{-}97)$$

Se puede utilizar la ecuación matricial:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (2\text{-}98)$$

como una representación simplificada de la ecuación (2-97). Los símbolos **A, x,** y **y** están definidos como **matrices,** las cuales contienen los coeficientes y variables de las ecuaciones originales como sus elementos. En términos del álgebra de matrices, que será discutida en breve, la ecuación (2-98) se puede enunciar como: *El producto de las matrices* **A** *y* **x** *es igual a la matriz* **y**. Las tres matrices involucradas se definen como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2\text{-}99)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2\text{-}100)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (2\text{-}101)$$

las cuales simplemente son arreglos entre corchetes de los coeficientes y variables. Estos ejemplos de matrices requieren la definición de una matriz que sigue.

2-7-1 Definición de una matriz

▲ Es importante distinguir entre una matriz y un determinante.

Una matriz es una colección de elementos arreglados en una forma rectangular o cuadrangular. Existen varias maneras de encerrar a una matriz. En este libro, los corchetes cuadrangulares, tales como los de las ecuaciones (2-99) a (2-101), son utilizados para representar matrices. Es importante distinguir entre una **matriz** y un **determinante.** Las características básicas de éstos se indican a continuación:

MATRIZ	DETERMINANTE
▲ Un arreglo de números o elementos con n renglones y m columnas.	▲ Un arreglo de números o elementos con n renglones y n columnas (siempre cuadrado).
▲ No tiene un valor, aunque una matriz cuadrada ($n = m$) tiene un determinante.	▲ Tiene un valor.

Algunas definiciones importantes de matrices se dan a continuación.

Elementos de matrices. Cuando una matriz se escribe:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{2-102}$$

a_{ij} se define como el elemento en el i-ésimo **renglón** y en la j-ésima **columna** de la matriz. Como una regla, siempre se indica primero el renglón y luego la columna.

Orden de una matriz. *El orden de una matriz se refiere al número total de renglones y columnas de la matriz.* Por ejemplo, la matriz en la ecuación (2-102) tiene tres renglones y tres columnas y se denomina como una matriz de 3 × 3 (tres por tres). Una matriz con n renglones y m columnas se denomina como de $n \times m$ o n por m.

Matriz cuadrada. *Una matriz cuadrada es aquella que tiene el mismo número de renglones y de columnas.*

Matriz columna. *Una matriz columna es aquella que tiene una sola columna y más de un renglón, esto es, una matriz de $m \times 1$, $m > 1$.* Muy frecuentemente, una matriz columna se denomina como **vector columna** o simplemente **vector de dimensión m** si existen m renglones y una columna. La matriz en la ecuación (2-100) es un vector de dimensión n típico.

Matriz renglón. *Una matriz renglón es aquella que tiene un renglón y más de una columna, esto es, una matriz $1 \times n$, en donde $n > 1$.* Una matriz renglón también se puede nombrar como **vector renglón.**

Matriz diagonal. *Una matriz diagonal es una matriz cuadrada con $a_{ij} = 0$ para toda $i \neq j$.* Ejemplos de una matriz diagonal son:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz unidad (matriz de identidad). *Una matriz unidad es una matriz diagonal con todos los elementos en la diagonal principal ($i = j$) igual a 1.* Una matriz unidad se designa a menudo por **I** o **U**. Un ejemplo de una matriz unidad es:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-103}$$

Matriz nula. *Una matriz nula es aquella en que todos sus elementos son iguales a cero.*

Matriz simétrica. *Una matriz simétrica es una matriz cuadrada que satisface la condición $a_{ij} = a_{ji}$ para todas i y j.* Una matriz simétrica tiene la propiedad de que si sus renglones son intercambiados con sus columnas, se obtiene la misma matriz. Dos ejemplos de matriz simétrica son:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 10 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-104}$$

Determinante de una matriz. *Para una matriz cuadrada, se puede definir un determinante que tenga los mismos elementos y orden que la matriz. El determinante de una matriz cuadrada* **A** *se designa como:*

$$\det \mathbf{A} = \Delta_A = |\mathbf{A}| \tag{2-105}$$

Por ejemplo, el determinante de la matriz de la ecuación (2-102) es:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{2-106}$$

Cofactor de un elemento determinante. *Dado cualquier determinante de n-ésimo orden* $|\mathbf{A}|$, *el cofactor de cualquier elemento $a_{ij} = A_{ij}$, es el determinante que se obtiene al eliminar todos*

los elementos del i-ésimo renglón y de la j-ésima columna, que después se multiplica por $(-1)^{i+j}$.
Por ejemplo, el cofactor del elemento a_{11} de $|\mathbf{A}|$ en la ecuación (2-106) es:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \tag{2-107}$$

En general, el valor de un determinante se puede escribir en términos de los cofactores. Sea **A** una matriz de $n \times n$; entonces el determinante de **A** se puede escribir en términos del cofactor de cualquier renglón o el cofactor de cualquier columna. Esto es,

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad (i = 1, \text{o } 2, \ldots, \text{o } n) \tag{2-108}$$

o

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad (j = 1, \text{o } 2, \ldots, \text{o } n) \tag{2-109}$$

Ejemplo 2-10

El valor del determinante de la ecuación (2-106) es:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned} \tag{2-110}$$

▲

Matriz singular. *Se dice que una matriz cuadrada es singular si el valor de su determinante es cero.* Si una matriz cuadrada tiene un determinante diferente de cero, se denomina **matriz no singular.** Cuando una matriz es singular, significa que no todos los renglones o no todas las columnas de la matriz son independientes unas de otras. Cuando la matriz es utilizada para representar un conjunto de ecuaciones algebraicas, la singularidad de la matriz significa que estas ecuaciones no son independientes unas de otras.

Ejemplo 2-11

Considere el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2-111}$$

La tercera ecuación es igual a la suma de las dos primeras. Por lo que estas tres ecuaciones no son completamente independientes. En forma matricial estas ecuaciones se podrían escribir como:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \tag{2-112}$$

en donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{2-113}$$

y **0** es una matriz nula de 3 × 1. El determinante de **A** es 0, por lo que la matriz **A** es singular. En este caso los renglones de **A** son dependientes. ▲

Transpuesta de una matriz. *La transpuesta de una matriz* **A** *se define como la matriz que se obtiene al intercambiar los renglones y columnas correspondientes en* **A.** Sea **A** una matriz de $n \times m$ que está representada por:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,m} \tag{2-114}$$

La transpuesta de **A,** denotada por **A′** está dada por:

$$\mathbf{A}' = \text{transpuesta de } \mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n} \tag{2-115}$$

Observe que el orden de **A** es $n \times m$, pero el orden de **A′** es $m \times n$.

Ejemplo 2-12

Considere la matriz de 2 × 3:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \tag{2-116}$$

La transpuesta de **A** se obtiene mediante el intercambio de los renglones y las columnas.

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \tag{2-117}$$

▲

ALGUNAS PROPIEDADES DE LA MATRIZ TRANSPUESTA

1. $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$ (2-118)
2. $(k\mathbf{A})' = k\mathbf{A}'$, donde k es un escalar (2-119)
3. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$ (2-120)
4. $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$ (2-121)

Adjunta de una matriz. *Sea* **A** *una matriz cuadrada de orden n. La matriz adjunta de* **A**, *denotada por adj* **A** *se define como:*

$$\text{adj}\,\mathbf{A} = [A_{ij} \text{ de } \det \mathbf{A}]_{n,n} \tag{2-122}$$

en donde A_{ij} *denota el cofactor de* a_{ij}.

Ejemplo 2-13

Considere la matriz de 2 × 2:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{2-123}$$

Los cofactores son $A_{11} = a_{22}$, $A_{12} = -a_{21}$, $A_{21} = -a_{12}$, y $A_{22} = a_{11}$. Por lo que la matriz adjunta de **A** es:

$$\text{adj}\,\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{2-124}$$

▲

Traza de una matriz cuadrada. *Dada una matriz de n × n con elementos* a_{ij}, *la* **traza de A**, *denotada como* tr(**A**), *se define como la suma de los elementos en la diagonal principal de* **A**; *esto es,*

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{2-125}$$

La traza de una matriz tiene las siguientes propiedades:

1. $\text{tr}(\mathbf{A}') = \text{tr}(\mathbf{A})$ (2-126)
2. Para matrices cuadradas **A** y **B** de $n \times n$,

$$\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B}) \tag{2-127}$$

2-8 Álgebra de matrices

Cuando se realizan operaciones con matrices, es necesario definir el álgebra de matrices en la forma de una suma, resta, multiplicación y división.

2-8-1 Igualdad de matrices

Se dice que dos matrices **A** y **B** son iguales si satisfacen las siguientes condiciones:

1. Son del mismo orden.
2. Los elementos correspondientes son iguales; esto es,

$$a_{ij} = b_{ij} \text{ para todas } i \text{ y } j \tag{2-128}$$

Ejemplo 2-14

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \tag{2-129}$$

implica que $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$. ▲

2-8-2 Suma y resta de matrices

Dos matrices **A** y **B** se pueden sumar o restar en la forma **A** ± **B** si son del mismo orden. Esto es,

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = [a_{ij}]_{n,m} \pm [b_{ij}]_{n,m} = \mathbf{C} = [c_{ij}]_{n,m} \tag{2-130}$$

en donde:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \qquad \text{para toda } i \text{ y } j \tag{2-131}$$

El orden de las matrices se conserva después de la suma o resta.

Ejemplo 2-15

Considere las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-132}$$

las cuales son del mismo orden. La suma de **A** y **B** es:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} 3+0 & 2+3 \\ -1-1 & 4+2 \\ 0+1 & -1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{2-133}$$

▲

2-8-3 Ley asociativa de matrices (suma y resta)

La ley asociativa del álgebra escalar se mantiene para la suma y resta de matrices. Esto es,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \tag{2-134}$$

2-8-4 Ley conmutativa de matrices (suma y resta)

La ley conmutativa para la suma y resta de matrices establece que la siguiente relación de matrices es verdadera:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{C} + \mathbf{B} \tag{2-135}$$

así como otras posibles combinaciones conmutativas.

2-8-5 Multiplicación de matrices

Las matrices **A** y **B** se pueden multiplicar para formar el producto **AB** si son **conformables.** Esto significa que el número de columnas de **A** debe ser igual al número de renglones de **B.** En otras palabras,

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,p} \qquad \mathbf{B} = [b_{ij}]_{q,m} \tag{2-136}$$

Entonces **A** y **B** son conformables para formar el producto:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = [a_{ij}]_{n,p}[b_{ij}]_{q,m} = [c_{ij}]_{n,m} \tag{2-137}$$

si y sólo si $p = q$. La matriz **C** tendrá el mismo número de renglones que **A** y el mismo número de columnas que **B.**

Es importante notar que **A** y **B** pueden ser conformables para formar **AB,** pero pueden no ser conformables para el producto **BA,** a menos que en la ecuación (2-137), n también sea igual a m. Esto señala el hecho importante de que *la ley conmutativa no es válida, en general, para la multiplicación de matrices.* También es importante que aun cuando **A** y **B** son conformables para **AB** y **BA,** normalmente $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Las siguientes referencias se establecen con respecto a la manipulación matricial:

▲ Dos matrices se pueden multiplicar si y sólo si son conformables.

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A} \text{ postmultiplicada por } \mathbf{B} \text{ o } \mathbf{B} \text{ premultiplicada por } \mathbf{A} \tag{2-138}$$

2-8-6 Reglas de multiplicación de matrices

Cuando las matrices **A** ($n \times p$) y **B** ($p \times m$) son conformables para formar la matriz **C** = **AB**, el ij-ésimo elemento de **C**, C_{ij}, está dado por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \qquad (2\text{-}139)$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, m$.

Ejemplo 2-16

Dadas las matrices:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{2,3} \qquad \mathbf{B} = [b_{ij}]_{3,1} \qquad (2\text{-}140)$$

Las dos matrices son conformables para el producto **AB**, pero no para **BA**. Por tanto,

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}141)$$

▲

Ejemplo 2-17

Dadas las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}142)$$

Las dos matrices son conformables para **AB** y **BA**.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}143)$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}144)$$

Por tanto, aun cuando **AB** y **BA** existen, no son iguales. De hecho, en este caso los productos no son del mismo orden. ▲

Aunque la ley conmutativa no se mantiene en lo general para la multiplicación de matrices, las leyes **asociativa** y **distributiva** son válidas. Para la ley distributiva, se establece que:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \qquad (2\text{-}145)$$

si los productos son conformables. Para la ley asociativa,

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \tag{2-146}$$

si el producto es conformable.

2-8-7 Multiplicación por una escalar k

La multiplicación de una matriz **A** *por cualquier escalar k es equivalente a la multiplicación de cada elemento de* **A** *por k.*

2-8-8 Inversa de una matriz (división de matrices)

▲ Solamente las matrices cuadradas tienen inversa, y sólo si son no singulares.

En el álgebra de cantidades escalares, cuando se escribe $y = ax$, implica que $x = y/a$ también es verdadera. En el álgebra de matrices, si **Ax = y,** *puede ser posible* que se escriba:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} \tag{2-147}$$

en donde $\mathbf{A}^{-1}$ denota la **matriz inversa** de **A.** Las condiciones de que $\mathbf{A}^{-1}$ exista son:

1. **A** es una matriz cuadrada.
2. **A** debe ser no singular.
3. Si $\mathbf{A}^{-1}$ existe, está dada por:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}\,\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \tag{2-148}$$

Ejemplo 2-18

▲ La adjunta de una matriz de 2 × 2 se obtiene al intercambiar los dos elementos de la diagonal principal y al cambiar los signos de los elementos fuera de la diagonal.

Dada la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{2-149}$$

la inversa de **A** está dada por:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}\,\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{2-150}$$

en donde para que **A** sea no singular, $|\mathbf{A}| \neq 0$, o $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

La ecuación (2-150) muestra que adj A de una matriz de 2 × 2 se obtiene al *intercambiar los dos elementos principales en la diagonal y al cambiar los signos de los elementos fuera de la diagonal de* **A**. ▲

Ejemplo 2-19

Dada la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{2-151}$$

Para encontrar la inversa de **A**, la adjunta de **A** es:

$$\text{adj}\,\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & -(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix} \tag{2-152}$$

El determinante de **A** es:

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{2-153}$$

▲

ALGUNAS PROPIEDADES DE LA MATRIZ INVERSA

1. $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ (2-154)
2. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ (2-155)
3. En el álgebra de matrices, en general, $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ no necesariamente implica que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. El lector puede fácilmente construir un ejemplo para ilustrar esta propiedad. Sin embargo, si **A** es una matriz cuadrada y es no singular, se pueden premultiplicar ambos miembros de $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ por $\mathbf{A}^{-1}$. Entonces

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AC} \tag{2-156}$$

lo que lleva a $\mathbf{B} = \mathbf{C}$

4. Si **A** y **B** son dos matrices cuadradas y no singulares, entonces

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \tag{2-157}$$

2-8-9 Rango de una matriz

El rango de una matriz **A** *es el número máximo de columnas linealmente independientes de* **A**; *o es el orden de la matriz no singular más grande contenida en* **A**.

Ejemplo 2-20

Varios ejemplos del rango de una matriz son los siguientes:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rango} = 1 \qquad \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{rango} = 2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rango} = 2 \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rango} = 3$$

▲

Las siguientes propiedades son útiles para determinar el rango de una matriz. Dada una matriz **A** de $n \times m$:

1. Rango de $\mathbf{A}'$ = rango de **A**.
2. Rango de $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ = rango de **A**.
3. Rango de $\mathbf{A}\mathbf{A}'$ = rango de **A**.

Las propiedades 2 y 3 son útiles en la determinación del rango; ya que $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}\mathbf{A}'$ son siempre cuadradas, la condición del rango se puede verificar mediante la evaluación de los determinantes de estas matrices.

2-8-10 Solución de matrices asistida por computadora

Muchos programas comerciales para computadora tales como **MATLAB** contienen rutinas para manipulación de matrices.

2-9 Forma matricial de las ecuaciones de estado

Las ecuaciones de estado definidas en la Sec. 2-3 se pueden expresar convenientemente en forma matricial. Considere que un sistema lineal de segundo orden está descrito por las siguientes ecuaciones de estado:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = a_{11}x\,(t) + a_{12}x_2(t) + b_{11}u(t) \tag{2-158}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_{21}u(t) \tag{2-159}$$

en donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son las variables de estado; $u(t)$ es la entrada; a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_{11}, y b_{21} son coeficientes constantes. Sea el **vector de estado** definido como una matriz de 2×1,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{2-160}$$

Las ecuaciones de estado en forma matricial se expresan como:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{2-161}$$

en donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \tag{2-162}$$

La ecuación (2-161) se puede utilizar para representar las n ecuaciones de estado de la ecuación (2-13), en cuyo caso $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{x}(t)$ son vectores de $n \times 1$, $\mathbf{u}(t)$ es la entrada escalar $f(t)$, y los coeficientes matriciales son:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-163}$$

Para ecuaciones de estado no lineales, la forma matricial es:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \tag{2-164}$$

en donde $\mathbf{f}[\,\cdot\,]$ representa una función matricial de $n \times 1$.

2-10 Ecuaciones en diferencias

Debido a que los controladores digitales se utilizan frecuentemente en sistemas de control, es necesario establecer ecuaciones que relacionen señales digitales y en tiempo discreto. Como las ecuaciones diferenciales se usan para representar sistemas con señales analógicas, las ecuaciones en diferencias se utilizan para sistemas en tiempo discreto o digitales. Las ecuaciones en diferencias también se usan para aproximar ecuaciones diferenciales, ya que las primeras son más fáciles de programar en una computadora digital y son más fáciles de resolver.

Una ecuación en diferencias lineal del n-ésimo orden con coeficientes constantes se puede escribir como:

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = f(k) \tag{2-165}$$

en donde $y(i)$, $i = k, k+1, \ldots, k+n$, denotan la variable dependiente discreta y en el i-ésimo instante si la variable independiente es el tiempo. En general, la variable independiente puede ser cualquier cantidad real.

En forma similar al caso de los sistemas analógicos, es conveniente utilizar un conjunto de ecuaciones en diferencias de primer orden, o de ecuaciones de estado, para representar una ecuación en diferencias de orden alto. Para la ecuación en diferencias de la ecuación (2-165), se tiene:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= y(k) \\ x_2(k) &= x_1(k+1) = y(k+1) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(k) &= x_{n-2}(k+1) = y(k+n-2) \\ x_n(k) &= x_{n-1}(k+1) = y(k+n-1) \end{aligned} \tag{2-166}$$

entonces al igualar el término de orden más alto al resto de los términos, la ecuación se escribe como:

$$x_n(k+1) = -a_0 x_1(k) - a_1 x_2(k) - \cdots - a_{n-1}x_n(k) + f(k) \tag{2-167}$$

Las primeras $n - 1$ ecuaciones de estado se toman directamente de las últimas $n - 1$ ecuaciones de la ecuación (2-166), y la última está dada por la ecuación (2-167). Las n ecuaciones de estado se escriben en forma matricial como:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \tag{2-168}$$

en donde:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \tag{2-169}$$

es el vector de estado de $n \times 1$, y

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-170}$$

y $u(k) = f(k)$.

2-11 La transformada *z*

En la Sec. 2-6 se mostró que la transformada de Laplace se puede emplear para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. La transformada z representa un método operacional para resolver ecuaciones en diferencias lineales y sistemas lineales con datos discretos o digitales.

2-11-1 Definición de la transformada *z*

Considere la secuencia $y(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, en donde $y(k)$ puede representar una secuencia de números o eventos. La transformada z de $y(k)$ está definida como:

$$Y(z) = \text{transformada } z \text{ de } y(k) = \mathcal{Z}[y(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k} \tag{2-171}$$

en donde z es una variable compleja con partes real e imaginaria. La motivación para esta definición se aclarará posteriormente. Un significado de la definición de la ecuación (2-171) es que la transformada z convierte la secuencia de números en el dominio real a una expresión en el dominio complejo z.

Los siguientes ejemplos ilustran la forma de obtener la transformada z de dos funciones sencillas.

Ejemplo 2-21

Considere la secuencia:

$$y(k) = e^{-\alpha k} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2-172}$$

en donde α es una constante real. Al aplicar la ecuación (2-171), la transformada z de $y(k)$ se escribe como:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha k} z^{-k} = 1 + e^{-\alpha} z^{-1} + e^{-2\alpha} z^{-2} + \cdots \tag{2-173}$$

la cual converge para $|e^{-\alpha} z^{-1}| < 1$.

Al multiplicar ambos miembros de la última ecuación por $e^{-\alpha} z^{-1}$, restando la ecuación resultante de la ecuación (2-173), y resolviendo para $Y(z)$, ésta última se expresa en forma compacta:

$$Y(z) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-\alpha}} \tag{2-174}$$

para $|e^{-\alpha} z^{-1}| < 1$. ▲

Ejemplo 2-22

En el ejemplo 2-21, si $\alpha = 0$, se tiene:

$$y(k) = 1 \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2-175}$$

que representa una secuencia de unos. Entonces la transformada z de $y(k)$ es:

$$Y(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots = \frac{z}{z - 1} \tag{2-176}$$

que converge para $|z| > 1$. ▲

2-11-2 Relación entre la transformada de Laplace y la transformada z

Mientras que a los matemáticos les gusta hablar de secuencias, los ingenieros nos sentimos más a gusto tratando con señales. Puede ser útil representar la secuencia $y(kT)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ como un tren de impulsos separados por el intervalo de tiempo T. Este último está definido como el **periodo de muestreo.** El impulso del k-ésimo instante, $\delta(t - kT)$, lleva el valor de $y(kT)$. Esta situación se presenta muy a menudo en sistemas de control digital y de datos muestreados, en los cuales una señal $y(t)$ se digitaliza o muestrea cada T segundos para formar una secuencia de tiempo que representa la señal en los instantes de muestreo. Por tanto, se puede relacionar la secuencia $y(kT)$ con una señal que se puede expresar como:

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)\delta(t - kT) \tag{2-177}$$

Al tomar la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (2-177), se tiene:

$$Y^*(s) = \mathcal{L}[y^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)e^{-kTs} \quad (2\text{-}178)$$

Al comparar la última ecuación con la ecuación (2-171), se puede ver que la transformada z se relaciona con la transformada de Laplace a través de:

$$z = e^{Ts} \quad (2\text{-}179)$$

De hecho, la transformada z definida en la ecuación (2-171) se puede ver como un caso especial cuando $T = 1$. La definición de la transformada z de la ecuación (2-179) permite tratar sistemas de datos muestreados y realizar una simulación digital de sistemas en tiempo continuo. Por lo tanto, la definición de la transformada z se puede resumir como:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \mathcal{Z}[y(kT)] = \mathcal{Z}[y^*(t)] = \mathcal{Z}[Y^*(s)] \\ &= Y^*(s)\big|_{z=e^{Ts}} \end{aligned} \quad (2\text{-}180)$$

O se puede escribir como:

$$Y(z) = \mathcal{Z}[y(t)] = \mathcal{Z}[Y(s)] \quad (2\text{-}181)$$

con el entendimiento de que la función $y(t)$ primero se muestrea o discretiza para obtener $y^*(t)$ antes de tomar la transformada z.

Ejemplo 2-23

Considere la función de tiempo:

$$y(t) = e^{-\alpha t}u_s(t) \quad (2\text{-}182)$$

La transformada z de $y(t)$ se obtiene realizando los siguientes pasos:

1. Represente los valores de $y(t)$ en los instantes $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, para formar la función $y^*(t)$:

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha kT}\delta(t - kT) \quad (2\text{-}183)$$

2. Obtenga la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación (2-183):

$$Y^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha kT} e^{-kTs} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(s+\alpha)kT} \tag{2-184}$$

3. Exprese $Y^*(s)$ en forma compacta y aplique la ecuación (2-179), se obtiene la transformada z,

$$Y(z) = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}} \tag{2-185}$$

En general, las transformadas z de funciones más complejas se pueden obtener con la ayuda de algunos de los teoremas de la transformada z siguientes. Para propósitos de ingeniería, una tabla de transformadas z, como la descrita en el Apéndice C se puede utilizar para transformar $y(k)$ a $Y(z)$ y viceversa. ▲

2-11-3 Algunos teoremas importantes de la transformada z

Algunos de los teoremas comúnmente utilizados de la transformada z se enuncian sin prueba. Al igual que en el caso de la transformada de Laplace, estos teoremas son útiles en muchos aspectos en el análisis de la transformada z. Para uniformidad, la secuencia real se expresa como $y(kT)$, y si no se especifica un periodo de muestreo, T se puede considerar como la unidad.

▲ **Teorema 1.** *Suma y resta*

Si $y_1(kT)$ y $y_2(kT)$ tienen transformadas z, $Y_1(z)$ y $Y_2(z)$, respectivamente, entonces:

$$\mathcal{Z}[y_1(kT) \pm y_2(kT)] = Y_1(z) \pm Y_2(z) \tag{2-186}$$

▲ **Teorema 2.** *Multiplicación por una constante*

$$\mathcal{Z}[\alpha y(kT)] = \alpha\mathcal{Z}[y(kT)] = \alpha Y(z) \tag{2-187}$$

en donde α es una constante.

▲ **Teorema 3.** *Traslación real (retraso y adelanto en el tiempo)*

$$\mathcal{Z}[y(kT - nT)] = z^{-n}Y(z) \tag{2-188}$$

y

$$\mathcal{Z}[y(kT + nT)] = z^n \left[Y(z) - \sum_{k=0}^{n-1} y(kT)z^{-k} \right] \tag{2-189}$$

en donde n es un entero positivo.

La ecuación (2-188) representa la transformada z de una secuencia de tiempo que está corrida hacia la derecha por nT, y la ecuación (2-189) denota aquella en que la secuencia de tiempo está corrida hacia la izquierda por nT. La razón de que el segundo miembro de la ecuación (2-189) no sea únicamente $z^nY(z)$ se debe a que la transformada z unilateral, similar a la transformada de Laplace, se define solamente para $k \geq 0$. Por lo que el segundo término en el segundo miembro de la ecuación (2-189) simplemente representa la secuencia que se pierde después de que es corrida hacia la izquierda de $k = 0$.

▲ **Teorema 4.** *Traslación compleja*

$$\mathcal{Z}[e^{\mp\alpha kT}y(kT)] = Y(ze^{\pm\alpha T}) \tag{2-190}$$

en donde α es una constante. $Y(z)$ es la transformada z de $y(kT)$.

▲ **Teorema 5.** *Teorema del valor inicial*

$$\lim_{k\to 0} y(kT) = \lim_{z\to\infty} Y(z) \tag{2-191}$$

si existe el limite.

▲ **Teorema 6.** *Teorema del valor final*

▲ El teorema del valor final es válido si y sólo si $(1 - z^{-1})Y(z)$ no tiene polos sobre o fuera el círculo unitario $|z| = 1$.

$$\lim_{k\to\infty} y(kT) = \lim_{z\to 1} (1 - z^{-1})Y(z) \tag{2-192}$$

si la función $(1 - z^{-1})Y(z)$ no tiene polos sobre o fuera del círculo unitario $|z| = 1$ en el plano z.

▲ **Teorema 7.** *Convolución real*

$$Y_1(z)Y_2(z) = \mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{N} y_1(kT)y_2(NT-kT)\right] = \mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{N} y_2(kT)y_1(NT-kT)\right]$$
$$= \mathcal{Z}[y_1(kT) * y_2(kT)] \tag{2-193}$$

en donde * denota la convolución real en el dominio del tiempo discreto.

Por tanto se ve que como en la transformada de Laplace, la transformada z del producto de dos funciones reales $y_1(k)$ y $y^2(k)$ **no** es igual al producto de las transformadas z, $Y_1(z)$ y $Y_2(z)$. Una excepción a esto en el caso de la transformada z es si una de las dos funciones es el retraso e^{-NTs}, en donde N es un entero positivo, entonces:

$$\mathcal{Z}[e^{-NTs}Y(s)] = \mathcal{Z}[e^{-NTs}]\mathcal{Z}[Y(s)] = z^{-N}Y(z) \tag{2-194}$$

La Tabla 2-2 resume los teoremas de la transformada z antes mencionados. Los siguientes ejemplos ilustran la utilidad de algunos de estos teoremas.

Tabla 2-2 Teoremas de las transformadas z

Suma y resta	$\mathcal{Z}[y_1(kT) \pm y_2(kT)] = Y_1(z) \pm Y_2(z)$	
Multiplicación por una constante	$\mathcal{Z}[\alpha y(kT)] = \alpha\mathcal{Z}[y(kT)] = \alpha Y(z)$	
Traslación real	$\mathcal{Z}[y(k-n)T] = z^{-n}Y(z)$	(retraso)
	$\mathcal{Z}[y(k+n)T] = z^{n}\left[Y(z) - \sum_{k=0}^{n-1} y(kT)z^{-k}\right]$	(adelanto)
	en donde n = entero positivo	
Traslación compleja	$\mathcal{Z}[e^{\mp\alpha kT}y(kT)] = Y(ze^{\pm\alpha T})$	
Teorema del valor inicial	$\lim_{k\to 0} y(kT) = \lim_{z\to\infty} Y(z)$	
Teorema del valor final	$\lim_{k\to\infty} y(kT) = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1})Y(z)$ si $(1-z^{-1})Y(z)$ no tiene polos sobre o fuera $\lvert z\rvert = 1$.	
Convolución real	$Y_1(z)Y_2(z) = \mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{n} y_1(kT)y_2(NT-kT)\right] = \mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{n} y_2(kT)y_1(NT-kT)\right] = \mathcal{Z}[y_1(kT) * y_2(kT)]$	

Ejemplo 2-24

(*Teorema de traslación compleja*) El teorema de traslación compleja de la ecuación (2-190) se emplea para encontrar la transformada z de $y(t) = te^{-\alpha t}$, $t \geq 0$. Sea $f(t) = t$, $t \geq 0$; entonces:

$$F(z) = \mathcal{Z}[tu_s(t)] = \mathcal{Z}(kT) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \tag{2-195}$$

Utilizando el teorema de traslación compleja de la ecuación (2-190), se obtiene:

$$Y(z) = \mathcal{Z}[te^{-\alpha t}u_s(t)] = F(ze^{\alpha T}) = \frac{Tze^{-\alpha T}}{(z - e^{-\alpha T})^2} \tag{2-196}$$

▲

Ejemplo 2-25

(*Teorema del valor final*) Dada la función:

$$Y(z) = \frac{0.792z^2}{(z-1)(z^2 - 0.416z + 0.208)} \tag{2-197}$$

determine el valor de $y(kT)$ cuando k tiende al infinito.

Ya que la función $(1 - z^{-1})Y(z)$ no tiene ningún polo sobre o fuera del círculo unitario $|z| = 1$ en el plano z, el teorema del valor final de la ecuación (2-192) se puede aplicar. Por tanto,

$$\lim_{k\to\infty} y(kT) = \lim_{z\to 1} \frac{0.792z}{z^2 - 0.416z + 0.208} = 1 \tag{2-198}$$

▲

2-11-4 Transformada z inversa

▲ La transformada z inversa de $Y(z)$ es $y(kT)$; no $y(t)$.

Así como en la transformada de Laplace, uno de los objetivos principales de la transformada z es que las manipulaciones algebraicas se puedan realizar primero en el dominio z, y después la respuesta en tiempo se determina mediante la transformada z inversa. *En general, la transformada z inversa de una función Y(z) proporciona información sólo sobre y(kT), y no sobre y(t). En otras palabras, la transformada z proporciona información solamente en los momentos de muestreo.* Con esto en mente, la transformada inversa z se puede obtener mediante uno de los tres métodos siguientes:

1. Expansión en fracciones parciales.
2. Método de la serie de potencias.
3. La fórmula de inversión.

Método de expansión en fracciones parciales

La función de la transformada z, $Y(z)$, se expande mediante fracciones parciales en una suma de términos sencillos reconocibles, y la tabla de transformadas z se utiliza para determinar la $y(kT)$ correspondiente. En la realización de la expansión en fracciones parciales, existe una

▲ Si $Y(z)$ tiene al menos un cero en $z = 0$, la expansión en fracciones parciales de $Y(z)/z$ se debe realizar primero.

ligera diferencia entre los procedimientos de la transformada z y los de la transformada de Laplace. Con referencia a la tabla de transformadas z, se observa que prácticamente todas las funciones de la transformada z tienen el término z en el numerador. Por tanto, $Y(z)$ se expande en la forma:

$$Y(z) = \frac{K_1 z}{z - e^{-\alpha T}} + \frac{K_2 z}{z - e^{-\beta T}} + \cdots \tag{2-199}$$

Para esto, primero se debe expandir $Y(z)/z$ en fracciones y después multiplicar por z para obtener la expresión final. El siguiente ejemplo ilustra este procedimiento.

Ejemplo 2-26

Dada la función de la transformada z:

$$Y(z) = \frac{(1 - e^{-\alpha T})z}{(z-1)(z - e^{-\alpha T})} \tag{2-200}$$

se desea encontrar la transformada z inversa. Al expandir $Y(z)/z$ mediante fracciones parciales, se obtiene:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z - e^{-\alpha T}} \tag{2-201}$$

La expresión final expandida para $Y(z)$ es:

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-\alpha T}} \tag{2-202}$$

De la tabla de transformadas z del Apéndice C, la transformada inversa z correspondiente de $Y(z)$ es:

$$y(kT) = 1 - e^{-\alpha kT} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2-203}$$

▲

▲ Si $Y(z)$ no tiene ningún polo en $z = 0$, entonces obtenga la expansión en fracciones parciales de $Y(z)$ en forma directa.

Debe señalarse que si $Y(z)$ no contiene algún factor de z en el numerador, esto normalmente significa que la secuencia de tiempo tiene un retraso, y la expansión en fracciones parciales de $Y(z)$ se debe realizar sin dividir primero la función entre z. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

Ejemplo 2-27

Considere la función:

$$Y(z) = \frac{(1 - e^{-\alpha T})}{(z-1)(z - e^{-\alpha T})} \tag{2-204}$$

la cual no contiene ninguna potencia de z como factor en el numerador. En este caso, la expansión en fracciones parciales de $Y(z)$ se realiza directamente. Se tiene:

$$Y(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z - e^{-\alpha T}} \tag{2-205}$$

Aunque la tabla de transformadas z no contiene elementos que coincidan en forma exacta con los componentes de la ecuación (2-205), se reconoce que la transformada inversa z del primer término del segundo miembro se puede escribir como:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z-1}\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[z^{-1}\frac{z}{z-1}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} z^{-1}$$
$$= u_s[(k-1)T] \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{2-206}$$

En forma similar, el segundo término del segundo miembro de la ecuación (2-205) se puede identificar como un retraso de T segundos. Por lo que la transformada z inversa de $Y(z)$ se escribe como:

$$y(kT) = (1 - e^{-\alpha(k-1)T})u_s[(k-1)T] \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{2-207}$$

▲

2-11-5 Solución por computadora de la expansión en fracciones parciales de $Y(z)/z$

Aunque la función a ser expandida en fracciones parciales está en la forma de $Y(z)/z$ o $Y(z)$, los programas **pfe** de **CSAD/MATLAB** o **ACSP** aún pueden ser aplicados.

Método de las series de potencias

La definición de la transformada z en la ecuación (2-171) proporciona un método directo para realizar la transformada z inversa. Con base en la ecuación (2-171) se puede ver claramente que en el caso mostrado, el coeficiente de z^{-k} en $Y(z)$ es simplemente $y(kT)$. Por tanto, si $Y(z)$ se expande en una serie de potencias de z^{-k}, se pueden encontrar los valores de $y(kT)$ para $k =$ 0, 1, 2, ...

Ejemplo 2-28

Considere la función $Y(z)$ dada por la ecuación (2-200), que se puede expandir en una serie de potencias de z^{-1} al dividir el polinomio numerador entre el polinomio denominador mediante una división larga. El resultado es:

$$Y(z) = (1 - e^{-\alpha T})z^{-1} + (1 - e^{-2\alpha T})z^{-2} + \cdots + (1 - e^{-k\alpha T})z^{-k} + \cdots \tag{2-208}$$

Por tanto, es evidente que:

$$y(kT) = 1 - e^{-\alpha kT} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2-209}$$

que es el mismo resultado de la ecuación (2-203). ▲

Fórmula de inversión

La secuencia de tiempo $y(kT)$ se puede determinar a partir de $Y(z)$ mediante el uso de la fórmula de inversión:

$$y(kT) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} Y(z)z^{k-1}\,dz \tag{2-210}$$

que es una integral de contorno a lo largo de la trayectoria Γ, que es un círculo de radio $|z| = e^{cT}$ con centro en el origen en el plano z, y c es de tal valor, que los polos de $Y(z)z^{k-1}$ están dentro de dicho círculo. La fórmula de inversión de la transformada z es similar a aquella de la integral de la transformada inversa de Laplace dada en la ecuación (2-23). Una forma de evaluar la integral de contorno de la ecuación (2-210) es utilizar el teorema de los residuos de la teoría de variable compleja, cuyos detalles no son cubiertos en este libro.

2-12 Aplicación de la transformada *z* a la solución de ecuaciones en diferencias lineales

La transformada z se puede emplear para resolver ecuaciones en diferencias lineales. Como un ejemplo simple, considere la ecuación en diferencias de primer orden sin excitación:

$$y(k+1) + y(k) = 0 \qquad (2\text{-}211)$$

Para resolver esta ecuación, se toma la transformada z en ambos miembros de la ecuación. Con esto se quiere decir que se multiplican ambos miembros de la ecuación por z^{-k} y se toma la suma desde $k = 0$ hasta $k = \infty$, Se tiene:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y(k+1)z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} = 0 \qquad (2\text{-}212)$$

Mediante el empleo de la definición de $Y(z)$ y el teorema de traslación real de la ecuación (2-189) para adelanto de tiempo, la ecuación (2-212) se escribe como:

$$z[Y(z) - y(0)] + Y(z) = 0 \qquad (2\text{-}213)$$

Resolviendo para $Y(z)$, se obtiene:

$$Y(z) = \frac{z}{z+1} y(0) \qquad (2\text{-}214)$$

La transformada z inversa de la ecuación (2-214) se puede obtener mediante la expansión de $Y(z)$ en una serie de potencias en z^{-1} a través de la división larga. Se tiene:

$$Y(z) = (1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3} + \cdots)x(0) \qquad (2\text{-}215)$$

Por tanto, $y(k)$ se escribe como:

$$y(k) = (-1)^k y(0) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2\text{-}216)$$

La ecuación (2-211) se reconoce como una ecuación de estado de primer orden. La solución mediante la transformada z de sistemas en tiempo discreto de orden superior representados por ecuaciones de estado se discute en el Cap. 5. El siguiente ejemplo muestra la solución mediante la transformada z de una ecuación en diferencias de segundo orden.

Ejemplo 2-29

Considere la ecuación en diferencias de segundo orden:

$$y(k+2) + 0.5y(k+1) + 0.2y(k) = u(k) \tag{2-217}$$

en donde:

$$u(k) = u_s(k) = 1 \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2-218}$$

Las condiciones iniciales de $y(k)$ son $y(0) = 0$ y $y(1) = 0$.

Tomando la transformada z en ambos miembros de la ecuación (2-217), se obtiene:

$$[z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1)] + 0.5[zY(z) - zy(0)] + 0.2Y(z) = U(z) \tag{2-219}$$

La transformada z de $u(k)$ es $U(z) = z/(z-1)$. Al sustituir las condiciones iniciales de $y(k)$ y la expresión de $U(z)$ en la ecuación (2-219) y resolviendo para $Y(z)$, se obtiene:

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2+0.5z+0.2)} \tag{2-220}$$

La expansión en fracciones parciales de $Y(z)/z$ es:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{0.588}{z-1} - \frac{1.036e^{j1.283}}{z+0.25+j0.37} - \frac{1.036e^{-j1.283}}{z+0.25-j0.37} \tag{2-221}$$

en donde los exponentes en los coeficientes del numerador están en radianes. Tomando la transformada z inversa de $Y(z)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} y(k) &= 0.588 - 1.036(0.447)^k[e^{-j(2.165k-1.283)} + e^{j(2.165k-1.283)}] \\ &= 0.588 - 2.072(0.447)^k \cos(2.165k - 1.283) \qquad k \geq 0 \end{aligned} \tag{2-222}$$

▲

2-13 Resumen

En este capítulo se han presentado algunos de los fundamentos matemáticos requeridos para el estudio de sistemas de control lineales. Específicamente, la transformada de Laplace se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, y la transformada z se visualiza para resolver ecuaciones en diferencias lineales. Ambos métodos de transformación se caracterizan primero por transformar las ecuaciones del dominio real en ecuaciones algebraicas en el dominio de la transformada. Las soluciones se obtienen primero en el dominio de la transformada utilizando métodos convencionales para resolver ecuaciones algebraicas. La solución final en el dominio real se obtiene tomando la transformada inversa. Para problemas de

ingeniería, los métodos de las tablas de transformadas y la expansión en fracciones parciales se recomiendan para la transformación inversa.

El álgebra de matrices se presenta para simplificar el modelado y la manipulación de sistemas que involucran un número múltiple de variables y ecuaciones. Se proporcionan las definiciones y propiedades del álgebra de matrices. Se demuestra que cuando se tienen disponibles computadoras y software, las soluciones a los problemas de transformada y la manipulación matricial se pueden obtener fácilmente mediante el uso de las mismas.

Preguntas de repaso

1. Defina los polos y ceros de una función de la variable compleja s.
2. ¿Cuáles son las ventajas del método de la transformada de Laplace sobre el método clásico para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales?
3. ¿Qué son las ecuaciones de estado?
4. ¿Qué es un sistema causal?
5. Escriba la ecuación que define la transformada de Laplace unilateral.
6. Escriba la ecuación que define la transformada inversa de Laplace.
7. Proporcione la expresión del teorema del valor final de la transformada de Laplace. ¿Cuál es la condición bajo la cual el teorema es válido?
8. Proporcione la transformada de Laplace de la función escalón unitario, $u_s(t)$.
9. ¿Cuál es la transformada de Laplace de la función rampa unitaria, $tu_s(t)$?
10. Proporcione la transformada de Laplace de $f(t)$ corrida a la derecha (retrasada) por T_d en términos de la transformada de Laplace de $f(t)$, $F(s)$.
11. Si $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$ y $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$, encuentre $\mathcal{L}[f_1(t)f_2(t)]$ en términos de $F_1(s)$ y $F_2(s)$.
12. ¿Sabe cómo se maneja el término exponencial al realizar la expansión en fracciones parciales de:

$$F(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)}e^{-2s}$$

13. ¿Sabe cómo se maneja la expansión en fracciones parciales de una función en la que el orden del denominador no es mayor que el del numerador, por ejemplo:

$$F(s) = \frac{10(s^2+5s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

14. Al tratar de encontrar la transformada inversa de Laplace de la siguiente función ¿se tiene que realizar la expansión en fracciones parciales?

$$F(s) = \frac{1}{(s+5)^3}$$

15. ¿Cuál es la definición del rango de una matriz?

16. ¿Se puede aplicar la condición de rango a una matriz que no es cuadrada?
17. ¿Puede una matriz no cuadrada ser simétrica?
18. Defina la transformada z en términos del operador de Laplace s.
19. Proporcione la transformada z de la función escalón unitario, $u_s(t)$.
20. Proporcione la transformada z de la función rampa unitaria, $tu_s(t)$.
21. Explique por qué la transformada z inversa de $F(z)$ no es $f(t)$.
22. Haga una lista de todos los métodos que conozca para realizar la transformada z inversa.
23. Si la función $F(z)$ tiene por lo menos un cero en $z = 0$, ¿qué paso se debe seguir antes de realizar la expansión en fracciones parciales?
24. ¿Cuál es la diferencia notoria entre las secuencias de tiempo que corresponden a las siguientes dos funciones?

$$F_1(z) = \frac{z}{z-1} \qquad F_2(z) = \frac{z}{z+1}$$

Referencias

Variables complejas, transformadas de Laplace, y álgebra de matrices

1. **F. B. HILDEBRAND,** *Methods of Applied Mathematics,* 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1965.
2. **R. BELLMAN,** *Introduction to Matrix Analysis.* McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.
3. **F. AYRES, JR.,** *Theory and Problems of Matrices,* Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.
4. **B. C. KUO,** *Linear Networks and Systems,* McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.
5. **C. R. WYLIE, JR.,** *Advanced Engineering Mathematics,* 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.

Expansión en fracciones parciales

6. **C. POTTLE,** "On the Partial Fraction Expansion of a Rational Function with Multiple Poles by Digital Computer," *IEEE Trans. Circuit Theory,* Vol. CT-11, pp 161–162, Mar. 1964.
7. **B. O. WATKINS,** "A Partial Fraction Algorithm." *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-16, pp. 489–491, Oct. 1971.

Transformadas z

8. **B. C. KUO,** *Digital Control Systems,* 2nd ed., Saunders College Publishing, New York, 1992.
9. **E. I. JURY,** *Theory and Application of the z-Transform Method,* Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, NY, 1973.

Problemas

▲ Polos y ceros

2-1. Encuentre los polos y ceros de las siguientes funciones (incluyendo los ceros en el infinito, si existe alguno). Señale los polos finitos con × y los ceros finitos con O en el plano s.

(a) $G(s) = \dfrac{10(s+2)}{s^2(s+1)(s+10)}$ (b) $G(s) = \dfrac{10s(s+1)}{(s+2)(s^2+3s+2)}$

(c) $G(s) = \dfrac{10(s+2)}{s(s^2+2s+2)}$ (d) $G(s) = \dfrac{e^{-2s}}{10s(s+1)(s+2)}$

▲ Transformadas de Laplace

2-2. Encuentre las transformadas de Laplace de las siguientes funciones. Utilice los teoremas de las transformadas de Laplace, si se aplican.

(a) $g(t) = 5te^{-5t}u_s(t)$ (b) $g(t) = (t \operatorname{sen} 2t + e^{-2t})u_s(t)$

(c) $g(t) = 2e^{-2t} \operatorname{sen} 2tu_s(t)$ (d) $g(t) = \operatorname{sen} 2t \cos 2tu_s(t)$

(e) $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-5kT}\delta(t-kT)$ donde $\delta(t)$ = función impulso unitario

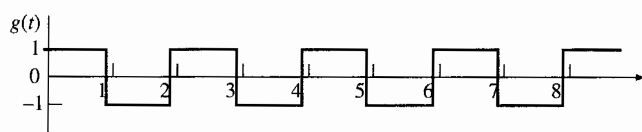
▲ Transformadas de Laplace

2-3. Encuentre las transformadas de Laplace de las funciones mostradas en la Fig. 2P-3. Primero, escriba una expresión completa para $g(t)$ y después obtenga la transformada de Laplace. Sea $g_T(t)$ la descripción de la función en un periodo básico que después se retrasa $g_T(t)$ apropiadamente para obtener $g(t)$. Obtenga la transformada de Laplace de $g(t)$ para obtener $G(s)$.

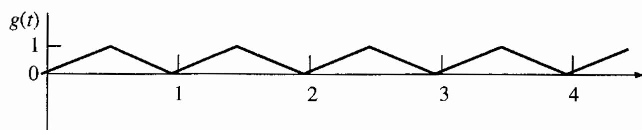
▲ Transformadas de Laplace

2-4. Encuentre la transformada de Laplace de la siguiente función.

$$g(t) = \begin{cases} t+1 & 0 \le t < 1 \\ 0 & 1 \le t < 2 \\ 2-t & 2 \le t < 3 \\ 0 & t \ge 3 \end{cases}$$



(a)



(b)

Figura 2P-3

▲ Transformadas de Laplace

2-5. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales mediante la transformada de Laplace.

(a) $\dfrac{d^2f(t)}{dt^2} + 5\dfrac{df(t)}{dt} + 4f(t) = e^{-2t}u_s(t)$ Suponga condiciones iniciales cero.

(b) $\dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$

$\dfrac{dx_2(t)}{dt} = -2x_1(t) - 3x_2(t) + u_s(t)$ $x_1(0) = 1,\quad x_2(0) = 0$

▲ Transformada inversa de Laplace

2-6. Encuentre las transformadas de Laplace inversas de las siguientes funciones. Primero obtenga la expansión en fracciones parciales de $G(s)$, después utilice la tabla de transformadas de Laplace. Utilice cualquier programa de computadora que tenga disponible para la expansión en fracciones parciales.

(a) $G(s) = \dfrac{1}{s(s+2)(s+3)}$ **(b)** $G(s) = \dfrac{10}{(s+1)^2(s+3)}$

(c) $G(s) = \dfrac{100(s+2)}{s(s^2+4)(s+1)}e^{-s}$ **(d)** $G(s) = \dfrac{2(s+1)}{s(s^2+s+2)}$

(e) $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)^3}$ **(f)** $G(s) = \dfrac{2(s^2+s+1)}{s(s+1.5)(s^2+5s+5)}$

▲ Sumas y restas de matrices

2-7. Realice las siguientes sumas y restas de matrices. No utilice la computadora, ya que son directas.

(a) $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 10 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 3 & 4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 3 & \dfrac{1}{s} \\ \dfrac{2}{s} & 0 & \dfrac{1}{s-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 \\ s & \dfrac{1}{s} & 1 \end{bmatrix}$

▲ Conformabilidad de matrices

2-8. Determine si las siguientes matrices son conformables para los productos **AB** y **BA.** Encuentre los productos válidos.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = [6 \quad 1 \quad 0]$ **(b)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & -10 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

▲ Forma matricial

2-9. Exprese el siguiente conjunto de ecuaciones algebraicas en la forma matricial, **Ax = B.**

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Encuentre la inversa de la matriz **A** para verificar si estas ecuaciones son linealmente independientes. Utilice un programa de computadora como **MATLAB** para encontrar la inversa de **A.** Si las ecuaciones no son linealmente independientes ¿se puede resolver para x_1, x_2 y x_3?

▲ Ecuaciones de estado

2-10. Exprese el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden en la forma matricial.

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + 2x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -2x_2(t) + 3x_3(t) = u_1(t)$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = -x_1(t) - 3x_2(t) - x_3(t) + u_2(t)$$

▲ Matrices inversas

2-11. Encuentre las inversas de las siguientes matrices, si es que existen. Realice los problemas a mano y después mediante cualquier programa de computadora que tenga disponible.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

▲ Rango de una matriz

2-12. Determine los rangos de las siguientes matrices.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

▲ Transformadas z

2-13. Encuentre las transformadas z de las siguientes funciones.

(a) $f(k) = ke^{-3k}$ **(b)** $f(k) = k \operatorname{sen} 2k$

(c) $f(k) = e^{-2k} \operatorname{sen} 3k$ **(d)** $f(k) = k^2e^{-2k}$

▲ Transformadas z

2-14. Determine las transformadas z de las siguientes secuencias.

(a) $f(kT) = kT \operatorname{sen} 2kT$

(b) $f(k) = \begin{cases} 1 & k = 0, 2, 4, 6, \ldots, \text{ enteros pares} \\ -1 & k = 1, 3, 5, 7, \ldots, \text{ enteros impares} \end{cases}$

▲ Expansión en fracciones parciales, transformada z

2-15. Realice la expansión en fracciones parciales de las siguientes funciones, si es que es aplicable, y después encuentre las transformadas z utilizando la tabla de transformadas z.

(a) $F(s) = \dfrac{1}{(s+5)^3}$ **(b)** $F(s) = \dfrac{1}{s^3(s+1)}$

(c) $F(s) = \dfrac{10}{s(s+5)^2}$ **(d)** $F(s) = \dfrac{5}{s(s^2+2)}$

▲ Transformada z inversa

2-16. Encuentre las transformadas z inversas, $f(k)$, de las siguientes funciones. Aplique la expansión en fracciones parciales de $F(z)$ y después utilice la tabla de transformadas z.

(a) $F(z) = \dfrac{10z}{(z-1)(z-0.2)}$ **(b)** $F(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z^2+z+1)}$

(c) $F(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+0.85)}$ **(d)** $F(z) = \dfrac{10}{(z-1)(z-0.5)}$

▲ Transformada z, teorema del valor final

2-17. Dado que $\mathcal{Z}[f(k)] = F(z)$, encuentre el valor de $f(k)$ en cuanto k tiende a infinito, sin obtener la transformada z inversa de $F(z)$. Utilice el teorema del valor final de la transformada z, si se aplica.

(a) $F(z) = \dfrac{0.368z}{(z-1)(z^2-1.364z+0.732)}$ **(b)** $F(z) = \dfrac{10z}{(z-1)(z+1)}$

(c) $F(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$ **(d)** $F(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-1.5)}$

Compruebe las respuestas mediante la división larga de $F(z)$ y exprese dicha división en una serie de potencias de z^{-1}.

▲ Solución mediante transformada z

2-18. Resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias por medio de la transformada z.

(a) $x(k+2) - x(k+1) + 0.1x(k) = u_s(k) \qquad x(0) = x(1) = 0$

(b) $x(k+2) - x(k) = 0 \qquad x(0) = 1, \quad x(1) = 0$

▲ Aplicaciones de la transformada z

2-19. Este problema se enfrenta con la aplicación de las ecuaciones en diferencias y la transformada z para un problema de amortización de préstamo. Considere que un carro nuevo se adquiere con un pago de P_0 dólares en un periodo de N meses, a un interés mensual de r por ciento. El capital y los intereses se deben pagar en N pagos iguales de u dólares cada uno.

(a) Muestre que la ecuación en diferencias que describe el proceso del préstamo se puede escribir como:

$$P(k+1) = (1+r)P(k) - u$$

en donde:

$P(k)$ = la cantidad que se debe después del k-ésimo periodo, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$
$P(0) = P_0$ = la cantidad inicial prestada
$P(N) = 0$ (después de N periodos, no se debe nada)

Las dos últimas condiciones también se conocen como condiciones de frontera.

(b) Resuelva la ecuación en diferencias de la parte (a) mediante el método recursivo, empezando con $k = 0$, después con $k = 1, 2, \ldots$, y así sucesivamente. Demuestre que la solución de la ecuación es:

$$u = \frac{(1+r)^N P_0 r}{(1+r)^N - 1}$$

(c) Resuelva la ecuación en diferencias de la parte (a) mediante el método de la transformada z.

(d) Considere que P_0 = \$15 000, $r = 0.01$ (1% mensual), y $N = 48$ meses. Encuentre u, el pago mensual.

Problemas adicionales para computadora

Los siguientes problemas son para que el lector los resuelva con cualquier programa de cómputo que encuentre a su disposición.

2-20. Realice la expansión en fracciones parciales de las siguientes funciones.

(a) $G(s) = \dfrac{10(s+1)}{s^2(s+4)(s+6)}$ **(b)** $G(s) = \dfrac{s+1}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$

(c) $G(s) = \dfrac{5(s+2)}{s^2(s+1)(s+5)}$ **(d)** $G(s) = \dfrac{5e^{-2s}}{(s+1)(s^2+s+1)}$

(e) $G(s) = \dfrac{100(s^2+s+3)}{s(s^2+5s+3)}$ **(f)** $G(s) = \dfrac{1}{s(s^2+1)(s+0.5)^2}$

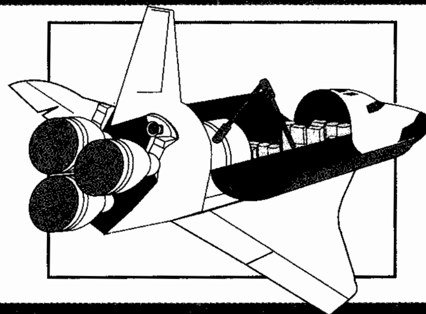
2-21. Encuentre las transformadas inversas de Laplace de las funciones del problema 2-20.

2-22. Realice la expansión en fracciones parciales de las siguientes funciones de transferencia z.

(a) $G(z) = \dfrac{5z}{(z-1)(z-0.1)}$ **(b)** $G(z) = \dfrac{10z(z-0.2)}{(z-1)(z-0.5)(z-0.8)}$

(c) $G(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-0.5)^2}$ **(d)** $G(z) = \dfrac{2z}{(z-1)(z^2-z+1)}$

3 Funciones de transferencia, diagramas de bloques, gráficas de flujo de señal



PALABRAS CLAVE Y TEMAS

- ▲ Funciones de transferencia
- ▲ Gráficas de flujo de señal
- ▲ Respuesta al impulso
- ▲ Diagramas de estado
- ▲ Diagramas de bloques

3-1 Introducción

Un primer paso importante en el análisis y diseño de sistemas de control es el modelado matemático de los procesos controlados. En general, dado un proceso controlado, primero se debe definir el conjunto de variables que describen las características dinámicas de dicho proceso. Por ejemplo, considere un motor utilizado para fines de control. Las variables del sistema se pueden identificar como el voltaje aplicado, la corriente en el embobinado de la armadura, el par desarrollado en el eje del rotor, y el desplazamiento angular y la velocidad del rotor. Estas variables están interrelacionadas a través de leyes físicas establecidas, que conllevan a ecuaciones matemáticas que describen la dinámica del motor. Dependiendo de la condición de operación del motor, así como del énfasis del modelado, las ecuaciones del sistema pueden ser lineales o no lineales, variantes o invariantes con el tiempo.

Las leyes físicas que gobiernan los principios de operación de sistemas en la vida real pueden resultar bastante complejas, por lo que una caracterización realista del sistema puede requerir ecuaciones no lineales y/o variantes en el tiempo de difícil solución. Por razones prácticas, para establecer una clase de análisis aplicable y diseñar herramientas para sistemas de control, se hacen suposiciones y aproximaciones a los sistemas físicos cuando es posible, de tal forma que estos sistemas puedan ser estudiados utilizando la teoría de sistemas lineales. Existen dos formas de justificar la aproximación de sistemas lineales. Una es que el sistema es básicamente lineal, o que es operado en la región lineal, por lo que la mayoría de las condiciones de linealidad se cumplen. La segunda es que el sistema es básicamente no lineal u operado en una región no lineal, pero para aplicar herramientas de análisis y diseño lineal, el sistema se linealiza con respecto a un punto de operación nominal, tal como el descrito en la Sec. 4-7. Debe mantenerse en mente que el análisis es aplicable solamente para el rango de variables en donde la linealización es válida. Por lo que, las palabras clave para el análisis y diseño de sistemas de control lineales son: **suposición, identificación, linealización** y **modelado.**

3-2 Respuesta al impulso y funciones de transferencia de sistemas lineales

La forma clásica de modelar sistemas lineales es utilizar **funciones de transferencia** para representar las relaciones entrada-salida entre variables. Una forma de determinar la función de transferencia es empleando la **respuesta al impulso**, que se define a continuación.

3-2-1 Respuesta al impulso

▲ La respuesta al impulso es la salida cuando la entrada es una función impulso unitario.

Considere que un sistema lineal invariante en el tiempo tiene la entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$. El sistema se puede caracterizar por su **respuesta al impulso** $g(t)$, que se define como la salida cuando la entrada es una función impulso unitario $\delta(t)$. Una vez que se conoce la respuesta al impulso de un sistema lineal, la salida del sistema, $y(t)$, para *cualquier* entrada, $u(t)$, se puede encontrar mediante la **función de transferencia.**

3-2-2 Función de transferencia (sistemas con una entrada y una salida)

▲ La función de transferencia de un sistema lineal es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso, con condiciones iniciales cero.

La función de transferencia de un sistema lineal invariante con el tiempo se define como la transformada de Laplace de la respuesta al impulso, con todas las condiciones iniciales iguales a cero. Suponga que $G(s)$ denota la función de transferencia de un sistema con una entrada y una salida, con entrada $u(t)$ y salida $y(t)$ y respuesta del impulso $g(t)$. Entonces la función de transferencia $G(s)$ se define como:

$$G(s) = \mathscr{L}[g(t)] \tag{3-1}$$

La función de transferencia $G(s)$ se relaciona con la transformada de Laplace de la entrada y la salida a través de la siguiente relación:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{3-2}$$

con todas las condiciones iniciales puestas a cero, $Y(s)$ y $U(s)$ son las transformadas de Laplace de $y(t)$ y $u(t)$, respectivamente.

Aunque la función de transferencia de un sistema lineal se define en términos de la respuesta al impulso, en la práctica, la relación entrada-salida de un sistema lineal invariante con el tiempo con entrada en tiempo continuo, se describe a menudo mediante una ecuación diferencial, por lo que es conveniente obtener la función de transferencia directamente de la ecuación diferencial. Considere que la relación entrada-salida de un sistema lineal invariante con el tiempo se describe mediante la siguiente ecuación diferencial de n-ésimo orden con coeficientes reales constantes:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m\frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \tag{3-3}$$

Los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, y $b_0, b_1, \ldots, b_m$, son constantes reales. Una vez que la entrada $u(t)$ para $t \geq t_0$, y las condiciones iniciales de $y(t)$ y las derivadas de $y(t)$ se especifican en el tiempo inicial $t = t_0$, la respuesta de salida $y(t)$ para $t \geq t_0$ se determina al resolver la ecuación (3-3). Sin embargo, desde el punto de vista del análisis y diseño de sistemas lineales, el método que emplea ecuaciones diferenciales en forma exclusiva es bastante molesto. Por lo que las ecuaciones diferenciales de la forma de la ecuación (3-3) rara vez se emplean en su forma original para el análisis y diseño de sistemas de control. Debe señalarse que, aun cuando existen disponibles subrutinas eficientes en computadoras digitales para la solución de ecuaciones diferenciales de orden superior, *la filosofía básica de la teoría de control lineal es el desarrollo de herramientas de análisis y diseño que eviten la solución exacta de las ecuaciones diferenciales del sistema*, excepto cuando se desean las soluciones mediante simulación en computadora para presentación final o verificación. En la teoría clásica de control, la simulación por computadora empieza, a menudo, con funciones de transferencia en lugar de ecuaciones diferenciales.

Para obtener la función de transferencia del sistema lineal que está representado por la ecuación (3-3), simplemente se toma la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación y se suponen **condiciones iniciales cero**. El resultado es:

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)U(s) \tag{3-4}$$

La función de transferencia entre $u(t)$ y $y(t)$ está dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{3-5}$$

Las propiedades de la función de transferencia se resumen a continuación:

1. La función de transferencia está definida solamente para un sistema lineal invariante con el tiempo. No está definida para sistemas no lineales.
2. La función de transferencia entre una variable de entrada y una variable de salida de un sistema está definida como la transformada de Laplace de la respuesta al impulso. En forma alterna, la función de transferencia entre un par de variables de entrada y salida es la relación entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada.
3. Todas las condiciones iniciales del sistema son iguales a cero.
4. La función de transferencia es independiente de la entrada del sistema.
5. La función de transferencia de un sistema en tiempo continuo se expresa sólo como una función de la variable compleja s. No es función de la variable real, tiempo, o cualquier otra variable que se utilice como la variable independiente. Para sistemas en tiempo discreto modelados por ecuaciones en diferencias, la función de transferencia es una función de z cuando se emplea la transformada z.

Funciones de transferencia propias. Se dice que la función de transferencia de la ecuación (3-5) es **estrictamente propia** si el grado del polinomio denominador es mayor que el del polinomio numerador (*i.e.*, $n > m$). Si $n = m$, la función de transferencia se conoce como **propia**. La función de transferencia es **impropia** si $m > n$.

▲ La ecuación característica de un sistema lineal se obtiene al hacer que el polinomio del denominador de la función de transferencia sea cero.

Ecuación característica. *La* **ecuación característica** *de un sistema lineal se define como la ecuación que se obtiene al hacer que el polinomio denominador de la función de transferencia sea cero.* Por tanto, de la ecuación (3-5), la ecuación característica del sistema descrito por la ecuación (3-3) es:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{3-6}$$

Posteriormente, se mostrará que la estabilidad de sistemas lineales con una entrada y una salida está gobernada completamente por las raíces de la ecuación característica.

3-2-3 Función de transferencia (sistemas multivariables)

La definición de la función de transferencia se amplía fácilmente a sistemas con entradas y salidas múltiples. Un sistema de este tipo se denomina **sistema multivariable**. En un sistema multivariable, una ecuación diferencial de la forma de la ecuación (3-3) se puede utilizar para describir la relación entre un par entrada-salida cuando todas las otras entradas se hacen cero. Puesto que el principio de superposición es válido para sistemas lineales, el efecto total sobre cualquier salida debido a todas las entradas que actúan simultáneamente se obtiene al sumar las salidas producidas por cada entrada que actúe sola.

En la práctica, hay bastantes ejemplos de sistemas multivariables. Por ejemplo, en el control de velocidad $\omega(t)$ de un motor sujeto a un par de perturbación externo, $T_d(t)$, mediante el controLdel voltaje de entrada, $v(t)$, el sistema se considera que tiene dos entradas en $v(t)$ y en $T_d(t)$ y una salida en $\omega(t)$. Otro ejemplo es el sistema de control de velocidad en ralentí del motor de un automóvil. En este caso las dos entradas son las cantidades de combustible y de aire que entran al motor, y la salida es la velocidad en ralentí del motor. En el control de un avión con motor de turbohélice mostrado en la Fig. 3-1, las variables de entrada son el flujo de combustible y el ángulo del aspa de la hélice. Las variables de salida son la velocidad de rotación del motor y la temperatura de la turbina. En general, cualquiera de las salidas es afectada por los cambios en ambas entradas. Por ejemplo, cuando el ángulo del aspa de la hélice se incrementa, la velocidad de rotación del motor disminuirá y la temperatura usualmente aumentará. La siguientes relaciones de funciones de transferencia se pueden determinar a través de pruebas realizadas en el sistema:

$$Y_1(s) = G_{11}(s)R_1(s) + G_{12}(s)R_2(s) \tag{3-7}$$
$$Y_2(s) = G_{21}(s)R_1(s) + G_{22}(s)R_2(s) \tag{3-8}$$

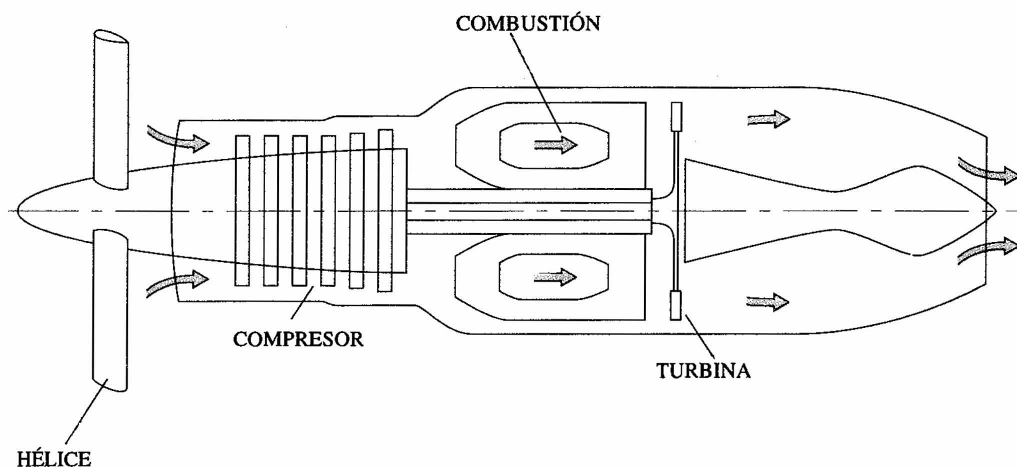


Figura 3-1 Motor de turbohélice de un avión.

en donde:

$Y_1(s)$ = velocidad de rotación del motor
$Y_2(s)$ = temperatura de la turbina
$R_1(s)$ = flujo de combustible
$R_2(s)$ = ángulo del aspa de la hélice

todas las variables medidas con respecto a algún valor de referencia en términos de transformada de Laplace. La función de transferencia $G_{11}(s)$ representa la relación entre el flujo de combustible y la velocidad del motor, con el ángulo del aspa de la hélice mantenida en el valor de referencia; esto es, $R_2(s) = 0$. Se pueden dar definiciones similares para las otras funciones de transferencia, $G_{12}(s)$, $G_{21}(s)$ y $G_{22}(s)$.

En general, si un sistema lineal tiene p entradas y q salidas, la función de transferencia entre la j-ésima entrada y la i-ésima salida está definida como:

$$G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{R_j(s)} \tag{3-9}$$

con $R_k(s) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, p$, $k \neq j$. Observe que la ecuación (3-9) está definida solamente con el efecto de j-ésima la entrada, mientras que las otras entradas son puestas a cero. Cuando todas las p entradas están en acción, la transformada de la i-ésima salida se escribe como:

$$Y_i(s) = G_{i1}(s)R_1(s) + G_{i2}(s)R_2(s) + \cdots + G_{ip}(s)R_p(s) \tag{3-10}$$

Es conveniente expresar la ecuación (3-10) en forma matricial:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{R}(s) \tag{3-11}$$

en donde:

$$\mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_q(s) \end{bmatrix} \tag{3-12}$$

es el **vector de salidas transformado** de $q \times 1$;

$$\mathbf{R}(s) = \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \\ \vdots \\ R_q(s) \end{bmatrix} \tag{3-13}$$

es el **vector de las entradas transformado** de $p \times 1$; y

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1p}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2p}(s) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ G_{q1}(s) & G_{q2}(s) & \cdots & G_{qp}(s) \end{bmatrix} \tag{3-14}$$

es la **matriz de funciones de transferencia** de $q \times p$.

3-3 Diagramas de bloques

Debido a su simplicidad y versatilidad, los *diagramas de bloques* se emplean, con frecuencia, por los ingenieros de control para modelar todo tipo de sistemas. Un diagrama de bloques se puede utilizar simplemente para describir la composición e interconexión de un sistema. O se puede emplear, junto con funciones de transferencia, para describir las relaciones de causa y efecto a través de todo el sistema. Por ejemplo, el diagrama de bloques de la Fig. 3-2(a) modela un sistema de control de velocidad en lazo abierto de un motor de cd. En este caso, el diagrama de bloques simplemente muestra cómo se conectan los componentes del sistema, y no se proporciona ningún detalle matemático. Si se conoce la relación matemática y funcional de todos los elementos del sistema, el diagrama de bloques se puede emplear como una herramienta para obtener la solución analítica o por computadora del sistema. En general, los diagramas de bloques se pueden utilizar para el modelado de

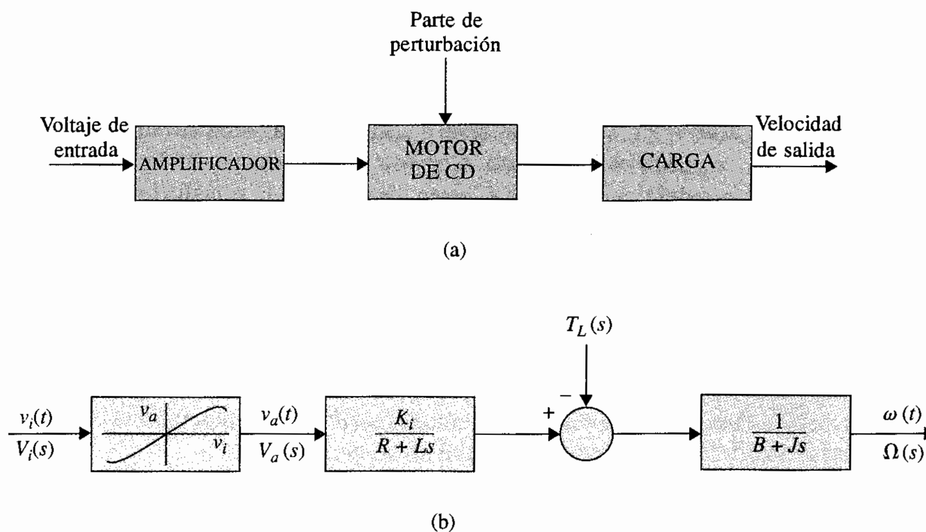


Figura 3-2 (a) Diagrama de bloques de un sistema de control de un motor de cd. (b) Diagrama de bloques con funciones de transferencia y características del amplificador.

sistemas lineales así como el de no lineales. Por ejemplo, las relaciones entrada-salida del sistema de control del motor de cd se pueden representar mediante el diagrama de bloques que se muestra en la Fig. 3-2(b). En la figura, el voltaje de entrada al motor es la salida del amplificador de potencia, el cual, en la realidad, tiene una característica no lineal. Si el motor es lineal, o, más correctamente, se debería decir que si es operado en la región lineal de sus características, su dinámica se puede representar mediante funciones de transferencia. La ganancia del amplificador no lineal se puede describir solamente entre las variables de tiempo $v_i(t)$ y $v_a(t)$, y no existe función de transferencia entre las variables de la transformada de Laplace $V_i(s)$ y $V_a(s)$. Sin embargo, si la magnitud de $v_i(t)$ está limitada al intervalo lineal del amplificador, éste se puede considerar como lineal, y se puede describir por la función de transferencia:

$$\frac{V_a(s)}{V_i(s)} = K \tag{3-15}$$

en donde K es una constante que es la pendiente de la región lineal de las características del amplificador.

3-3-1 Diagramas de bloques de sistemas de control

Ahora se definirán los elementos del diagrama de bloques empleados frecuentemente en sistemas de control y en el álgebra relacionada. Uno de los componentes importantes de un sistema de control es el dispositivo detector que actúa como un punto de unión para la comparación de señales. Los componentes físicos involucrados son el potenciómetro, sincro, resolver, amplificador diferencial, multiplicador y otros transductores para procesamiento de señales. En general, los dispositivos detectores realizan operaciones matemáticas simples como **suma, resta, multiplicación** (no lineal), y algunas veces combinaciones de éstas. Las representaciones en diagrama de bloques de estas operaciones se ilustran en la Fig. 3-3. Las operaciones de suma y resta de la Fig. 3-3(a), (b) y (c) son lineales, por lo que las variables de entrada y salida de estos elementos del diagrama de bloques pueden ser variables en el dominio del tiempo o variables en términos de la transformada de Laplace. Por tanto, en la Fig. 3-3(a), el diagrama de bloques implica que:

$$e(t) = r(t) - y(t) \tag{3-16}$$

o

$$E(s) = R(s) - Y(s) \tag{3-17}$$

La operación de multiplicación mostrada en la Fig. 3-3(d) es no lineal, por lo que la relación entrada-salida tiene significado solamente en el dominio real (tiempo):

$$e(t) = r(t) \times y(t) \tag{3-18}$$

Es importante tener en mente que la multiplicación en el dominio real *no se traduce directamente* al dominio de la transformada de Laplace, por lo que $E(s) \neq R(s) \times Y(s)$. En lugar de:

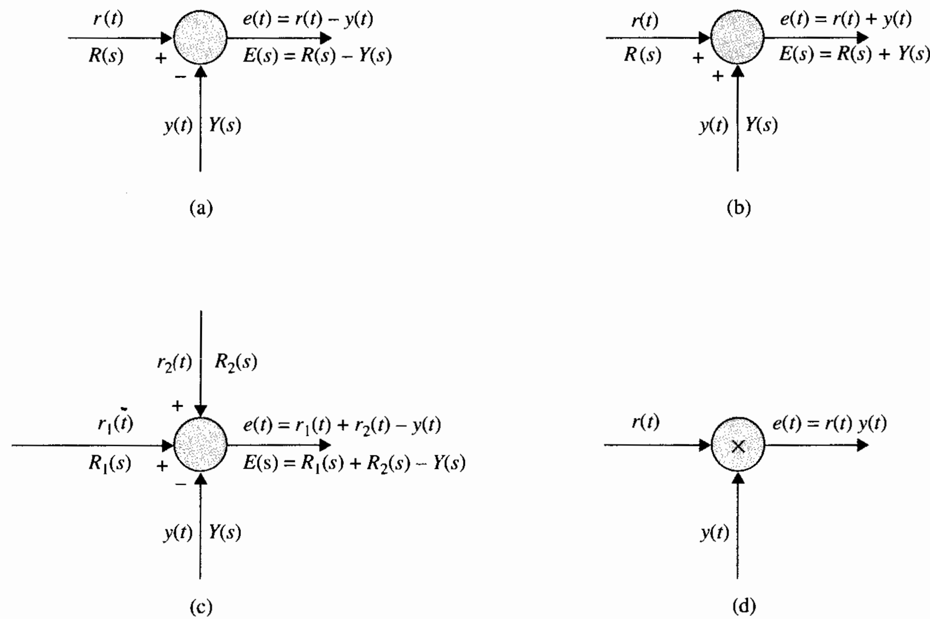


Figura 3-3 Elementos de un diagrama de bloques de dispositivos típicos de detención de sistemas de control. (a) Resta. (b) Suma. (c) Suma y resta. (d) Multiplicación.

ello, cuando la ecuación (3-18) se transforma, se debe leer como: $E(s) = R(s) * Y(s)$, en donde en este caso el símbolo * representa la **convolución compleja** de $R(s)$ y $Y(s)$ en el dominio de Laplace.

La Fig. 3-4 muestra el diagrama de bloques de un sistema de control realimentado lineal. La siguiente terminología se define con referencia al diagrama:

$r(t), R(s)$ = entrada de referencia (comando)
$y(t), Y(s)$ = salida (variable controlada)
$b(t), B(s)$ = señal de realimentación
$u(t), U(s)$ = señal actuante = señal de error $e(t), E(s)$, cuando $H(s) = 1$
$H(s)$ = función de transferencia de realimentación
$G(s)H(s)$ = $L(s)$ = función de transferencia del lazo
$G(s)$ = función de transferencia de la trayectoria directa
$M(s) = Y(s)/R(s)$ = función de transferencia en lazo cerrado o función de transferencia del sistema

La función de transferencia en lazo cerrado $M(s)$ se puede expresar como una función de $G(s)$ y $H(s)$. De la Fig. 3-4 se escribe:

$$Y(s) = G(s)U(s) \tag{3-19}$$

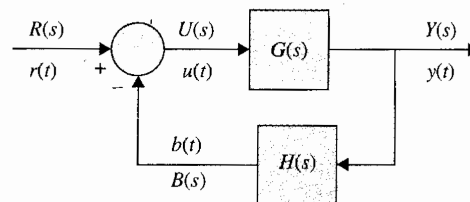


Figura 3-4 Diagrama de bloques básicos de un sistema de control realimentado.

y

$$B(s) = H(s)Y(s) \tag{3-20}$$

La señal actuante se escribe como:

$$U(s) = R(s) - B(s) \tag{3-21}$$

Al sustituir la ecuación (3-21) en la ecuación (3-19) se obtiene:

$$Y(s) = G(s)R(s) - G(s)B(s) \tag{3-22}$$

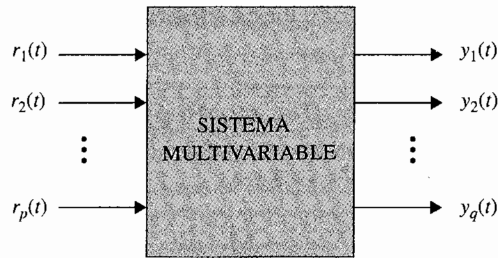
Al sustituir la ecuación (3-20) en la ecuación (3-22) y resolviendo para $Y(s)/R(s)$ se obtiene la función de transferencia en lazo cerrado:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{3-23}$$

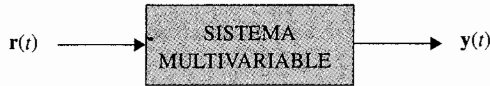
En general, un sistema de control puede contener más de un lazo de realimentación, y la obtención de la función de transferencia a partir del diagrama de bloques por medio del método algebraico descrito puede ser tediosa. Sin embargo, en principio, el diagrama de bloques de un sistema con una entrada y una salida siempre se puede reducir a la forma básica del lazo sencillo de la Fig. 3-4, los pasos algebraicos involucrados en el proceso de reducción pueden ser otra vez muy tediosos. En la Sec. 3-4 se muestra que la función de transferencia de cualquier sistema lineal se puede obtener directamente a partir de su diagrama de bloques mediante el empleo de la fórmula de ganancia de la gráfica de flujo de señal.

3-3-2 Diagramas de bloques y funciones de transferencia de sistemas multivariables

En esta sección se ilustra el diagrama de bloques y la representación matricial de sistemas multivariables. Dos representaciones de diagramas de bloques de un sistema multivariable con p entradas y q salidas se muestran en la Fig. 3-5. En la Fig. 3-5(a), las señales de entrada y salida se designan en forma individual, mientras que en el diagrama de bloques de la Fig. 3-5(b), la



(a)



(b)

Figura 3-5 Representación en diagrama de bloques de un sistema multivariable.

multiplicidad de las entradas y salidas se denotan por vectores. El caso de la Fig. 3-5(b) es preferible en la práctica debido a su simplicidad.

La Fig. 3-6 muestra el diagrama de bloques de un sistema de control realimentado multivariable. Las relaciones de la función de transferencia del sistema se expresan en forma matricial:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s) \tag{3-24}$$

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{R}(s) - \mathbf{B}(s) \tag{3-25}$$

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{Y}(s) \tag{3-26}$$

en donde $\mathbf{Y}(s)$ es el vector de salida de $q \times 1$; $\mathbf{U}(s)$, $\mathbf{R}(s)$ y $\mathbf{B}(s)$ son vectores de $p \times 1$; y $\mathbf{G}(s)$ y $\mathbf{H}(s)$ son matrices de funciones de transferencia de $q \times p$ y $p \times q$, respectivamente. Al sustituir la ecuación (3-26) en la ecuación (3-25) y después la ecuación (3-25) en la ecuación (3-24), se obtiene:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{R}(s) - \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)\mathbf{Y}(s) \tag{3-27}$$

De la ecuación (3-27), resolviendo para $\mathbf{Y}(s)$ se obtiene:

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)]^{-1}\mathbf{G}(s)\mathbf{R}(s) \tag{3-28}$$

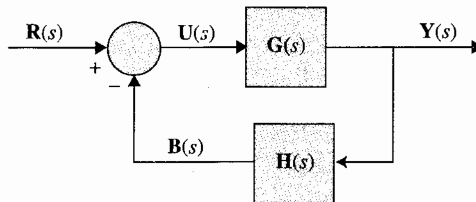


Figura 3-6 Diagrama de bloques de un sistema de control realimentado multivariable.

considerando que $\mathbf{I}+\mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)$ es no singular. La matriz de transferencia en lazo cerrado se define como:

$$\mathbf{M}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)]^{-1}\mathbf{G}(s) \tag{3-29}$$

Entonces, la ecuación (3-28) se escribe como:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{M}(s)\mathbf{R}(s) \tag{3-30}$$

Ejemplo 3-1

Considere que la matriz de funciones de transferencia de trayectoria directa y la matriz de funciones de transferencia de la trayectoria de realimentación del sistema mostrado en la Fig. 3-6 son:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & -\dfrac{1}{s} \\ 2 & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-31}$$

respectivamente. La matriz de funciones de transferencia en lazo cerrado del sistema está dada por la ecuación (3-29) y se evalúa como sigue:

$$\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} 1+\dfrac{1}{s+1} & -\dfrac{1}{s} \\ 2 & 1+\dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{s+1} & -\dfrac{1}{s} \\ 2 & \dfrac{s+3}{s+2} \end{bmatrix} \tag{3-32}$$

La matriz de funciones de transferencia en lazo cerrado es:

$$\mathbf{M}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)]^{-1}\mathbf{G}(s) = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{s+2} & \dfrac{1}{s} \\ -2 & \dfrac{s+2}{s+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & -\dfrac{1}{s} \\ 2 & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix} \tag{3-33}$$

en donde:

$$\Delta = \frac{s+2}{s+1}\frac{s+3}{s+2} + \frac{2}{s} = \frac{s^2+5s+2}{s(s+1)} \tag{3-34}$$

Por lo que:

$$\mathbf{M}(s) = \frac{s(s+1)}{s^2+5s+2}\begin{bmatrix} \dfrac{3s^2+9s+4}{s(s+1)(s+2)} & -\dfrac{1}{s} \\ 2 & \dfrac{3s+2}{s(s+1)} \end{bmatrix} \tag{3-35}$$

▲

3-4 Gráficas de flujo de señal

Una gráfica de flujo de señal (SFG [Signal-Flow Graph]) se puede ver como una versión simplificada de un diagrama de bloques. La SFG fue introducida por S. J. Mason [2] para la representación de causa y efecto de sistemas lineales que son modelados por ecuaciones algebraicas. Además de la diferencia en apariencia física de la SFG y el diagrama de bloques, la gráfica de flujo de señal se puede ver como restringida por reglas matemáticas más rígidas, mientras que el uso de la notación del diagrama de bloques es más liberal. Una SFG se puede definir como un medio gráfico de retratar las relaciones entrada-salida entre las variables de un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales.

Considere que un sistema lineal está descrito por un conjunto de N ecuaciones algebraicas:

$$y_j = \sum_{k=1}^{N} a_{kj} y_k \qquad j = 1, 2, \ldots, N \tag{3-36}$$

Debe señalarse que estas N ecuaciones están escritas en la forma de relaciones de causa y efecto:

$$j\text{-ésimo efecto} = \sum_{k=1}^{N} (\text{ganancia desde } K \text{ a } j) \times (k\text{-ésima causa}) \tag{3-37}$$

o simplemente:

$$\text{salida} = \sum \text{ganancia} \times \text{entrada} \tag{3-38}$$

Éste es el axioma más importante en la formación del conjunto de ecuaciones algebraicas para las SFG. En el caso de que el sistema esté representado por un conjunto de ecuaciones integrodiferenciales, primero se deben transformar en ecuaciones de la transformada de Laplace y después se rearreglan estas últimas en la forma de la ecuación (3-36), o:

$$Y_j(s) = \sum_{k=1}^{N} G_{kj}(s) Y_k(s) \qquad j = 1, 2, \ldots, N \tag{3-39}$$

3-4-1 Elementos básicos de una gráfica de flujo de señal

▲ En una SFG las señales se pueden transmitir a través de una rama sólo en la dirección de la flecha.

Cuando se construye una SFG, los puntos de unión, o **nodos**, se utilizan para representar variables. Los nodos están conectados por segmentos lineales llamados **ramas**, de acuerdo con las ecuaciones de causa y efecto. Las ramas tienen ganancias y direcciones asociadas. *Una señal se puede transmitir a través de una rama solamente en la dirección de la flecha.* En general, dado un conjunto de ecuaciones tales como las ecuaciones (3-36) o (3-39), la construcción de una SFG consiste en seguir las relaciones de causa y efecto relacionando cada variable en términos de sí misma y de las otras. Por ejemplo, considere que un sistema lineal está representado por la ecuación algebraica sencilla:

$$y_2 = a_{12} y_1 \tag{3-40}$$

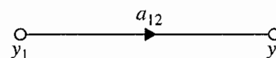


Figura 3-7 Gráfica de flujo de señal de $y_2 = a_{12}\, y_1$.

en donde y_1 es la entrada, y_2 la salida, y a_{12} la ganancia, o transmitancia, entre las dos variables. La representación en SFG de la ecuación (3-40) se muestra en la Fig. 3-7. Observe que la rama que se dirige del nodo y_1 (entrada) al nodo y_2 (salida) expresa la dependencia de y_2 sobre y_1, pero no el contrario. La rama entre el nodo de entrada y el de salida se debe interpretar como un amplificador unilateral con ganancia a_{12}, por lo que cuando una señal de magnitud uno se aplica en la entrada y_1, una señal de magnitud $a_{12}y_1$ se entrega en el nodo y_2. Aunque en forma algebraica la ecuación (3-40) se puede escribir como:

$$y_1 = \frac{1}{a_{12}} y_2 \tag{3-41}$$

la SFG de la Fig. 3-7 no implica esta relación. Si la ecuación (3-41) es válida como una ecuación de causa y efecto, se debe dibujar una SFG nueva con y_2 como la entrada y y_1 como la salida.

Ejemplo 3-2

Como un ejemplo de la construcción de una SFG, considere el siguiente conjunto de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} y_2 &= a_{12}y_1 + a_{32}y_3 \\ y_3 &= a_{23}y_2 + a_{43}y_4 \\ y_4 &= a_{24}y_2 + a_{34}y_3 + a_{44}y_4 \\ y_5 &= a_{25}y_2 + a_{45}y_4 \end{aligned} \tag{3-42}$$

La SFG para estas ecuaciones se construye, paso por paso, como se muestra en la Fig. 3-8. ▲

3-5 Resumen de las propiedades básicas de una gráfica de flujo de señal

Las propiedades importantes de la SFG que han sido cubiertas hasta el momento se resumen como siguen:

1. La SFG se aplica solamente a sistemas lineales.
2. Las ecuaciones a partir de las cuales se dibuja una SFG deben ser algebraicas en la forma de causa y efecto.
3. Los nodos se utilizan para expresar variables. Normalmente, los nodos se arreglan de izquierda a derecha, desde la entrada a la salida, siguiendo una sucesión de relaciones de causa y efecto a través del sistema.

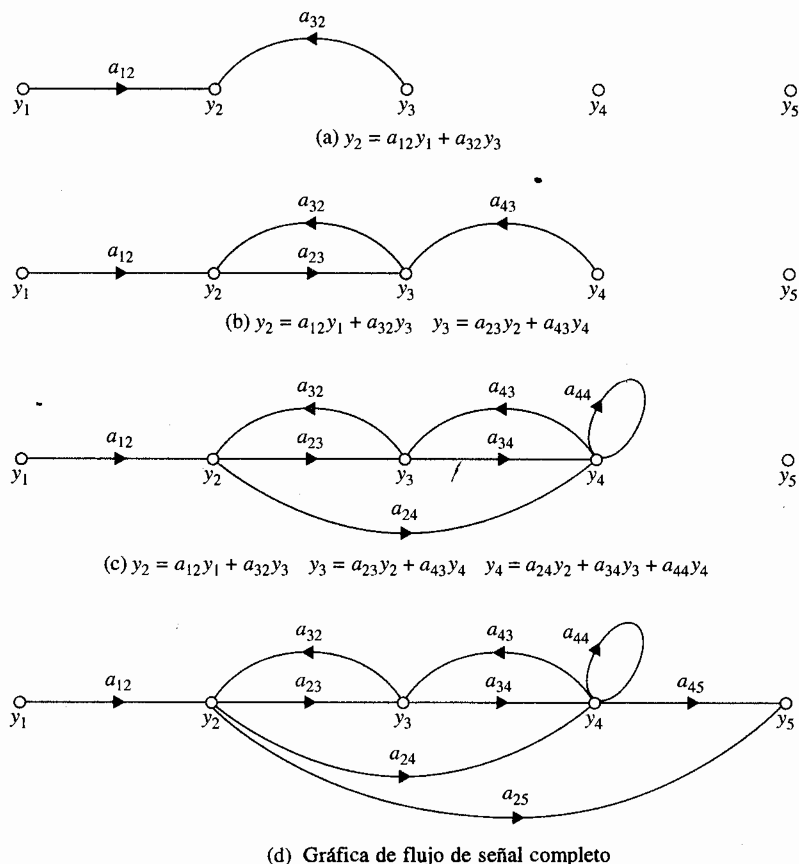


Figura 3-8 Construcción paso a paso de la gráfica de flujo de señal para la ecuación (3-42).

4. La señal viaja a través de las ramas solamente en la dirección descrita por las flechas.
5. La dirección de la rama desde el nodo y_k a y_j representa la dependencia de y_j sobre y_k, pero no al contrario.
6. Una señal y_k que viaja a través de una rama entre y_k y y_j se multiplica por la ganancia de la rama, a_{kj}, por lo que la señal $a_{kj}y_k$ es entregada en y_j.

3-6 Definiciones de los términos de una gráfica de flujo de señal

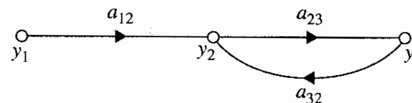
Además de las ramas y los nodos definidos anteriormente para una SFG, los siguientes términos son útiles para el propósito de identificar y realizar las operaciones del álgebra de un SFG.

▲ Un nodo de entrada tiene sólo ramas de salida.

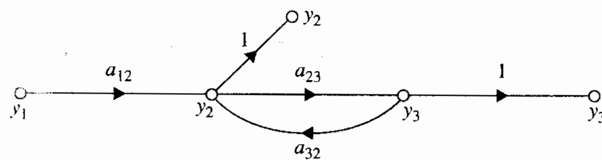
▲ Un nodo de salida tiene sólo ramas de entrada.

Nodo de entrada (fuente). *Un* **nodo de entrada** *es un nodo que tiene solamente ramas de salida.* (Ejemplo: nodo y_1, en la Fig. 3-8.)

Nodo de salida (pozo). *Un* **nodo de salida** *es un nodo que tiene solamente ramas de entrada.* (Ejemplo: nodo y_5 en la Fig. 3-8.) Sin embargo, esta condición no siempre se alcanza mediante un nodo de salida. Por ejemplo, la SFG de la Fig. 3-9(a) no tiene ningún nodo que satisface la condición de un nodo de salida. Puede ser necesario visualizar a y_2 y/o y_3 como nodos de salida, para el propósito de encontrar los efectos en estos nodos debido a la entrada. Para hacer que y_2 sea un nodo de salida, simplemente se conecta una rama con ganancia unitaria desde el nodo existente y_2 a un nuevo nodo también designado como y_2, como se muestra en la Fig. 3-9(b). El mismo procedimiento se aplica a y_3. Observe que la modificación de la SFG de la Fig. 3-9(b), es equivalente a que las ecuaciones $y_2 = y_2$ y $y_3 = y_3$ se añaden a las ecuaciones originales. En general, cualquier nodo de no entrada de una SFG se puede hacer uno de salida mediante el procedimiento ilustrado. Sin embargo, **no se puede** convertir un nodo de no entrada en un nodo de entrada revirtiendo la dirección de la rama del procedimiento descrito para los nodos de salida. Por ejemplo, el nodo y_2 de la SFG de la Fig. 3-9(a) no es un nodo de entrada. Si se intenta convertirlo en un nodo de entrada mediante la adición de una rama entrante con ganancia unitaria desde otro nodo idéntico, y_2, resulta la SFG de la Fig. 3-10. La



(a) Gráfica de flujo de señal original



(b) Gráfica de flujo de señal modificado

Figura 3-9 Modificación de una gráfica de flujo de señal para que y_2 y y_3 satisfagan los requisitos como nodos de salida.

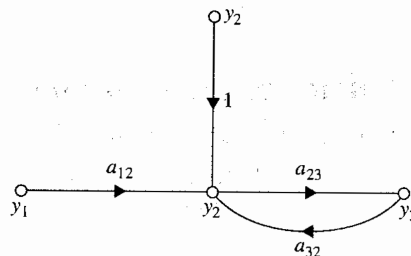


Figura 3-10 Forma equivocada para hacer al nodo y_2 un nodo de entrada.

ecuación que retrata la relación en el nodo y_2 ahora se lee como:

$$y_2 = y_2 + a_{12}y_1 + a_{32}y_3 \tag{3-43}$$

que es diferente al de la ecuación original dada en la Fig. 3-8(a).

Trayectoria. *Una* **trayectoria** *es cualquier colección de una sucesión continua de ramas que se dirigen en la misma dirección.* La definición de una trayectoria es enteramente general, ya que no previene que cualquier nodo la atraviese más de una vez. Por tanto, la simple SFG de la Fig. 3-9(a), puede tener numerosas trayectorias que atraviesan las ramas a_{23} y a_{32} en forma continua.

Trayectoria directa. *Una* **trayectoria directa** *es una trayectoria que empieza en un nodo de entrada y termina en un nodo de salida, a lo largo de la cual ningún nodo se atraviesa más de una vez.* Por ejemplo, en la SFG de la Fig. 3-8(d), y_1 es el nodo de entrada, y el resto de los nodos son todos nodos posibles de salida. La trayectoria entre y_1 y y_2 es simplemente la rama conectada entre los dos nodos. Existen dos trayectorias entre y_1 y y_3; una contiene las ramas desde y_1 a y_2 a y_3, y la otra contiene las ramas desde y_1 a y_2 a y_4 (a través de la rama con ganancia a_{24}) y entonces de regreso a y_3 (a través de la rama con ganancia a_{43}. El lector debe tratar de determinar las dos trayectorias directas entre y_1 y y_4. De forma similar, existen tres trayectorias directas entre y_1 y y_5.

Malla. *Una* **malla** *es una trayectoria que se origina y termina en el mismo nodo y en donde ningún otro nodo se encuentra más de una vez.* Por ejemplo, existen cuatro mallas en la SFG de la Fig. 3-8(d). Éstas se muestran en la Fig. 3-11.

Ganancia de la trayectoria. *El producto de las ganancias de las ramas que atraviesan una trayectoria se llama* **ganancia de la trayectoria.** Por ejemplo, la ganancia de la trayectoria para la trayectoria y_1–y_2–y_3–y_4 de la Fig. 3-8(d) es $a_{12}a_{23}a_{34}$.

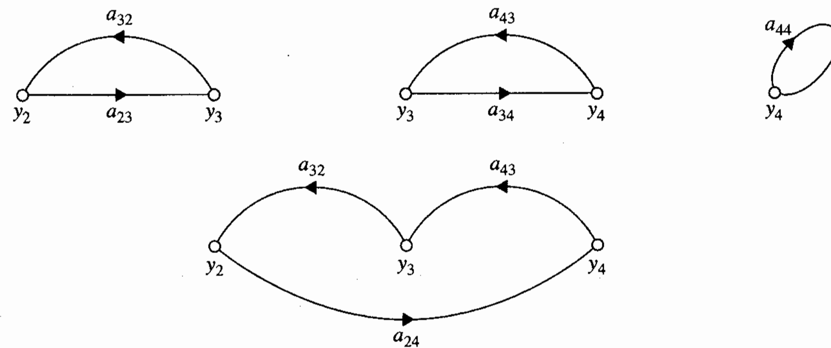


Figura 3-11 Cuatro mallas en la gráfica de flujo de señal de la Fig. 3-8(d).

Ganancia de la trayectoria directa. *La* **ganancia de la trayectoria directa** *es la ganancia de la trayectoria de una trayectoria directa.*

Ganancia de malla. *La* **ganancia de malla** *es la ganancia de la trayectoria de una malla.* Por ejemplo, la ganancia de malla de la malla y_2–y_4–y_3–y_2 de la Fig. 3-11 es $a_{24}a_{43}a_{32}$.

▲ Dos partes de una SFG no se tocan si no comparten un nodo en común.

Mallas que no se tocan. *Dos partes de una SFG* **no se tocan** *si no comparten un nodo común.* Por ejemplo, las mallas y_2–y_3–y_2 y y_4–y_4 de la SFG de la Fig. 3-8 son mallas que no se tocan.

3-7 Álgebra de las gráficas de flujo de señal

Con base en las propiedades de la SFG, se pueden señalar las siguientes reglas de manipulación y álgebra de las SFG.

1. El valor de la variable representada por un nodo es igual a la suma de todas las señales entrantes al nodo. Para la SFG de la Fig. 3-12, el valor de y_1 es igual a la suma de las señales transmitidas a través de todas las ramas entrantes; esto es,

$$y_1 = a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + a_{41}y_4 + a_{51}y_5 \tag{3-44}$$

2. El valor de la variable representada por un nodo se transmite a través de todas las ramas que dejan el nodo. En la SFG de la Fig. 3-12, se tiene:

$$\begin{aligned} y_6 &= a_{16}y_1 \\ y_7 &= a_{17}y_1 \\ y_8 &= a_{18}y_1 \end{aligned} \tag{3-45}$$

3. Las ramas paralelas con la misma dirección que conectan dos nodos se pueden remplazar por una sola rama con ganancia igual a la suma de las ganancias de las ramas paralelas. Un ejemplo de este caso se ilustra en la Fig. 3-13.
4. Una conexión en serie de ramas unidireccionales, como se muestra en la Fig. 3-14, se puede remplazar por una sola rama con ganancia igual al producto de las ganancias de las ramas.

3-7-1 Gráficos de flujo de señal de un sistema de control realimentado

La SFG del sistema de control realimentado unilazo de la Fig. 3-4 se dibuja como se muestra en la Fig. 3-15. Mediante el empleo del álgebra de SFG descrita anteriormente, se puede obtener la función de transferencia en lazo cerrado de la ecuación (3-23).

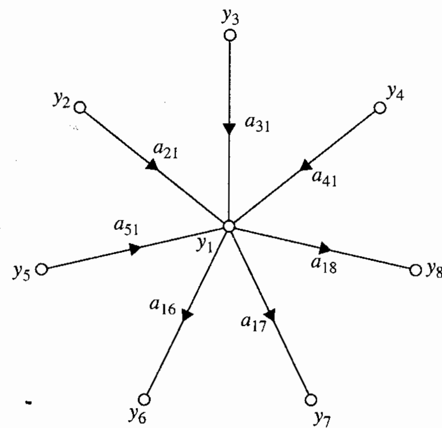


Figura 3-12 Nodo como un punto de suma y como un punto de transmisión.

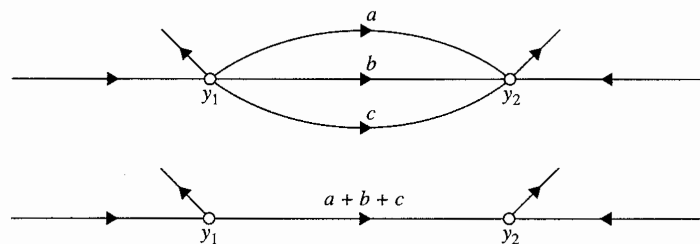


Figura 3-13 Gráfica de flujo de señal con trayectorias paralelas remplazadas por una con una rama sencilla.

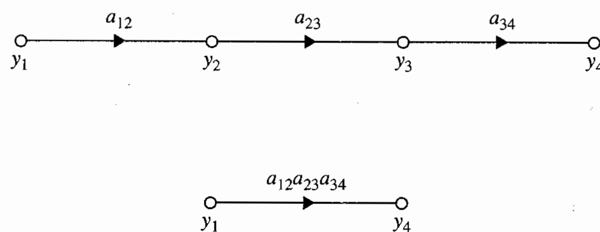


Figura 3-14 Gráfica de flujo de señal con ramas unidireccionales en cascada remplazadas por una rama sencilla.

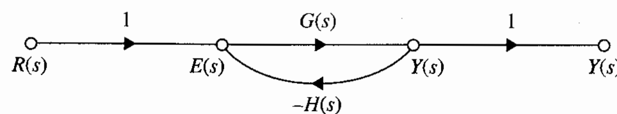


Figura 3-15 Gráfica de flujo de señal de un sistema de control realimentado.

3-8 Fórmula de ganancia para gráficas de flujo de señal

Dada una SFG o un diagrama de bloques, la tarea de resolver las relaciones entrada-salida mediante manipulación algebraica puede ser bastante tediosa. Afortunadamente, existe una fórmula de ganancia general disponible que permite la determinación de las relaciones entrada-salida de una SFG mediante inspección. Dada una SFG con N trayectorias directas, y L mallas, la ganancia entre el nodo de entrada y_{ent} y el nodo de salida y_{sal} es [3].

$$M = \frac{y_{sal}}{y_{ent}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{M_k \Delta_k}{\Delta} \tag{3-46}$$

en donde:

y_{ent} = variable del nodo de entrada
y_{sal} = variable del nodo de salida
M = ganancia entre y_{ent} y y_{sal}
N = número total de trayectorias directas entre y_{ent} y y_{sal}
M_k = ganancia de la trayectoria directa k-ésima entre y_{ent} y y_{sal}

$$\Delta = 1 - \sum_i L_{i1} + \sum_j L_{j2} - \sum_k L_{k3} + \cdots \tag{3-47}$$

L_{mr} = producto de la ganancia de la combinación posible m-ésima ($m = i, j, k, \ldots$) de las mallas de no contacto ($1 \leq r \leq L$).

o

Δ = 1 – (suma de las ganancias de **todas las mallas individuales**) + (suma de los productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de **dos** mallas que no se tocan) – (suma de los productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de **tres** mallas que no se tocan) + . . . (3-48)
Δ_k = la Δ para aquella parte de la SFG que no toca la k-ésima trayectoria directa.

▲ La fórmula de ganancia de una SFG se puede aplicar solamente entre un nodo de entrada y un nodo de salida.

La fórmula de ganancia de la ecuación (3-46) puede parecer formidable para ser utilizada a primera vista. Sin embargo, Δ y Δ_k son los únicos términos de la fórmula que pueden ser complicados si la SFG tiene un gran número de mallas y mallas que no se tocan.

Debe tenerse cuidado al aplicar la fórmula de ganancia para asegurar que sea aplicada entre un **nodo de entrada** y **uno de salida**.

Ejemplo 3-3

Considere que la función de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/R(s)$ de la SFG de la Fig. 3-15 será determinada mediante el empleo de la fórmula de ganancia, ecuación (3-46). Los siguientes resultados se obtienen mediante la inspección de la SFG:

1. Solamente existe una trayectoria directa entre $R(s)$ y $Y(s)$, y la ganancia de la trayectoria directa es:

$$M_1 = G(s) \tag{3-49}$$

2. Hay solamente una malla; la ganancia de malla es:

$$L_{11} = -G(s)H(s) \tag{3-50}$$

3. No hay mallas que no se tocan ya que solamente existe una malla. Además, la trayectoria directa está en contacto con la única malla. Por tanto, $\Delta_1 = 1$, y:

$$\Delta = 1 - L_{11} = 1 + G(s)H(s) \tag{3-51}$$

Al emplear la ecuación (3-46), la función de transferencia en lazo cerrado se escribe como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{M_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{3-52}$$

que concuerda con la ecuación (3-23). ▲

Ejemplo 3-4

Considere la SFG mostrada en la Fig. 3-8(d). Primero se determina la ganancia entre y_1 y y_5 utilizando la fórmula de ganancia. Las dos trayectorias directas entre y_1 y y_5, y las ganancias de las trayectorias directas son:

$M_1 = a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}$ Trayectoria directa: $y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5$
$M_2 = a_{12}a_{25}$ Trayectoria directa: $y_1 - y_2 - y_5$

Los cuatro lazos de la SFG se muestran en la Fig. 3-11. Las ganancias de las mallas son:

$$L_{11} = a_{23}a_{32} \qquad L_{21} = a_{34}a_{43} \qquad L_{31} = a_{24}a_{32}a_{43} \qquad L_{41} = a_{44}$$

Existe solamente un par de mallas que no se tocan; esto es, las dos mallas son:

$$y_2 - y_3 - y_2 \quad \text{y} \quad y_4 - y_4$$

Por lo que el producto de las ganancias de las dos mallas que no se tocan es:

$$L_{21} = a_{23}a_{32}a_{44} \tag{3-53}$$

Todas las mallas se tocan con la trayectoria directa M_1. Por lo que $\Delta_1 = 1$. Dos de las mallas no se tocan con la trayectoria directa M_2. Estas dos mallas son $y_3 - y_4 - y_3$ y $y_4 - y_4$. Por lo que:

$$\Delta_2 = 1 - a_{34}a_{43} - a_{44} \tag{3-54}$$

Al sustituir estas cantidades en la ecuación (3-46), se tiene:

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - (L_{11} + L_{12} + L_{13} + L_{14}) + L_{21} \\ &= 1 - (a_{23}a_{32} + a_{34}a_{43} + a_{24}a_{32}a_{43} + a_{44}) + a_{23}a_{32}a_{44}\end{aligned} \tag{3-55}$$

$$\frac{y_5}{y_1} = \frac{M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{(a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}) + (a_{12}a_{25})(1 - a_{34}a_{43} - a_{44})}{1 - (a_{23}a_{32} + a_{34}a_{43} + a_{24}a_{32}a_{43} + a_{44}) + a_{23}a_{32}a_{44}} \tag{3-56}$$

▲ Δ es la misma sin importar cuál salida se escoja.

El lector debe verificar que al escoger y_2 como la salida,

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{a_{12}(1 - a_{34}a_{43} - a_{44})}{\Delta} \tag{3-57}$$

en donde Δ está dada en la ecuación (3-55). ▲

Ejemplo 3-5

Considere la SFG de la Fig. 3-16. Las siguientes relaciones entrada-salida se obtienen mediante el uso de la fórmula de ganancia:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1 + G_3H_2 + H_4 + G_3H_2H_4}{\Delta} \tag{3-58}$$

$$\frac{y_4}{y_1} = \frac{G_1G_2(1 + H_4)}{\Delta} \tag{3-59}$$

$$\frac{y_6}{y_1} = \frac{y_7}{y_1} = \frac{G_1G_2G_3G_4 + G_1G_5(1 + G_3H_2)}{\Delta} \tag{3-60}$$

en donde:

$$\begin{aligned}\Delta = 1 &+ G_1H_1 + G_3H_2 + G_1G_2G_3H_3 + H_4 + G_1G_3H_1H_2 \\ &+ G_1H_1H_4 + G_3H_2H_4 + G_1G_2G_3H_3H_4 + G_1G_3H_1H_2H_4\end{aligned} \tag{3-61}$$

▲

3-8-1 Aplicación de la fórmula de ganancia entre nodos de salida y nodos que no son de entrada

Se señaló anteriormente que la fórmula de ganancia sólo se puede aplicar entre un par de nodos de entrada y salida. A menudo, es interesante encontrar la relación entre una variable de un nodo de salida, y una variable de un nodo que no es de entrada. Por ejemplo, en la SFG de la Fig. 3-16, puede ser interesante encontrar la relación y_7/y_2, que representa la dependencia de y_7 sobre y_2; este último no es de entrada.

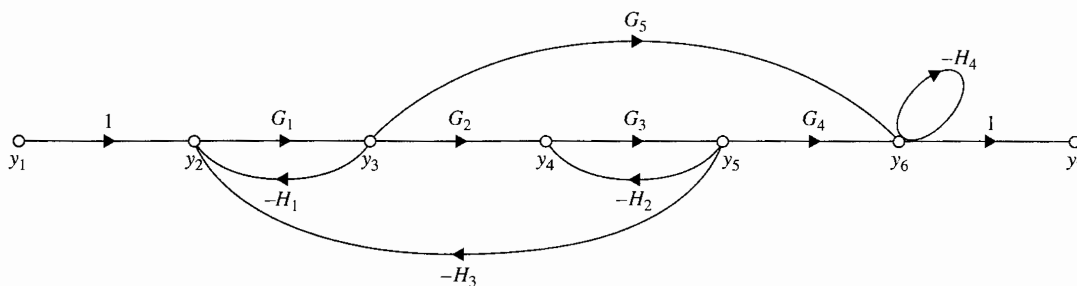


Figura 3-16 Gráfica de flujo de señal para el ejemplo 3-5.

Ahora se puede mostrar que al incluir un nodo de entrada, la fórmula de ganancia todavía se puede aplicar para encontrar la ganancia entre un nodo que no es de entrada y un nodo de salida. Sea y_{ent} un nodo de entrada y y_{sal} un nodo de salida de una SFG. La ganancia, y_{sal}/y_2, en donde y_2 no es una entrada, se puede escribir como:

$$\frac{y_{sal}}{y_2} = \frac{y_{sal}/y_{ent}}{y_2/y_{ent}} = \frac{\Sigma M_k \Delta_k \big|_{\text{de } y_{ent} \text{ a } y_{sal}} / \Delta}{\Sigma M_k \Delta_k \big|_{\text{de } y_{ent} \text{ a } y_2} / \Delta} \tag{3-62}$$

Ya que Δ es independiente de las entradas y las salidas, la ecuación (3-62) se escribe como:

$$\frac{y_{sal}}{y_2} = \frac{\Sigma M_k \Delta_k \big|_{\text{de } y_{ent} \text{ a } y_{sal}}}{\Sigma M_k \Delta_k \big|_{\text{de } y_{ent} \text{ a } y_2}} \tag{3-63}$$

Observe que Δ no aparece en la última ecuación.

Ejemplo 3-6

De la SFG de la Fig. 3-17, la ganancia entre y_2 y y_7 se escribe como:

$$\frac{y_7}{y_2} = \frac{y_7/y_1}{y_2/y_1} = \frac{G_1G_2G_3G_4 + G_1G_5(1 + G_3H_2)}{1 + G_3H_2 + H_4 + G_3H_2H_4} \tag{3-64}$$

▲

3-9 Aplicación de la fórmula de ganancia a diagramas de bloques

Debido a la similitud entre el diagrama de bloques y las SFG, la fórmula de ganancia de la ecuación (3-46) se puede aplicar para determinar la ganancia entrada-salida de cualquiera de los dos. En general, la fórmula de ganancia se puede aplicar directamente a un diagrama de bloques. Sin embargo, en sistemas complejos, para poder identificar todas las mallas y partes que no se tocan en forma clara, puede ser de ayuda el dibujar una SFG equivalente para el diagrama de bloques antes de aplicar la fórmula de ganancia.

Ejemplo 3-7

Para ilustrar cómo se construye una SFG equivalente de un diagrama de bloques y cómo se aplica la fórmula de ganancia a un diagrama de bloques, considere el diagrama de bloques que se muestra en la Fig. 3-17(a). La SFG equivalente del sistema se muestra en la Fig. 3-17(b). Observe que debido a que el nodo en la SFG se interpreta como un punto que suma todas las señales de entrada al nodo, las realimentaciones negativas del diagrama de bloques se representan asignando ganancias negativas a las trayectorias de realimentación en la SFG.

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema se obtiene aplicando la ecuación (3-46) al diagrama de bloques o la SFG de la Fig. 3-17:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3 + G_1G_4}{\Delta} \tag{3-65}$$

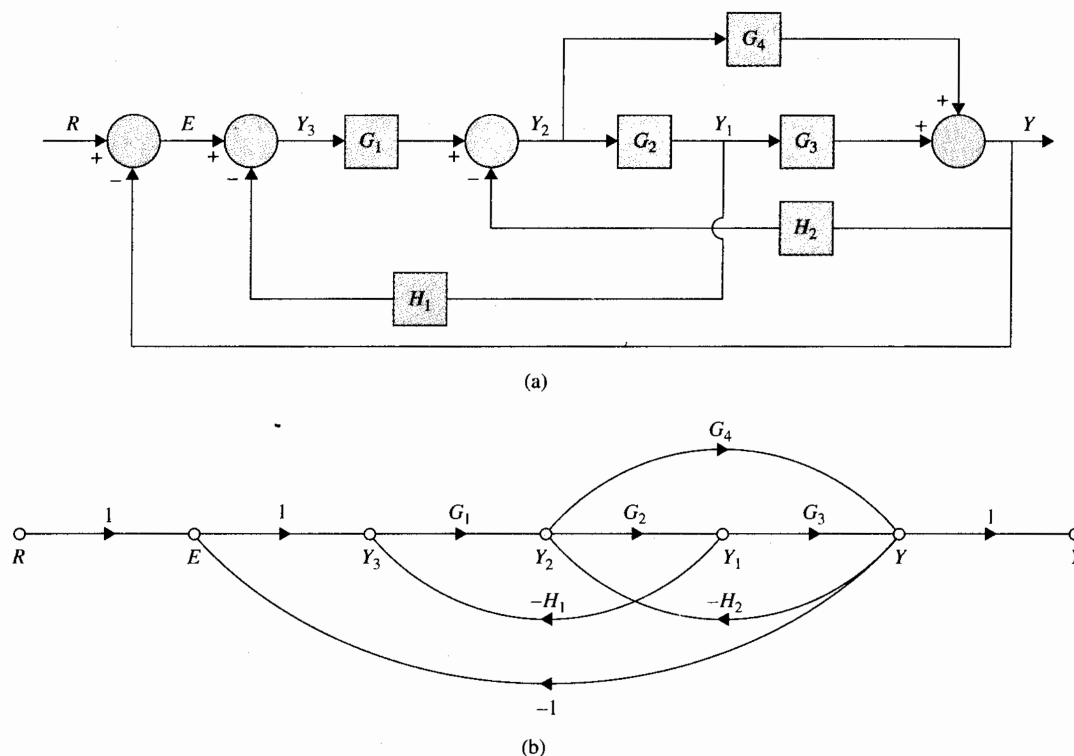


Figura 3-17 (a) Diagrama de bloques de un sistema de control. (b) Gráfica de flujo de señal equivalente.

en donde:

$$\Delta = 1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_3 + G_1G_2G_3 + G_4H_2 + G_1G_4 \tag{3-66}$$

En forma similar,

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_4H_2}{\Delta} \tag{3-67}$$

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{G_1G_2G_3 + G_1G_4}{1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_4H_2} \tag{3-68}$$

La última expresión se obtiene utilizando la ecuación (3-62). ▲

3-10 Diagrama de estado

En esta sección se introduce el **diagrama de estado**, el cual es una extensión de la SFG para describir ecuaciones de estado y ecuaciones diferenciales. El significado del diagrama de

estado es que forma una relación cercana entre las ecuaciones de estado, la simulación por computadora y las funciones de transferencia. Un diagrama de estado se construye siguiendo todas las reglas de la SFG utilizando la transformada de Laplace de las ecuaciónes de estado.

Los elementos básicos de un diagrama de estado son similares a los de la SFG convencional, a excepción de la operación de **integración.** Si las variables $x_1(t)$ y $x_2(t)$ están relacionadas mediante la diferenciación de primer orden:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \tag{3-69}$$

Al integrar ambos miembros de la ecuación (3-69) con respecto a t desde el tiempo inicial t_0, se obtiene:

$$x_1(t) = \int_0^t x_2(\tau)\, d\tau + x_1(t_0) \tag{3-70}$$

Ya que el álgebra de las SFG no maneja integración en el dominio del tiempo, se debe tomar la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (3-70). Se obtiene:

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \mathscr{L}\left[\int_{t_0}^t x_2(\tau)\, d\tau\right] + \frac{x_1(t_0)}{s} \\ &= \mathscr{L}\left[\int_0^t x_2(\tau)\, d\tau - \int_0^{t_0} x_2(\tau)\, d\tau\right] + \frac{x_1(t_0)}{s} \\ &= \frac{X_2(s)}{s} - \mathscr{L}\left[\int_0^{t_0} x_2(\tau)\, d\tau\right] + \frac{x_1(t_0)}{s} \end{aligned} \tag{3-71}$$

Ya que la historia pasada del integrador se representa mediante $x_1(t_0)$ y la transición de estado se supone que empieza en $\tau = t_0$, $x_2(\tau) = 0$ para $0 < \tau < t_0$. Por tanto la ecuación (3-71) se convierte en:

$$X_1(s) = \frac{X_2(s)}{s} + \frac{x_1(t_0)}{s} \qquad \tau \geq t_0 \tag{3-72}$$

La ecuación (3-72) es ahora algebraica y se puede representar mediante una SFG, como se muestra en la Fig. 3-18. Una SFG alterna con menos elementos para la ecuación (3-72) se muestra en la Fig. 3-19.

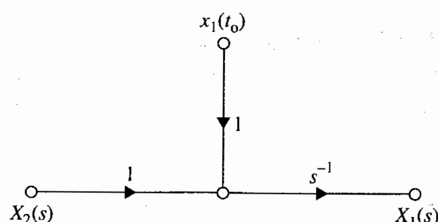


Figura 3-18 Representación en gráfica de flujo de señal de $X_1(s) = [X_2(s)/s] + [x_1(t_0)/s]$.

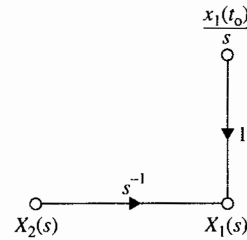


Figura 3-19 Representación en gráfica de flujo de señal de $X_1(s) = [X_2(s)/s] + [x_1(t_0)/s]$.

La Fig. 3-19 muestra que *la salida del integrador es igual a* s^{-1} *veces la entrada, más la condición inicial* $x_1(t_0)/s$.

Antes de presentar varios ejemplos ilustrativos sobre la construcción de diagramas de estado, se deben señalar los puntos importantes en la utilización del diagrama de estado.

1. Un diagrama de estado se puede construir directamente a partir de la ecuación diferencial del sistema. Esto permite la determinación de las variables de estado y de las ecuaciones de estado.
2. Un diagrama de estado se puede construir a partir de la función de transferencia del sistema. Este paso se define como la **descomposición** de las funciones de transferencia (Sec. 5-11).
3. El diagrama de estado se puede utilizar para la programación del sistema en una computadora analógica o para la simulación en una computadora digital.
4. La ecuación de transición de estado en el dominio de la transformada de Laplace se puede obtener a partir del diagrama de estado mediante la fórmula de ganancia de la SFG.
5. Las funciones de transferencia de un sistema se pueden determinar del diagrama de estado.
6. Las ecuaciones de estado y las ecuaciones de salida se pueden determinar del diagrama de estado.

A continuación se presentan los detalles de estas técnicas.

3-10-1 De las ecuaciones diferenciales al diagrama de estado

▲ Las salidas de los integradores del diagrama de estado normalmente se definen como las variables de estado.

Cuando un sistema lineal se describe a través de una ecuación diferencial de orden superior, se puede construir un diagrama de estado a partir de dichas ecuaciones, aun cuando el enfoque directo no siempre es lo más conveniente. Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) = r(t) \tag{3-73}$$

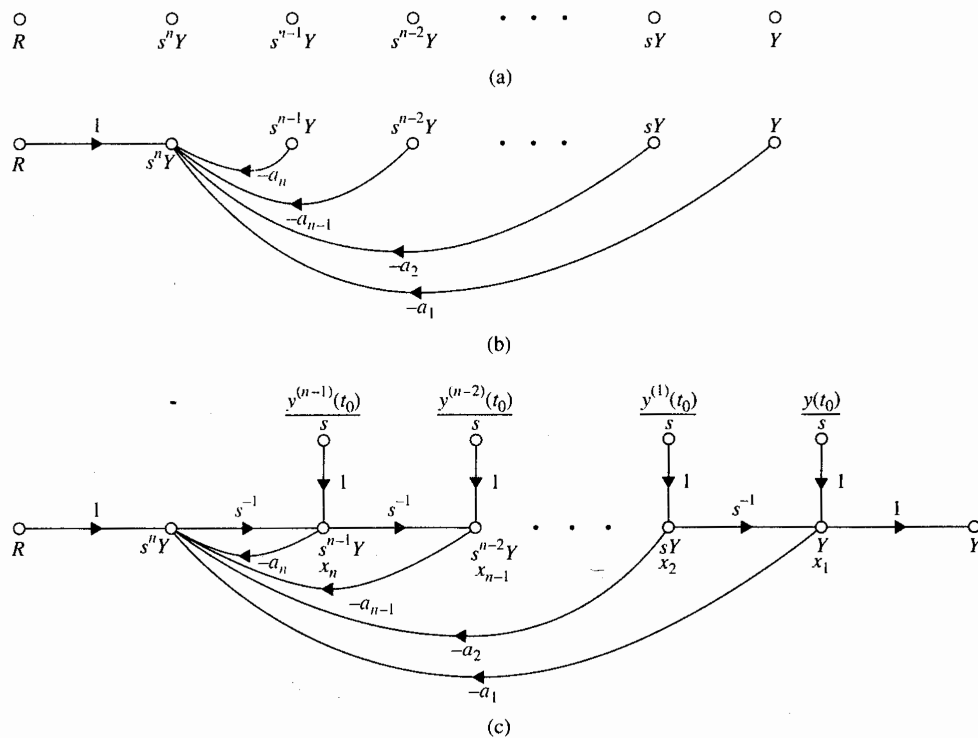


Figura 3-20 Representación en diagrama de estado de la ecuación diferencial de la ecuación (3-73).

Para construir un diagrama de estado utilizando esta ecuación, ésta se rearregla como:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = -a_n \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} - \cdots - a_2 \frac{dy(t)}{dt} - a_1 y(t) + r(t) \tag{3-74}$$

Como un primer paso, los nodos que representan a $R(s)$, $s^nY(s)$, $s^{n-1}Y(s)$, . . . , $sY(s)$, y $Y(s)$, se arreglan de izquierda a derecha, como se muestra en la Fig. 3-20. Ya que $s^iY(s)$ corresponde a $d^iy(t)/dt^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, en el dominio de Laplace, como el siguiente paso, los nodos de la Fig. 3-20(a) están conectados por ramas para describir la ecuación (3-74), que resulta en la Fig. 3-20(b). Finalmente, las ramas del integrador con ganancias de s^{-1} se insertan y las condiciones iniciales se suman a las salidas de los integradores de acuerdo con el esquema básico en la Fig. 3-19. El diagrama de estado completo se dibuja en la Fig. 3-20(c). *Las salidas de los integradores se definen como las variables de estado,* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Normalmente, ésta es la selección natural de las variables de estado una vez que el diagrama de estado ya ha sido dibujado.

Cuando la ecuación diferencial tiene derivadas de la entrada en el segundo miembro, el problema de dibujar el diagrama de estado no es tan directo como se ha ilustrado. Ahora se mostrará que, en general, primero es más conveniente obtener la función de transferencia de

la ecuación diferencial, y después llegar al diagrama de estado a través de su descomposición (Sec. 5-9).

Ejemplo 3-8

Considere la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = r(t) \tag{3-75}$$

Al igualar el término de mayor orden de la última ecuación al resto de los términos, se obtiene:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -3\frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) + r(t) \tag{3-76}$$

Siguiendo el procedimiento descrito, el diagrama de estado del sistema se dibuja como se muestra en la Fig. 3-21. Las variables de estado x_1 y x_2 se asignan como se muestra. ▲

3-10-2 Del diagrama de estado a la función de transferencia

La función de transferencia entre una salida y una entrada se obtiene a partir del diagrama de estado mediante el empleo de la fórmula de ganancia y el establecimiento de otras entradas y estados iniciales a cero. El siguiente ejemplo muestra cómo se obtiene la función de transferencia directamente de un diagrama de estado.

Ejemplo 3-9

Considere el diagrama de estado de la Fig. 3-21. La función de transferencia entre $R(s)$ y $Y(s)$ se obtiene aplicando la fórmula de ganancia entre estos dos nodos y estableciendo los estados iniciales a cero. Se tiene:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \tag{3-77}$$

▲

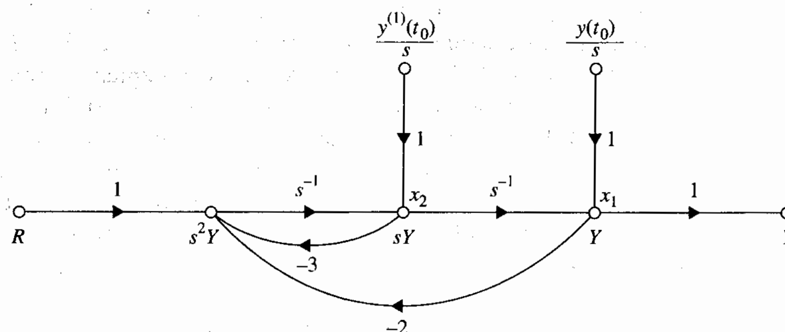


Figura 3-21 Diagrama de estado para la ecuación (3-75).

3-10-3 Del diagrama de estado a las ecuación de estado y de salida

Tanto las ecuaciones de estado como las de salida se pueden obtener directamente del diagrama de estado utilizando la fórmula de ganancia de la SFG. La forma general de una ecuación de estado y de una de salida para un sistema lineal se describen en la Sec. 2-3 y se presentan nuevamente a continuación.

Ecuación de estado: $$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + br(t) \tag{3-78}$$

Ecuación de salida: $$y(t) = cx(t) + dr(t) \tag{3-79}$$

en donde $x(t)$ es la variable de estado, $r(t)$ la entrada, $y(t)$ la salida y a, b, c y d son coeficientes constantes. Con base en la forma general de las ecuaciones de estado y de salida, se presenta el siguiente procedimiento para obtener las ecuaciones de estado y de salida a partir del diagrama de estado:

1. Elimine los estados iniciales y las ramas del integrador con ganancias s^{-1} del diagrama de estado, ya que las ecuaciones de estado y de salida no contienen el operador de Laplace s o los estados iniciales.
2. Para las ecuaciones de estado, relacione los nodos que representan las derivadas de las variables de estado como nodos de salida, ya que estas variables aparecen en el primer miembro de las ecuaciones de estado. La salida $y(t)$ en la ecuación de salida es, naturalmente, una variable de un nodo de salida.
3. Relacione las variables de estado y las entradas como variables de entrada en el diagrama de estado, ya que estas variables se encuentran en el segundo miembro de las ecuaciones de estado y de salida.
4. Aplique la fórmula de ganancia de la SFG al diagrama de estado.

Ejemplo 3-10

La Fig. 3-22 muestra el diagrama de estado de la Fig. 3-21 con las ramas del integrador y los estados iniciales eliminados. Utilizando $dx_1(t)/dt$ y $dx_2(t)/dt$ como los nodos de salida y $x_1(t)$, $x_2(t)$, y $r(t)$ como los nodos de entrada, y aplicando la fórmula de ganancia entre estos nodos, las ecuaciones de estado se obtienen como:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -2x_1(t) - 3x_2(t) + r(t) \end{aligned} \tag{3-80}$$

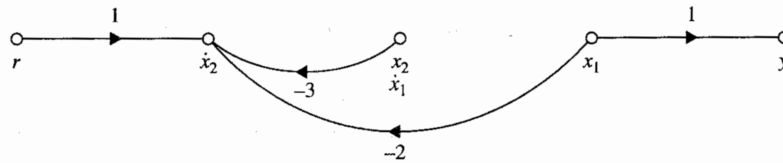


Figura 3-22 Diagrama de estado de la Fig. 3-21 con los estados iniciales y las ramas del integrador eliminadas.

Aplicando la fórmula de ganancia con $x_1(t)$, $x_2(t)$, y $r(t)$ como los nodos de entrada y $y(t)$ como el nodo de salida, la ecuación de salida se escribe como:

$$y(t) = x_1(t) \tag{3-81}$$

▲

Ejemplo 3-11

Como otro ejemplo sobre cómo determinar las ecuaciones de estado a partir del diagrama de estado, considere el diagrama de estado mostrado en la Fig. 3-23(a). Este ejemplo también enfatizará la importancia de aplicar la fórmula de ganancia. La Fig. 3-23(b) muestra el diagrama de estado con los estados iniciales y las ramas del integrador eliminadas. Observe que en este caso el diagrama de estado en la Fig. 3-23(b) aún contiene una malla. Aplicando la fórmula de ganancia al diagrama de estado en la Fig. 3-23(b) con $x_1(t)$, $x_2(t)$, y $x_3(t)$ como variables de nodos de salida y $r(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, y $x_3(t)$ como nodos de entrada, las ecuaciones de estado en forma matricial se obtienen como sigue:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{-(a_2 + a_3)}{1 + a_0 a_3} & -a_1 & \dfrac{1 - a_0 a_2}{1 + a_0 a_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \tag{3-82}$$

La ecuación de salida es:

$$y(t) = \frac{1}{1 + a_0 a_3} x_1(t) + \frac{a_0}{1 + a_0 a_3} x_3(t) \tag{3-83}$$

▲

3-11 Funciones de transferencia de sistemas en tiempo discreto

Los sistemas de control en tiempo discreto tienen características únicas en que las señales en estos sistemas están ya sea en la forma de trenes de pulsos o codificadas en forma digital, y los procesos controlados a menudo contienen componentes analógicos. Por ejemplo, un motor de cd, que es un dispositivo analógico puede ser controlado ya sea mediante un controlador

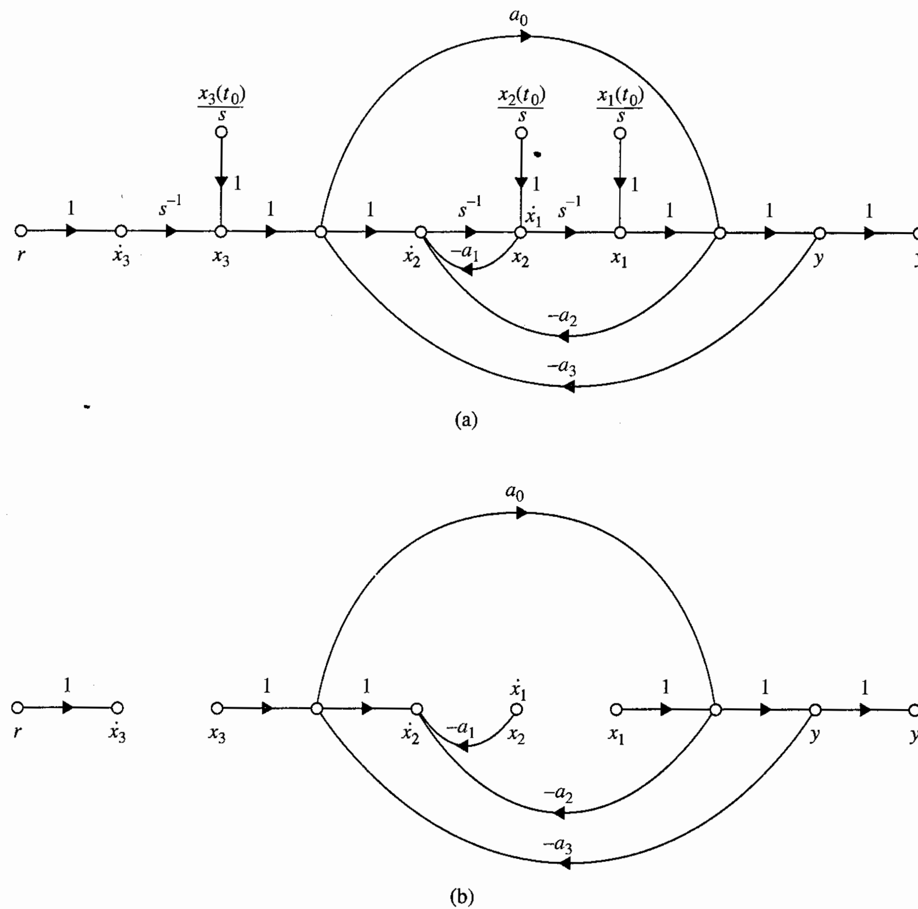


Figura 3-23 (a) Diagrama de estado. (b) Diagrama de estado de la parte (a) con todos los estados iniciales e integradores eliminados.

que produzca señales analógicas o mediante un controlador digital que produzca información digital. En el último caso, se necesita una interfase tal como un convertidor digital a analógico (D/A) para acoplar el componente digital a los dispositivos analógicos. La Fig. 3-24 muestra el diagrama de bloques de un sistema típico de datos discretos. La entrada y la salida del controlador digital se pueden representar mediante secuencias numeradas con números separados por el periodo de muestreo T. Para operación lineal, el convertidor D/A se puede repre-

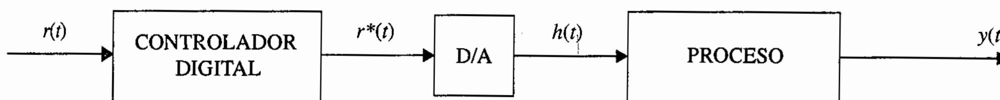


Figura 3-24 Diagrama de bloques de un sistema de control en tiempo discreto típico.

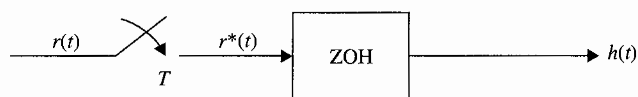


Figura 3-25 Muestreador y retén.

▲ El muestreador ideal no es una entidad física. Se usa sólo para la representación en tiempo discreto.

sentar como un dispositivo de **muestreo y retención (S/H),** el cual consiste en un muestreador y un dispositivo de retención de datos. El S/H se utiliza frecuentemente para el análisis de sistemas en tiempo discreto y consiste en un **muestreador ideal** y un **retén de orden cero** (ZOH [Zero-Order Hold]). Por lo que el sistema mostrado en la Fig. 3-24 se puede representar funcionalmente mediante el diagrama de bloques de la Fig. 3-25. La Fig. 3-26 muestra la operación típica del muestreador ideal y del ZOH. Los datos en tiempo continuo $r(t)$ se muestrean mediante el muestreador ideal con un periodo de muestreo T. La salida del muestreador ideal, $r^*(t)$, es un tren de impulsos con las magnitudes de $r(t)$ en T llevadas por la fuerza de los impulsos. Debe señalarse que el muestreador ideal no es una entidad física. Se visualiza simplemente para representar matemáticamente la señal en tiempo discreto. En la Fig. 3-26 las flechas en los instantes de muestreo representan impulsos. Ya que por definición, un impulso tiene un ancho de pulso cero y una altura infinita, las longitudes de las flechas simplemente representan las áreas bajo los impulsos y son las magnitudes de la señal de entrada $r(t)$ en los instantes de muestreo. El ZOH simplemente mantiene la magnitud de la señal llevada por el impulso que entra en un instante dado, digamos, kT, para el total del periodo de muestreo t, hasta que el siguiente impulso llegue en $t = (k + 1)T$. La salida del ZOH

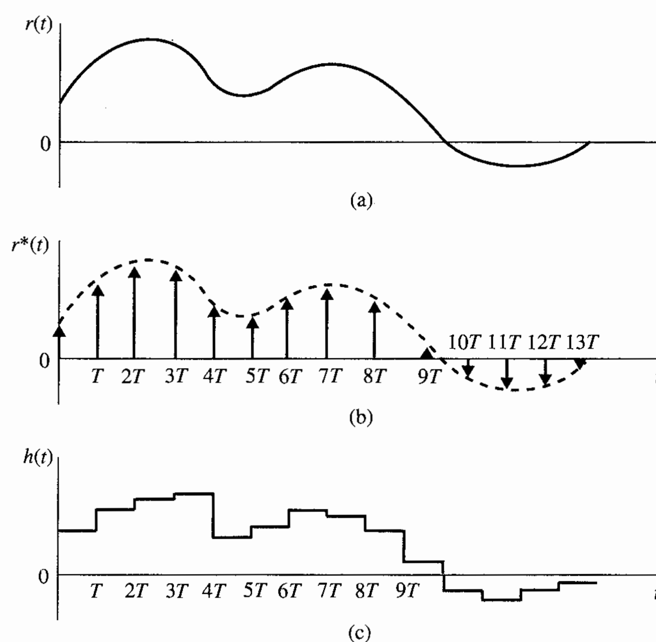


Figura 3-26 (a) Señal de entrada al muestreador ideal. (b) Señal de salida del muestreador ideal. (c) Señal de salida del ZOH.

es una aproximación de escalera de la entrada al muestreador ideal, $r(t)$. Como el periodo de muestreo T se aproxima a cero, la salida del ZOH, $h(t)$ se aproxima a $r(t)$; esto es,

$$\lim_{T \to 0} h(t) = r(t) \tag{3-84}$$

Sin embargo, ya que la salida del muestreador, $r^*(t)$ es un tren de impulsos, su límite cuando T se aproxima a cero *no* tiene un significado físico. Con base en las discusiones mencionadas, un sistema en tiempo discreto en lazo abierto se modela como se muestra en la Fig. 3-27.

Existen varias formas de obtener la representación en función de transferencia del sistema de la Fig. 3-27. La siguiente forma se basa en la representación en la serie de Fourier de la señal $r^*(t)$. Se comienza por escribir:

$$r^*(t) = r(t)\delta_T(t) \tag{3-85}$$

en donde $\delta_T(t)$ es el tren de impulsos unitarios,

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \tag{3-86}$$

Ya que $\delta_T(t)$ es una función periódica con un periodo T, que se puede expresar como una serie de Fourier:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi nt/T} \tag{3-87}$$

en donde C_n es el coeficiente de Fourier y está dado por:

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T \delta_T(t)e^{-jn\omega_s t}\,dt \tag{3-88}$$

en donde $\omega_s = 2\pi/T$ es la **frecuencia de muestreo** en rad/s.

Debido a que el impulso unitario se define como un pulso con un ancho δ y una altura $1/\delta$, y cuando $\delta \to 0$, C_n se escribe como:

$$C_n = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{T\delta}\int_0^\delta e^{-jn\omega_s t}\,dt = \lim_{\delta \to 0} \frac{1 - e^{-jn\omega_s \delta}}{jn\omega_s T\delta} = \frac{1}{T} \tag{3-89}$$

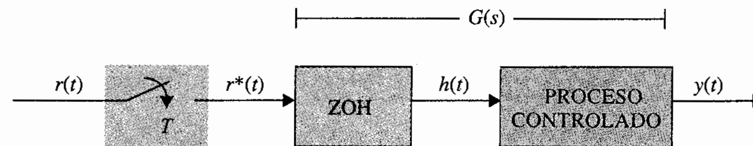


Figura 3-27 Diagrama de bloques de un sistema en tiempo discreto.

Al sustituir la ecuación (3-89) en la ecuación (3-87) y después esta última en la ecuación (3-85), se obtiene:

$$r^*(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} r(t)e^{-jn\omega_s t} \quad (3\text{-}90)$$

Al tomar la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (3-90) y utilizando la propiedad de traslación compleja de la ecuación (2-36), se obtiene:

$$R^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R(s - jn\omega_s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R(s + jn\omega_s) \quad (3\text{-}91)$$

La ecuación (3-91) representa la transformada de Laplace de la señal muestreada $r^*(t)$. Es una expresión alterna a la ecuación (2-178). Utilizando el método introducido en el Cap. 2, $R^*(s)$ se puede escribir como:

$$R^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)e^{-kTs} \quad (3\text{-}92)$$

Ya que los límites de la sumatoria de $R^*(s)$ son desde $-\infty$ hasta ∞, si s se remplaza por $s + jm\omega_s$ en la ecuación (3-91), en donde m es un entero, se tiene:

$$R^*(s + jm\omega_s) = R^*(s) \quad (3\text{-}93)$$

Función de transferencia pulso

Ahora se obtendrá la función de transferencia del sistema en tiempo discreto mostrado en la Fig. 3-27. La transformada de Laplace de la salida del sistema $y(t)$ se escribe como:

$$Y(s) = G(s)R^*(s) \quad (3\text{-}94)$$

Aunque la salida $y(t)$ se obtiene de $Y(s)$ al tomar la transformada inversa de Laplace en ambos miembros de la ecuación (3-94), este paso es difícil de realizar debido a que $G(s)$ y $R^*(s)$ representan diferentes tipos de señal. Para resolver este problema, se coloca ún muestreador ficticio en la salida del sistema, como se muestra en la Fig. 3-28. El muestreador ficticio S_2 tiene el mismo periodo de muestreo T y está sincronizado con el muestreador original S_1. La forma muestreada de $y(t)$ es $y^*(t)$. Al aplicar la ecuación (3-91) a $y^*(t)$ y utilizando la ecuación (3-94), se tiene:

$$Y^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s)R^*(s + jn\omega_s) \quad (3\text{-}95)$$

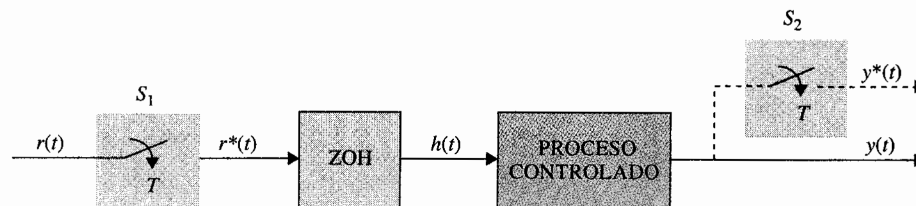


Figura 3-28 Sistema en tiempo discreto con muestreador ficticio.

Con base en la relación de la ecuación (3-93), la ecuación (3-95) se escribe como:

$$Y^*(s) = R^*(s)\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) = R^*(s)G^*(s) \tag{3-96}$$

en donde $G^*(s)$ se define de la misma manera que $R^*(s)$ en la ecuación (3-91) y se llama **función de transferencia pulso** de $G(s)$.

Función de transferencia en *z*

Ahora que todas las funciones de la ecuación (3-96) están en la forma muestreada, en donde $R^*(s)$, $G^*(s)$ y $Y^*(s)$ tienen la forma de la ecuación (3-92), se toma la transformada z en ambos miembros de la ecuación mediante la sustitución de $z = e^{Ts}$. Se tiene:

$$Y(z) = G(z)R(z) \tag{3-97}$$

en donde $G(z)$ se define como la **función de transferencia en** z de $G(s)$ y está dada por:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-k} \tag{3-98}$$

Por tanto, para el sistema en tiempo discreto mostrado en las Figs. 3-27 y 3-28, la transformada z de la salida es igual a la función de transferencia z del proceso multiplicada por la transformada z de la entrada.

3-11-1 Funciones de transferencia de sistemas en tiempo discreto con elementos en cascada

La representación de la función de transferencia de sistemas en tiempo discreto con elementos conectados en cascada es ligeramente más complicada que aquella para sistemas en tiempo continuo, debido a la variación de tener o no tener muestreadores entre los elementos. La Fig. 3-29

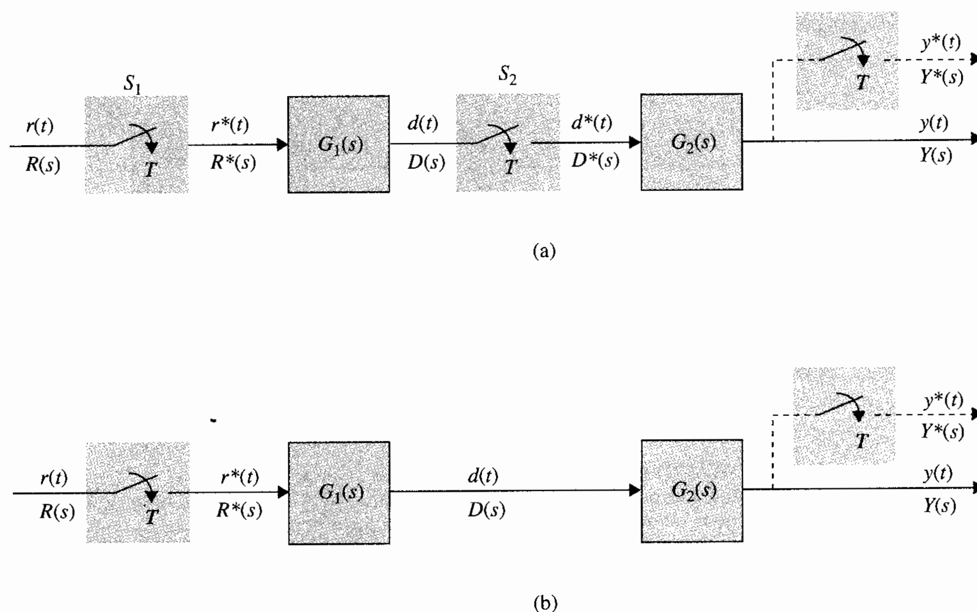


Figura 3-29 (a) Sistema en tiempo discreto con elementos en cascada y muestreadores que separan dos elementos. (b) Sistema en tiempo discreto con elementos en cascada sin muestreador entre ellos.

muestra dos situaciones diferentes de un sistema en tiempo discreto que contienen dos elementos conectados en cascada. En el sistema de la Fig. 3-29(a), los dos elementos están separados mediante el muestreador S_2, el cual está sincronizado a, y tiene el mismo periodo que, el muestreador S_1. Los dos elementos en el sistema de la Fig. 3-29(b) están conectados directamente juntos. Es importante distinguir estos dos casos cuando se obtiene la función de la transferencia pulso y la función de transferencia en z. Para el sistema de la Fig. 3-29(a), la salida de $G_1(s)$ se escribe como:

$$D(s) = G_1(s)R^*(s) \tag{3-99}$$

y la salida del sistema es:

$$Y(s) = G_2(s)D^*(s) \tag{3-100}$$

Al tomar la transformada pulso en ambos miembros de la ecuación (3-99) y utilizando la ecuación (3-93), se tiene:

$$D^*(s) = G_1^*(s)R^*(s) \tag{3-101}$$

Ahora, al sustituir la ecuación (3-101) en la ecuación (3-100) y tomando la transformada pulso, se obtiene:

$$Y^*(s) = G_1^*(s)G_2^*(s)R^*(s) \tag{3-102}$$

La expresión de la transformada z correspondiente a la ecuación (3-102) es:

$$Y(z) = G_1(z)G_2(s)R(z) \tag{3-103}$$

▲ La transformada z de dos sistemas separados por un muestreador es igual al producto de las transformadas z de los dos sistemas.

Se concluye que *la transformada en z de dos sistemas separados mediante un muestreador es igual al producto de las transformadas z de los dos sistemas.*

La transformada de Laplace de la salida del sistema de la Fig. 3-29(b) es:

$$Y(s) = G_1(s)G_2(s)R^*(s) \tag{3-104}$$

Al tomar la transformada pulso en ambos miembros de la última ecuación, se obtiene:

$$Y^*(s) = [G_1(s)G_2(s)]^*R^*(s) \tag{3-105}$$

en donde:

$$[G_1(s)G_2(s)]^* = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G_1(s + jn\omega_s)G_2(s + jn\omega_s) \tag{3-106}$$

Observe que ya que $G_1(s)$ y $G_2(s)$ no están separados por un muestreador, tienen que ser tratadas como un sistema al.tomar la transformada pulso.

Al tomar la transformada z en ambos miembros de la ecuación (3-105), da:

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{[G_1(s)G_2(s)]^*\}R(z) \tag{3-107'}$$

Sea:

$$\mathcal{Z}\{[G_1(s)G_2(s)]^*\} = G_1G_2(z) \tag{3-108}$$

Entonces, la ecuación (3-107) se escribe como:

$$Y(z) = G_1G_2(z)R(z) \tag{3-109}$$

3-11-2 Función de transferencia del retén de orden cero

Con base en la descripción del ZOH mencionada anteriormente, su respuesta al impulso se presenta en la Fig. 3-30. La función de transferencia del ZOH se escribe como:

$$G_h(s) = \mathcal{L}[g_h(t)] = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \tag{3-110}$$

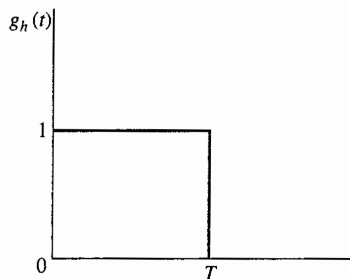


Figura 3-30 Respuesta al impulso de un ZOH.

Por lo que si el ZOH está conectado en cascada con un proceso lineal con función de transferencia $G_p(s)$, como se muestra en la Fig. 3-27, la transformada z de la combinación se escribe como:

$$G(z) = \mathscr{Z}[G_h(s)G_p(s)] = \mathscr{Z}\left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s)\right) \tag{3-111}$$

Al emplear la propiedad de retraso de tiempo de la transformada z, ecuación (2-188), la ecuación (3-111) se simplifica como:

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathscr{Z}\left(\frac{G_p(s)}{s}\right) \tag{3-112}$$

Ejemplo 3-12

Considere que para el sistema mostrado en la Fig. 3-27,

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s + 0.5)} \tag{3-113}$$

El periodo de muestra es 1 segundo. La función de transferencia z del sistema entre la entrada y la salida se determina empleando la ecuación (3-112).

$$\begin{aligned} G(z) &= (1 - z^{-1})\mathscr{Z}\left(\frac{1}{s^2(s + 0.5)}\right) \\ &= (1 - z^{-1})\mathscr{Z}\left(\frac{2}{s^2} - \frac{4}{s} + \frac{4}{s + 0.5}\right) = \frac{0.426z + 0.361}{z^2 - 1.606z + 0.606} \end{aligned} \tag{3-114}$$

▲

3-11-3 Funciones de transferencia en lazo cerrado de sistemas en tiempo discreto

Las funciones de transferencia en lazo cerrado de sistemas en tiempo discreto se obtienen utilizando los siguientes procedimientos:

1. Visualice las salidas de los muestreadores como "entradas" al sistema.
2. Todas las otras no entradas del sistema son tratadas como salidas.
3. Escriba las ecuaciones de causa y efecto entre las entradas y las salidas del sistema utilizando la fórmula de ganancia de la SFG.
4. Tome la transformada pulso o la transformada z de las ecuaciones obtenidas en el paso 3, y manipule estas ecuaciones para obtener la función de transferencia pulso o la función de transferencia en z.

La referencia [6] describe la gráfica de flujo de señal muestreado que se puede utilizar para implantar el paso 4 utilizando la fórmula de ganancia de la SFG.

Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento algebraico para encontrar las funciones de transferencia en lazo cerrado de sistemas en tiempo discreto.

Ejemplo 3-13

Considere el sistema en tiempo discreto en lazo cerrado mostrado en la Fig. 3-31. La salida del muestreador se visualiza como una entrada al sistema. Por lo que el sistema tiene entradas $R(s)$ y $E^*(s)$. Las señales $E(s)$ y $Y(s)$ se visualizan como las salidas del sistema.

Al escribir las ecuaciones de causa y efecto para $E(s)$ y $Y(s)$ utilizando la fórmula de ganancia, se obtiene:

$$E(s) = R(s) - G(s)H(s)E^*(s) \tag{3-115}$$

$$Y(s) = G(s)E^*(s) \tag{3-116}$$

Observe que el segundo miembro de las dos últimas ecuaciones contiene solamente las entradas $R(s)$ y $E^*(s)$ y las funciones de transferencia. Al tomar la transformada pulso en miembros de la ecuación (3-115) y resolviendo para $E^*(s)$, se obtiene:

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + [G(s)H(s)]^*} \tag{3-117}$$

Al sustituir $E^*(s)$ de la ecuación (3-117) en la ecuación (3-116), se obtiene:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + [G(s)H(s)]^*} R^*(s) \tag{3-118}$$

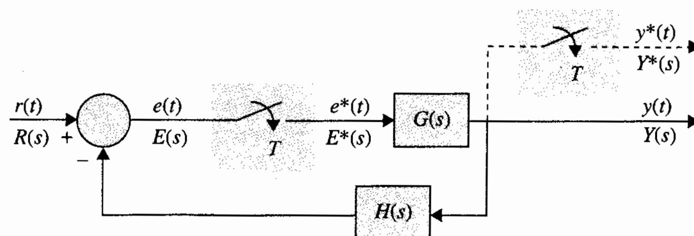


Figura 3-31 Sistema en tiempo discreto en lazo cerrado.

Al tomar la transformada pulso en ambos miembros de la ecuación (3-118) y utilizando la ecuación (3-93), se llega a la función de transferencia pulso de un sistema en lazo cerrado,

$$\frac{Y^*(s)}{R^*(s)} = \frac{G^*(s)}{1 + [G(s)H(s)]^*} \tag{3-119}$$

Tomando la transformada z en ambos miembros de la ecuación (3-119), se tiene:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \tag{3-120}$$

▲

Ejemplo 3-14

En este ejemplo se muestra que aunque es posible definir la función de transferencia entrada-salida para el sistema de la Fig. 3-31, en general, esto no siempre es posible para todos los sistemas en tiempo discreto. Considere el sistema mostrado en la Fig. 3-32, el cual tiene un muestreador en la trayectoria de realimentación. En este caso, la salida del muestreador, $Y^*(s)$, y $R(s)$ son las entradas del sistema; $Y(s)$ y $E(s)$ se visualizan como salidas. Escribiendo $E(s)$ y $Y(s)$ en términos de las entradas utilizando la fórmula de ganancia, se obtiene:

$$Y(s) = G(s)E(s) \tag{3-121}$$
$$E(s) = R(s) - H(s)Y^*(s) \tag{3-122}$$

Tomando la transformada pulso en ambos miembros de las ecuaciones (3-121) y (3-122), y después de manipulaciones algebraicas simples, la transformada pulso de la salida se escribe como:

$$Y^*(s) = \frac{[G(s)R(s)]^*}{1 + [G(s)H(s)]^*} \tag{3-123}$$

Observe que la entrada $R(s)$ y la función de transferencia $G(s)$ están ahora combinadas como una función, $[G(s)H(s)]^*$, y no se puede definir una función de transferencia en la forma de $Y^*(s)/R^*(s)$. La transformada z de la salida se escribe como:

$$Y(z) = \frac{GR(z)}{1 + GH(z)} \tag{3-124}$$

▲

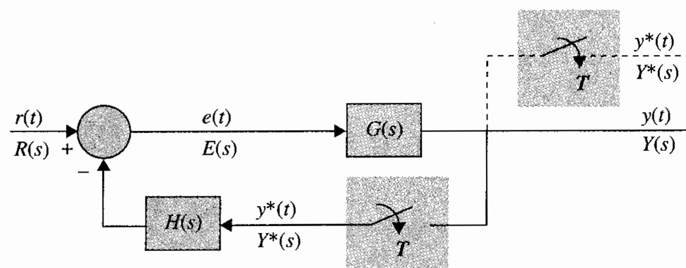


Figura 3-32 Sistema en tiempo discreto en lazo cerrado.

Aun cuando se ha podido llegar a la función de transferencia entrada-salida y a la relación de transferencia de los sistemas de las Figs. 3-31 y 3-32 mediante medios algebraicos sin dificultad, para configuraciones de sistemas más complejos, el método algebraico puede volverse tedioso. El método de gráfico de flujo de señal se puede extender al análisis de sistemas de datos discretos; se remite al lector a la referencia [6] para los detalles.

3-12 Resumen

En este capítulo se ha presentado el modelado matemático de sistemas lineales utilizando funciones de transferencia, diagramas de bloques y gráficas de flujo de señal. La función de transferencia de un sistema lineal se definió en términos de la respuesta al impulso así como en términos de la ecuación diferencial. Se trató con sistemas multivariables y de una variable.

Se demostró que el diagrama de bloques es un método versátil para representar los sistemas lineales y no lineales. Un diagrama de bloques puede o no tener implicaciones matemáticas.

Un método poderoso para representar la interrelación entre señales de un sistema lineal es la gráfica de flujo de señal. Cuando se aplica apropiadamente, una SFG permite la obtención de las funciones de transferencia entre variables de entrada y de salida de un sistema lineal utilizando la fórmula de ganancia. El diagrama de estado es una SFG que se aplica a sistemas dinámicos que se representan mediante ecuaciones diferenciales.

Finalmente, se definieron las funciones de transferencia de sistemas en tiempo discreto, y se describieron las reglas que gobiernan las manipulaciones de funciones de transferencia entre sistemas en tiempo discreto que están interconectados.

Preguntas de repaso

1. Defina la función de transferencia de un sistema lineal invariante con el tiempo en términos de su respuesta al impulso.
2. Cuando se define la función de transferencia, ¿qué sucede con las condiciones iniciales del sistema?
3. Defina la ecuación característica de un sistema lineal en términos de la función de transferencia.
4. ¿A qué se refiere un sistema multivariable?
5. ¿Se pueden aplicar las gráficas de flujo de señal a sistemas no lineales?
6. ¿Cómo se pueden aplicar las gráficas de flujo de señal a sistemas que se describen mediante ecuaciones diferenciales?
7. Defina el nodo de entrada de una SFG.
8. Defina el nodo de salida de una SFG.
9. Establezca la forma en que las ecuaciones se deben adecuar antes de dibujar la SFG.
10. ¿Qué representa la flecha en la rama de una SFG?
11. Explique cómo un nodo de no entrada de una SFG se puede transformar en un nodo de salida.
12. ¿Se puede aplicar la fórmula de ganancia entre cualesquiera dos nodos de una SFG?
13. Explique las mallas que no se tocan de una SFG.
14. ¿Depende la D de una SFG sobre la cual se selecciona un par de entrada-salida?
15. Haga una lista de las ventajas y utilidades del diagrama de estado.

16. Dado un diagrama de estado de un sistema dinámico lineal, ¿cómo se definen las variables de estado?
17. Dado el diagrama de estado de un sistema dinámico lineal, ¿cómo se encuentra la función de transferencia entre un par de variables de entrada y de salida?
18. Dado el diagrama de estado de un sistema dinámico lineal, ¿cómo se escriben las ecuaciones de estado del sistema a partir del diagrama de estado?
19. ¿Qué es un muestreador ideal y cuáles son sus propiedades?
20. ¿Qué es un retén de orden cero y cuáles son sus propiedades?
21. ¿El ZOH es un dispositivo lineal?
22. ¿Se puede expresar siempre la relación entrada-salida como una función de transferencia para un sistema en tiempo discreto?

Referencias

Diagramas de bloques y gráficas de flujo de señal

1. **T. D. GRAYBEAL,** "Block Diagram Network Transformation," *Electr. Eng.,* Vol. 70, pp. 985–990, 1951.
2. **S. J. MASON,** "Feedback Theory—Some Properties of Signal Flow Graphs," *Proc. IRE,* Vol. 41, No. 9, pp. 1144–1156, Sept. 1953.
3. **S. J. MASON,** "Feedback Theory—Further Properties of Signal Flow Graphs," *Proc. IRE,* Vol. 44, No. 7, pp. 920–926, July 1956.
4. **L. P. A. ROBICHAUD, M. BOISVERT, and J. ROBERT,** *Signal Flow Graphs and Applications,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962.
5. **B. C. KUO,** *Linear Networks and Systems,* McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.

Sistemas de control de datos discretos

6. **B. C. KUO,** *Digital Control Systems,* 2nd ed., Saunders College Publishing, New York, 1992.
7. **G. F. FRANKLIN, J. D. POWELL, and M. L. WORKMAN,** *Digital Control of Dynamic Systems,* 2nd ed., Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1990.
8. **C. L. PHILLIPS and H. T. NAGLE, JR.,** *Digital Control Systems Analysis and Design,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
9. **K. OGATA,** *Discrete-Time Control Systems,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.

Problemas

▲ Función de transferencia

3-1. Las siguientes ecuaciones diferenciales representan sistemas lineales invariantes con el tiempo, donde $r(t)$ denota la entrada y $y(t)$ la salida. Encuentre la función de transferencia $Y(s)/R(s)$ para cada sistema.

(a) $\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 3\frac{dr(t)}{dt} + r(t)$

(b) $\frac{d^4y(t)}{dt^4} + 10\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 5r(t)$

(c) $\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 10\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) + 2\int_0^t y(\tau)\,d\tau = \frac{dr(t)}{dt} + 2r(t)$

(d) $2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = r(t) + 2r(t-1)$

▲ Funcion de transferencia, valor final

3-2. El diagrama de bloques del control de un tren eléctrico se muestra en la Fig. 3P-2. Los parámetros del sistema y sus variables son:

$e_r(t)$ = voltaje que representa la velocidad de tren deseada, V
$v(t)$ = velocidad del tren, pies/s
M = masa del tren = 30 000 lb/s^2
K = ganancia del amplificador
K_t = ganancia del indicador de velocidad = 0.15 V/pies/s

Para determinar la función de transferencia del controlador, se aplica una función escalón de 1 V a la entrada del controlador [*i.e.*, $e_c(t) = u_s(t)$]. La salida del controlador se mide y describe mediante la siguiente ecuación:

$$f(t) = 100(1 - 0.3e^{-6t} - 0.7e^{-10t})u_s(t)$$

(a) Encuentre la función de transferencia $G_c(s)$ del controlador.
(b) Obtenga la función de transferencia de la trayectoria directa $V(s)/E(s)$ del sistema. En este caso, la trayectoria de realimentación está abierta.
(c) Obtenga la función de transferencia en lazo cerrado $V(s)/E_r(s)$ del sistema.
(d) Suponiendo que K adopta un valor tal que el tren no corra (inestable), encuentre la velocidad en estado estable del tren en pies/s cuando la entrada es $e_r(t) = u_s(t)$.

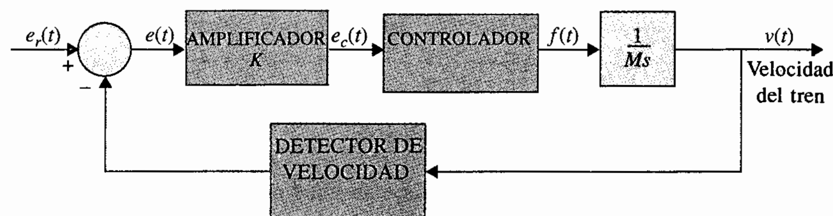


Figura 3P-2

▲ Función de transferencia, valor final

3-3. Repita el problema 3-2 cuando la salida del controlador se mide y describe mediante la siguiente expresión:

$$f(t) = 100(1 - 0.3e^{-6(t-0.5)})u_s(t - 0.5)$$

cuando una entrada escalón de 1 V se aplica al controlador.

▲ Sistema multivariable

3-4. Un sistema lineal multivariable invariante con el tiempo cuyas entradas $r_1(t)$ y $r_2(t)$ y salidas $y_1(t)$ y $y_2(t)$ están descritas mediante el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2y_1(t)}{dt^2} + 2\frac{dy_1(t)}{dt} + 3y_2(t) = r_1(t) + r_2(t)$$

$$\frac{d^2y_2(t)}{dt^2} + 3\frac{dy_1(t)}{dt} + y_1(t) - y_2(t) = r_2(t) + \frac{dr_1(t)}{dt}$$

Encuentre las siguientes funciones de transferencia:

$$\left.\frac{Y_1(s)}{R_1(s)}\right|_{R_2=0} \quad \left.\frac{Y_2(s)}{R_1(s)}\right|_{R_2=0} \quad \left.\frac{Y_1(s)}{R_2(s)}\right|_{R_1=0} \quad \left.\frac{Y_2(s)}{R_2(s)}\right|_{R_1=0}$$

▲ Sistema multivariable

3-5. El motor de turbohélice de un avión mostrado en la Fig. 3-1 está controlado a través de un sistema en lazo cerrado con el diagrama de bloques que se muestra en la Fig. 3P-5. El motor está modelado como un sistema multivariable con vector de entrada $\mathbf{E}(s)$ formado por el flujo de combustible y el ángulo del aspa de la hélice, y el vector de salida $\mathbf{Y}(s)$, formado por la velocidad del motor y la temperatura interna de la turbina. Las matrices de función de transferencia están dadas como:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s(s+2)} & 10 \\ \frac{5}{s} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Encuentre la matriz de función de transferencia en lazo cerrado $[\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)]^{-1}\mathbf{G}(s)$.

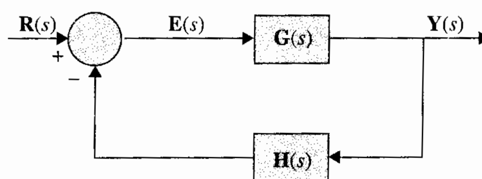


Figura 3P-5

▲ Gráfica de flujo de señal

3-6. Dibuje una gráfica de flujo de señal para el siguiente conjunto de ecuaciones algebraicas. Estas ecuaciones se deben arreglar en la forma de relación de causa y efecto antes de dibujar el gráfico de flujo de señal. Muestre que existen muchos gráficos de flujo de señal posibles para cada conjunto de ecuaciones.

(a) $x_1 = \quad - x_2 - 3x_3 + 3$
$x_2 = 5x_1 - 2x_2 + x_3$
$x_3 = 4x_1 + x_2 - 5x_3 + 5$

(b) $2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1$
$x_1 - 2x_2 - x_3 = 1$
$3x_2 + x_3 = 0$

▲ SFG equivalente de diagramas de bloques

3-7. El diagrama de bloques de un sistema de control se muestra en la Fig. 3P-7. Dibuje una SFG equivalente para el sistema. Encuentre las siguientes funciones de transferencia mediante la aplicación de la fórmula de ganancia de la SFG directamente al diagrama de bloques. Compare las respuestas aplicando la fórmula de ganancia a la SFG equivalente.

$$\left.\frac{Y(s)}{R(s)}\right|_{N=0} \qquad \left.\frac{Y(s)}{N(s)}\right|_{R=0} \qquad \left.\frac{E(s)}{R(s)}\right|_{N=0} \qquad \left.\frac{E(s)}{N(s)}\right|_{R=0}$$

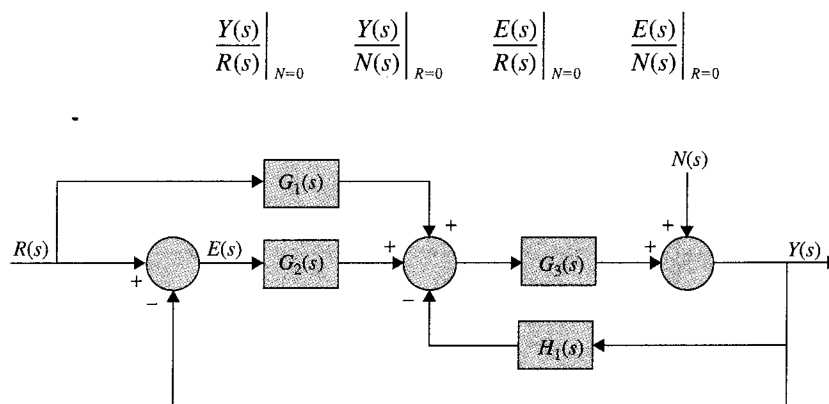


Figura 3P-7

▲ Funciones de transferencia de la SFG

3-8. Aplique la fórmula de ganancia a las SFG mostradas en la Fig. 3P-8 para encontrar las siguientes funciones de transferencia.

$$\frac{Y_5}{Y_1} \qquad \frac{Y_4}{Y_1} \qquad \frac{Y_2}{Y_1} \qquad \frac{Y_5}{Y_2}$$

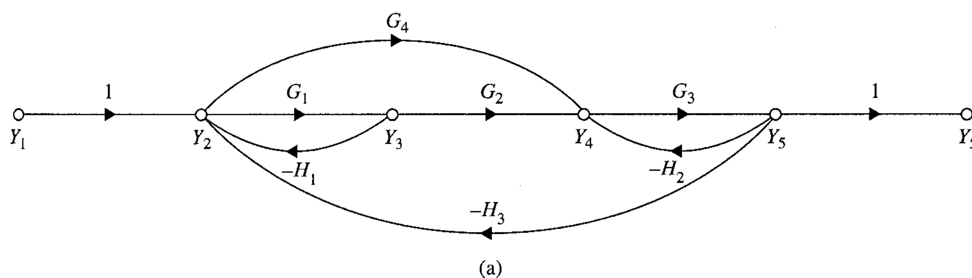


Figura 3P-8

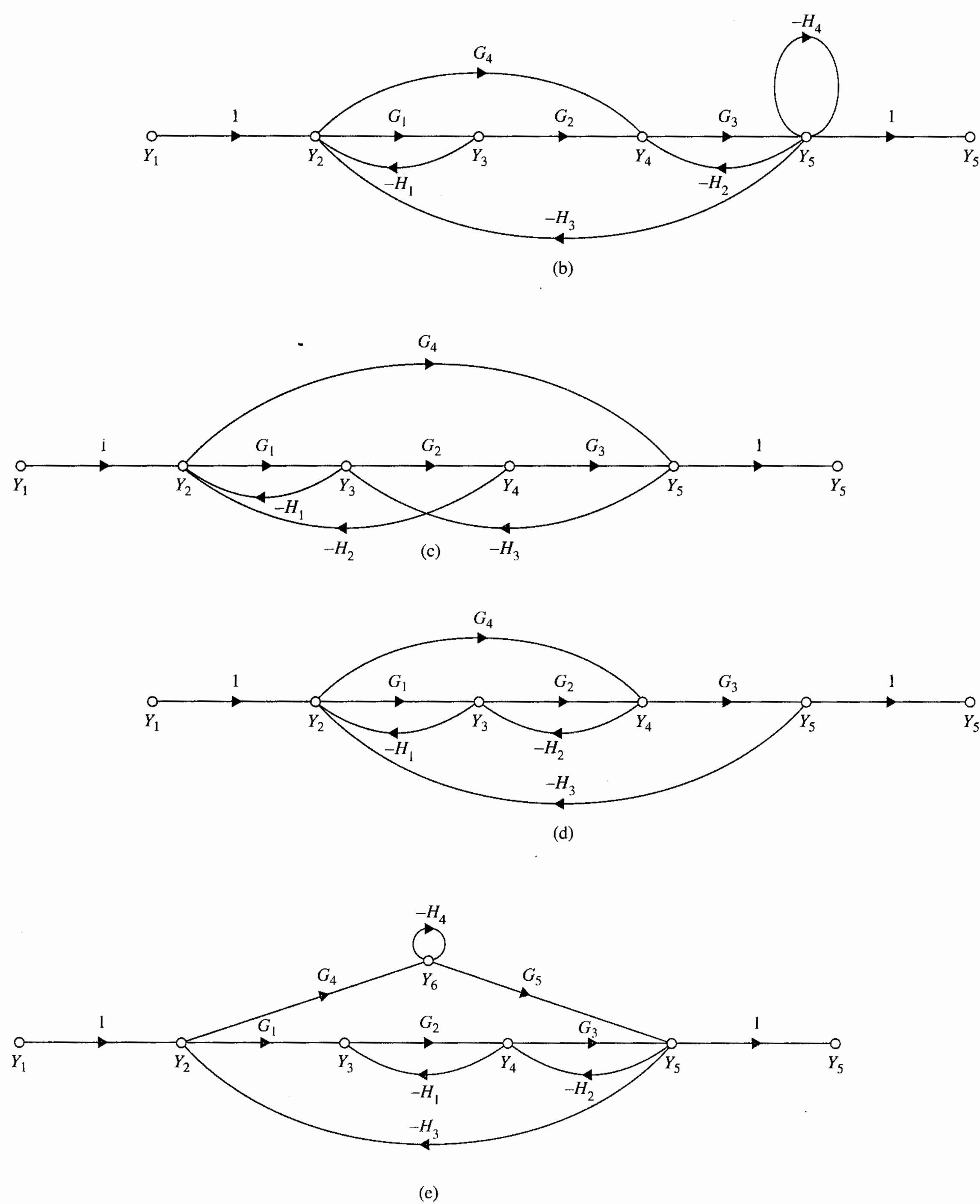
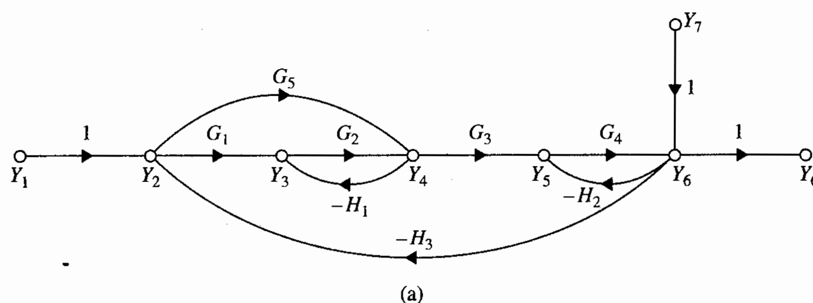


Figura 3P-8 (*continuación*).

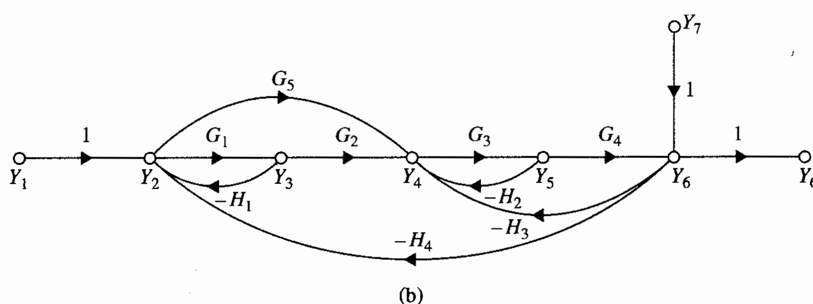
▲ Funciones de transferencia de la SFG

3-13. Encuentre las siguientes funciones de transferencia para la SFG mostrada en la Fig. 3P-13.

$$\left.\frac{Y_6}{Y_1}\right|_{Y_7=0} \quad \text{y} \quad \left.\frac{Y_6}{Y_7}\right|_{Y_1=0}$$



(a)



(b)

Figura 3P-13

▲ Funciones de transferencia de la SFG

3-14. Encuentre las siguientes funciones de transferencia para la SFG mostrada en la Fig. 3P-14. Comente por qué los resultados para las partes (c) y (d) no son los mismos.

(a) $\left.\frac{Y_7}{Y_1}\right|_{Y_8=0}$ **(b)** $\left.\frac{Y_7}{Y_8}\right|_{Y_1=0}$ **(c)** $\left.\frac{Y_7}{Y_4}\right|_{Y_8=0}$ **(d)** $\left.\frac{Y_7}{Y_4}\right|_{y_1=0}$

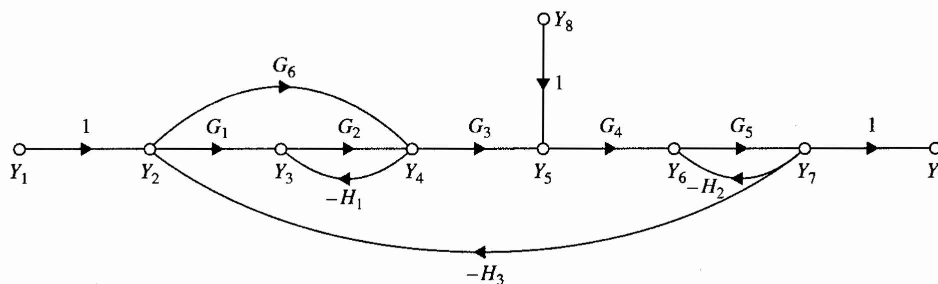
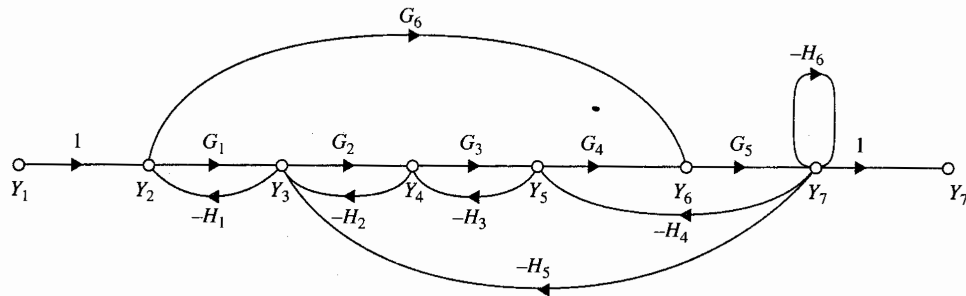


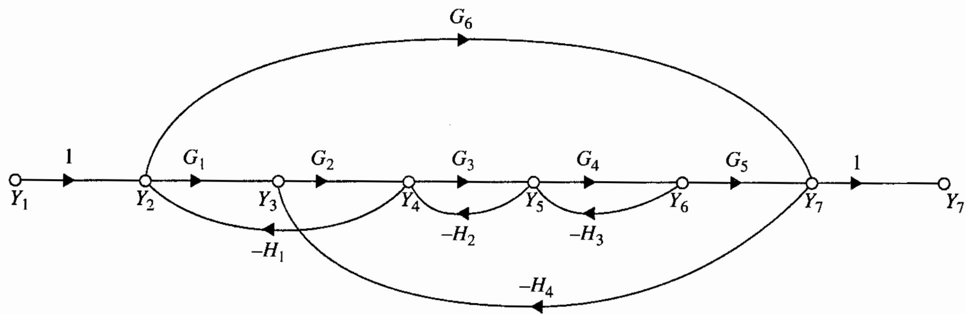
Figura 3P-14

▲ Funciones de transferencia de la SFG

3-9. Encuentre las funciones de transferencia Y_7/Y_1 y Y_2/Y_1 de las SFG mostradas en la Fig. 3P-9.



(a)



(b)

Figura 3P-9

▲ Aplicación de las SFG

3-10. Las gráficas de flujo de señal se pueden utilizar para resolver una variedad de problemas de circuitos eléctricos. En la Fig. 3P-10 se muestra el circuito equivalente de un circuito electrónico. La fuente de voltaje $e_d(t)$ representa una perturbación en el voltaje. El objetivo es encontrar el valor de la constante k, para que el voltaje de salida $e_0(t)$ no sea afectado por $e_d(t)$. Para resolver este problema, es mejor primero escribir un conjunto de ecuaciones de causa y efecto para el circuito. Esto involucra una combinación de nodo y ecuaciones de malla. Entonces construya una SFG utilizando estas ecuaciones. Encuentre la ganancia e_0/e_d con todas las otras entradas puestas a cero. Para que e_d no afecte a e_0, haga que e_0/e_d sea igual a cero.

▲ SFG

3-11. Muestre que los dos sistemas de las Figs. 3P-11(a) y (b) son equivalentes.

▲ SFG

3-12. Muestre que los dos sistemas de las Figs. 3P-12(a) y (b) no son equivalentes.

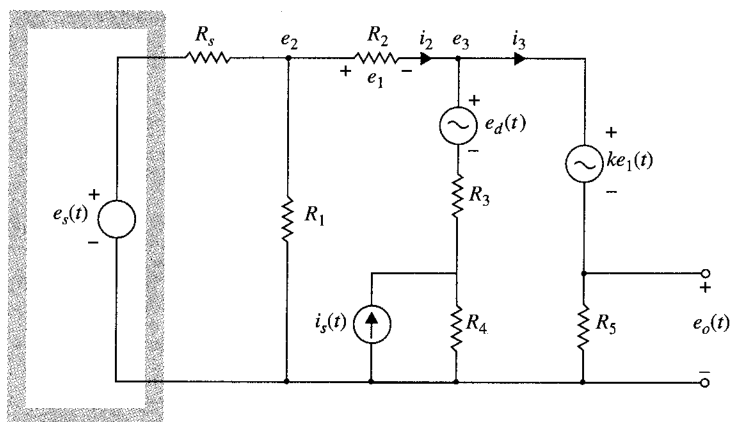
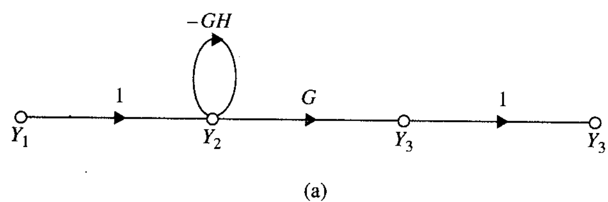
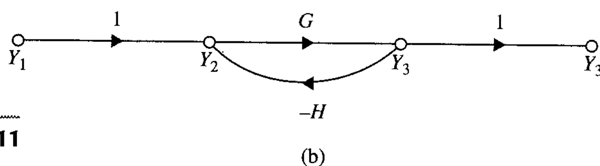


Figura 3P-10

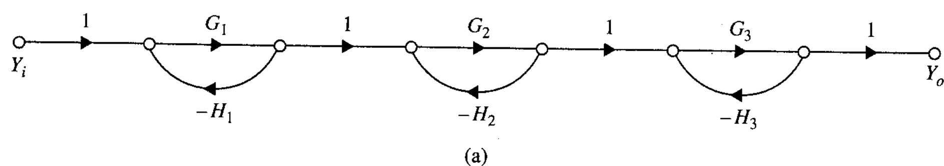


(a)

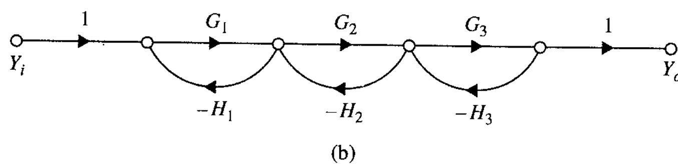


(b)

Figura 3P-11



(a)



(b)

Figura 3P-12

▲ Funciones de transferencia de diagramas de bloques

3-15. El diagrama de bloques de un sistema de control realimentado se muestra en la Fig. 3P-15. Encuentre las siguientes funciones de transferencia:

(a) $\left.\frac{Y(s)}{R(s)}\right|_{N=0}$ (b) $\left.\frac{Y(s)}{E(s)}\right|_{N=0}$ (c) $\left.\frac{Y(s)}{N(s)}\right|_{R=0}$

(d) Encuentre la salida $Y(s)$ cuando $R(s)$ y $N(s)$ son aplicados simultáneamente.

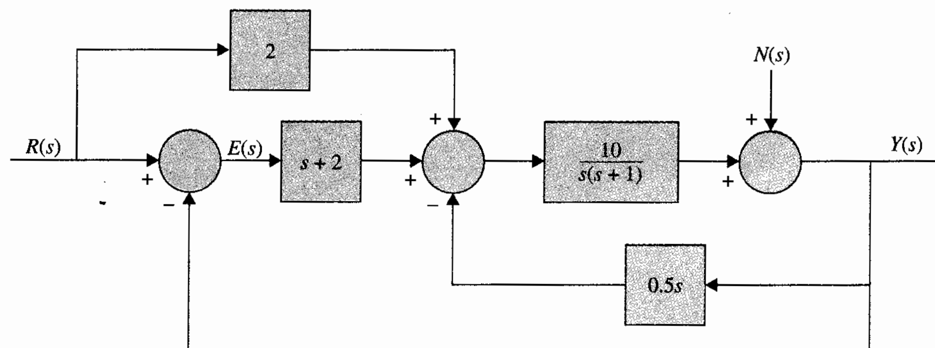


Figura 3P-15

▲ Funciones de transferencia de diagramas de bloques

3-16. El diagrama de bloques de un sistema de control realimentado se muestra en la Fig. 3P-16.

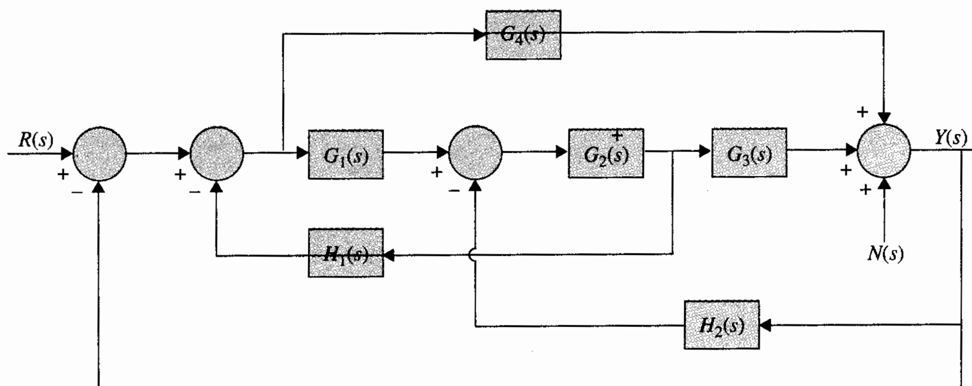


Figura 3P-16

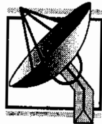
(a) Aplicando la fórmula de ganancia de la SFG en forma directa al diagrama de bloques para encontrar las funciones de transferencia,

$$\left.\frac{Y(s)}{R(s)}\right|_{N=0} \qquad \left.\frac{Y(s)}{N(s)}\right|_{R=0}$$

Exprese $Y(s)$ en términos de $R(s)$ y $N(s)$ cuando ambas entradas se aplican simultáneamente.

(**b**) Encuentre la relación deseada entre las funciones de transferencia $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$, $G_4(s)$, $H_1(s)$ y $H_2(s)$ de tal forma que la salida $Y(s)$ no sea afectada por la señal de perturbación $N(s)$.

▲ Sistema de control de antena



3-17. La Fig. 3P-17 muestra el diagrama de bloques del sistema de control de antena del campo de colectores solares mostrado en la Fig. 1-7. La señal $N(s)$ denota las perturbaciones de las ráfagas de viento que actúan sobre la antena. La función de transferencia de la trayectoria directa $G_d(s)$ se utiliza para eliminar el efecto de $N(s)$ sobre la salida $Y(s)$. Encuentre la función de transferencia $Y(s)/N(S)|_{R=0}$. Determine la expresión de $G_d(s)$ de tal forma que el efecto de $N(s)$ sea eliminado por completo.

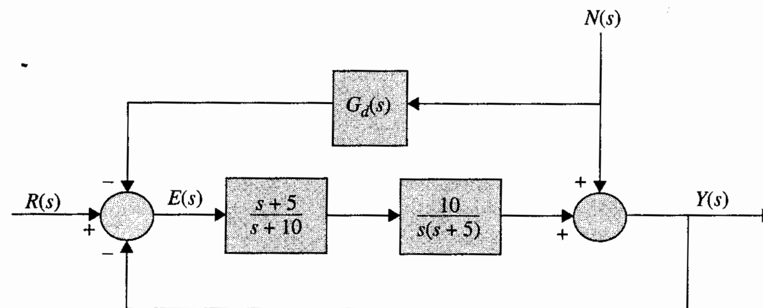


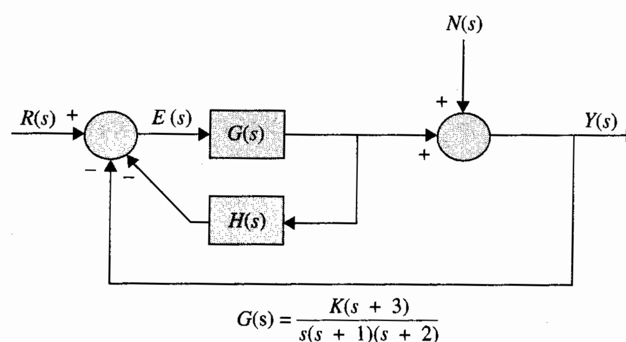
Figura 3P-17

▲ Función de transferencia de un sistema de control de un motor de cd

3-18. La Fig. 3P-18 muestra el diagrama de bloques de un sistema de control de un motor de cd. La señal $N(s)$ denota el par de fricción en el eje del motor.

(**a**) Encuentre la función de transferencia $H(s)$ para que la salida $Y(s)$ no sea afectada por el par de perturbación $N(s)$.

(**b**) Con $H(s)$ determinada en la parte (a), encuentre el valor de K para que el valor en estado estable de $e(t)$ sea igual a 0.1 cuando la entrada es una función rampa unitaria, $r(t) = tu_s(t)$, $R(s) = 1/s^2$, y $N(s) = 0$. Aplique el teorema del valor final.



$$G(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+1)(s+2)}$$

Figura 3P-18

▲ Función de transferencia de un sistema de control de posición

3-19. El diagrama de bloques de un sistema de control de posición del procesador de texto electrónico mostrado en la Fig. 1-3 se presenta en la Fig. 3P-19.

(a) Encuentre la función de transferencia de lazo $\Theta_O(s)/\Theta_e(s)$ (la salida de la trayectoria de realimentación está abierta).

(b) Encuentre la función de transferencia en lazo cerrado $\Theta_O(s)/\Theta_r(s)$.

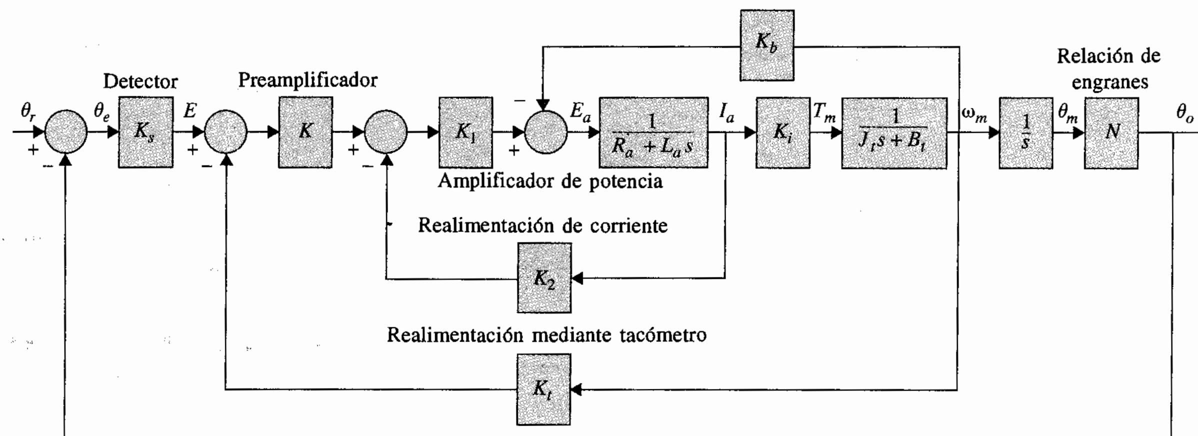


Figura 3P-19

▲ Motor de turbohélice

3-20. El acoplamiento entre las señales del motor de turbohélice mostrado en la Fig. 3-1 se muestra en la Fig. 3P-20. Las señales se definen como: $R_1(s)$ = flujo de combustible, $R_2(s)$ = ángulo del aspa de la hélice, $Y_1(s)$ = velocidad del motor y $Y_2(s)$ = temperatura interna de la turbina.

(a) Dibuje una SFG equivalente para el sistema.

(b) Encuentre la Δ del sistema empleando la fórmula de ganancia de la SFG.

(c) Encuentre las siguientes funciones de transferencia:

$$\left.\frac{Y_1(s)}{R_1(s)}\right|_{R_2=0} \qquad \left.\frac{Y_1(s)}{R_2(s)}\right|_{R_1=0} \qquad \left.\frac{Y_2(s)}{R_1(s)}\right|_{R_2=0} \qquad \left.\frac{Y_2(s)}{R_2(s)}\right|_{R_1=0}$$

(d) Exprese las funciones de transferencia en forma matricial, $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{R}(s)$.

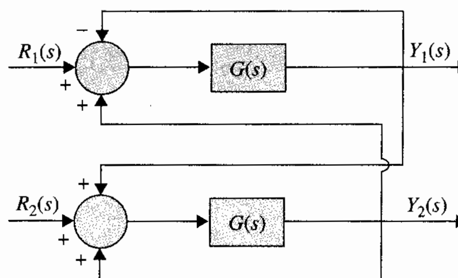


Figura 3P-20

▲ Función de transferencia de un sistema con realimentación condicional

3-21. La Fig. 3P-21 muestra un sistema de control con realimentación condicional. La función de transferencia, $G_p(s)$, denota el proceso controlado, y $G_c(s)$ y $H(s)$ son las funciones de transferencia del controlador.

(a) Obtenga las funciones de transferencia $Y(s)/R(s)|_{N=0}$ y $Y(s)/N(s)|_{R=0}$. Encuentre $Y(s)/R(s)|_{N=0}$ cuando $G_c(s) = G_p(s)$.

(b) Suponga

$$G_p(s) = G_c(s) = \frac{100}{(s+1)(s+5)}$$

Encuentre la respuesta de salida $y(t)$ cuando $N(s) = 0$ y $r(t) = u_s(t)$.

(c) Con $G_p(s)$ y $G_c(s)$ como los dados en la parte (b), seleccione $H(s)$ entre las siguientes opciones de tal forma que cuando $n(t) = u_s(t)$ y $r(t) = 0$, el valor en estado estable de $y(t)$ sea igual a cero. (Puede haber más de una respuesta.)

$$H(s) = \frac{10}{s(s+1)} \qquad H(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)}$$

$$H(s) = \frac{10(s+1)}{s+2} \qquad H(s) = \frac{K}{s^n} \quad (n = \text{entero positivo; seleccione } n)$$

Tenga en mente que los polos de una función de transferencia en lazo cerrado deben estar todos en el semiplano izquierdo del plano s para que el teorema del valor final sea válido.

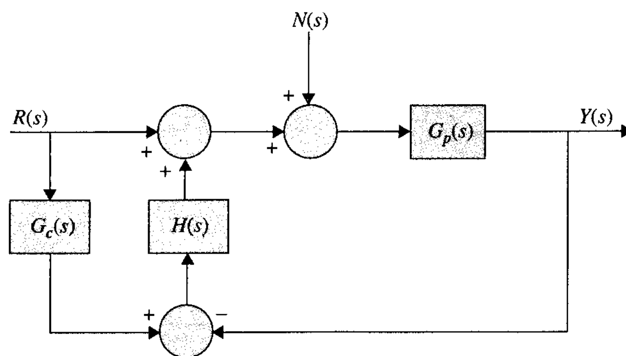


Figura 3P-21

▲ Diagrama de estado, ecuación característica, función de transferencia

3-22. **(a)** Dibuje un diagrama de estado para las siguientes ecuaciones de estado:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -2x_1(t) + 3x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -5x_1(t) - 5x_2(t) + 2r(t)$$

(b) Encuentre la ecuación característica del sistema.

(c) Encuentre las funciones de transferencia $X_1(s)/R(s)$ y $X_2(s)/R(s)$.

▲ Diagrama de estado, ecuaciones de estado, ecuación característica, función de transferencia, valor final

3-23. La ecuación diferencial de un sistema lineal es:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 5\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = r(t)$$

en donde $y(t)$ es la salida y $r(t)$ es la entrada.

(a) Dibuje un diagrama de estado para el sistema.
(b) Escriba la ecuación de estado a partir del diagrama de estado. Defina las variables de estado de derecha a izquierda en orden ascendente.
(c) Encuentre la ecuación característica y sus raíces. Utilice cualquier programa para computadora para encontrar las raíces.
(d) Encuentre la función de transferencia $Y(s)/R(s)$.
(e) Realice la expansión en fracciones parciales de $Y(s)/R(s)$ y encuentre la salida $y(t)$ para ≥ 0 cuando $r(t) = u_s(t)$. Encuentre el valor final de $y(t)$ mediante el uso del teorema del valor final. Utilice cualquier programa de computadora tal como el **pfe** de **CSAD.**

▲ Diagrama de estado, ecuaciones de estado, ecuación característica, función de transferencia, valor final

3-24. Repita el problema 3-23 para la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^4y(t)}{dt^4} + 4\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = r(t)$$

▲ Función de transferencia, ecuación característica, respuesta en estado estable

3-25. El diagrama de bloques de un sistema de control realimentado se muestra en la Fig. 3P-25.

(a) Obtenga las siguientes funciones de transferencia:

$$\left.\frac{Y(s)}{R(s)}\right|_{N=0} \qquad \left.\frac{Y(s)}{N(s)}\right|_{R=0} \qquad \left.\frac{E(s)}{R(s)}\right|_{N=0}$$

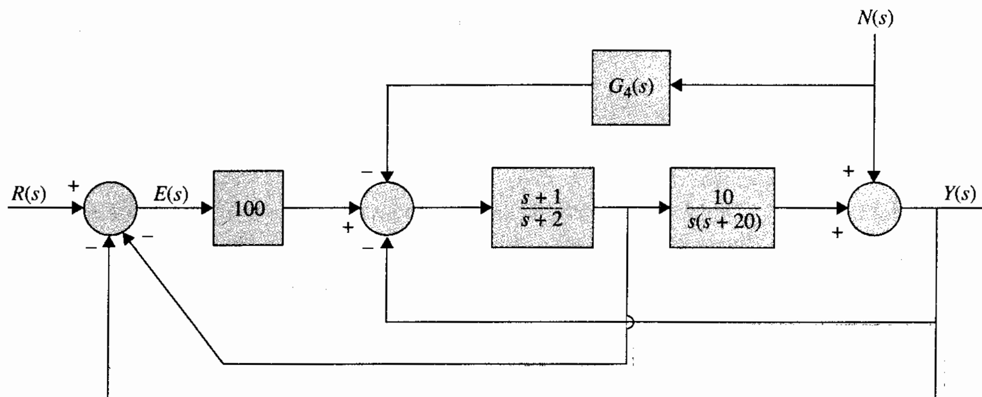


Figura 3P-25

(b) El controlador con la función de transferencia $G_4(s)$ es para reducir el efecto del ruido $N(s)$. Encuentre $G_4(s)$ para que la salida $Y(s)$ sea totalmente independiente de $N(s)$.

(c) Encuentre la ecuación característica y sus raíces cuando $G_4(s)$ es como la determinada en la parte (b).

(d) Encuentre el valor en estado estable de $e(t)$ cuando la entrada es una función escalón unitario. Haga que $N(s) = 0$.

(e) Encuentre $y(t)$ para $t \geq 0$ cuando la entrada es una función escalón unitario. Utilice $G_4(s)$ como la determinada en la parte (b).

▲ Respuesta en tiempo, sistema en tiempo discreto

3-26. Un sistema lineal en tiempo discreto invariante con el tiempo tiene una salida que está descrita mediante la secuencia de tiempo:

$$y(kT) = 1 - e^{-2kT} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

cuando el sistema está sujeto a una secuencia de entrada descrita por $r(kT) = 1$ para toda $k \geq 0$. Encuentre la función de transferencia $G(z) = Y(z)/R(s)$.

▲ Función de transferencia, sistema en tiempo discreto

3-27. Encuentre las funciones de transferencia $Y(z)/R(z)$ de los sistemas en tiempo discreto mostrados en la Fig. 3P-27. El periodo de muestreo es 0.5 segundos.

▲ Integración numérica

3-28. Es bien sabido que la función de transferencia de un integrador analógico es:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s}$$

en donde $X(s)$ y $Y(s)$ son las transformadas de Laplace de la entrada y de la salida del integrador, respectivamente. Existen muchas formas de implantar la integración en forma digital. En un curso básico de computación, se describe la integración rectangular mediante los esquemas mostrados en la Fig. 3P-28. La señal continua $x(t)$ se aproxima mediante una señal de escalera; T es el periodo de muestreo. La integral de $x(t)$, que es el área bajo $x(t)$, se aproxima mediante el área bajo la señal de aproximación rectangular.

(a) Suponga que $y(kT)$ denota la aproximación digital de la integral de $x(t)$ desde $t = 0$ hasta $t = kT$. Entonces $y(kT)$ se puede escribir como:

$$y(kT) = y[(k-1)T] + Tx(kT) \qquad (1)$$

en donde $y[(k-1)T]$ denota el área bajo $x(t)$ desde $t = 0$ a $t = (k-1)T$. Tome la transformada z en ambos miembros de la ecuación (1) y muestre que la función de transferencia del integrador digital es:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Tz}{z-1}$$

(b) La integración rectangular descrita en la Fig. 3P-28(a) se puede interpretar como una operación de muestreo y retención, como se muestra en la Fig. 3P-28(b). La señal $x(t)$ se envía primero a través del muestreador ideal con un periodo de muestreo

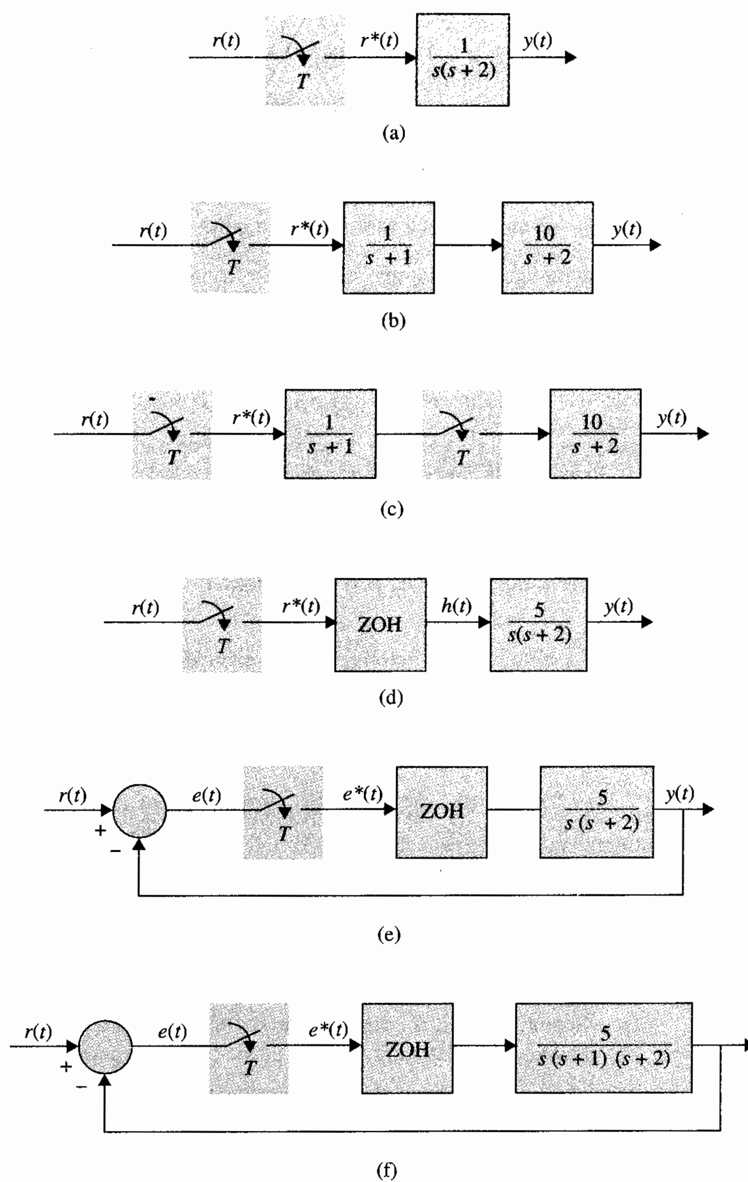
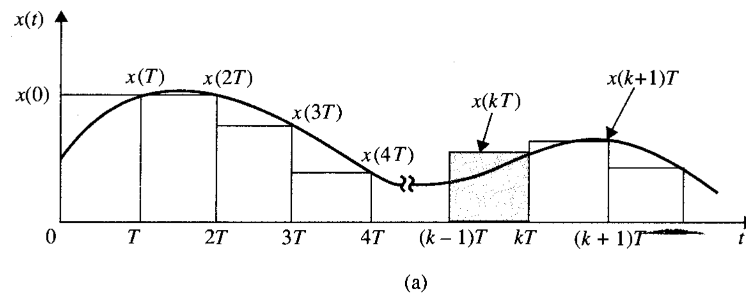
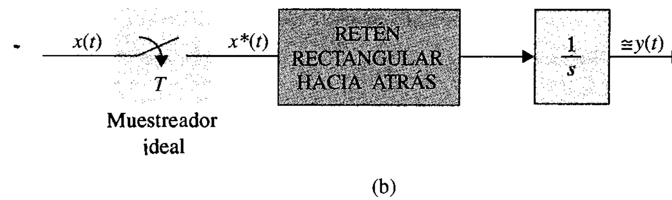


Figura 3P-27

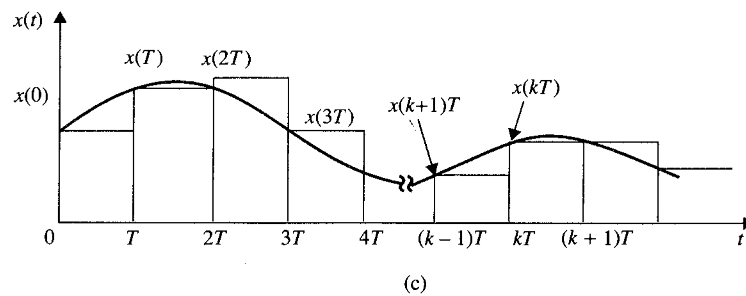
T. La salida del muestreador es la secuencia $x(0), x(T), \ldots, x(kT), \ldots$. Después estos números se envían a través de un dispositivo de retención "hacia atrás" para producir el rectángulo de altura $x(kT)$ durante el intervalo $(k-1)T$ a kT. Verifique el resultado obtenido en la parte (a) para $G(z)$ mediante el empleo de la interpretación de muestreador y retenedor "hacia atrás".



(a)



(b)

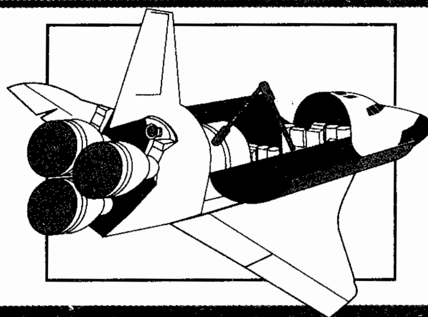


(c)

Figura 3P-28

(c) Como una alternativa, se puede utilizar un retén rectangular "hacia adelante", como se muestra en la Fig. 3P-28(c). Encuentre la función de transferencia $G(z)$ para dicho integrador rectangular.

4 Modelado matemático de sistemas físicos



PALABRAS CLAVE Y TEMAS

- ▲ Modelado de sistemas
- ▲ Sistemas mecánicos
- ▲ Potenciómetros
- ▲ Tacómetros
- ▲ Codificadores
- ▲ Motores de cd
- ▲ Amp. op (amplificadores operacionales)
- ▲ Linealización de sistemas no lineales
- ▲ Sistemas con retardo de tiempo

4-1 Introducción

Una de las tareas más importantes en el análisis y diseño de sistemas de control es el modelado matemático de los sistemas. En los capítulos anteriores, se han introducido dos métodos muy comunes para modelar sistemas lineales denominados el método de la función de transferencia y el método de las variables de estado. La función de transferencia es válida sólo para sistemas lineales invariantes con el tiempo, mientras que las ecuaciones de estado se pueden aplicar tanto a sistemas lineales como a no lineales.

Aunque el análisis y diseño de sistemas de control lineales se han desarrollado ampliamente, sus contrapartes para sistemas no lineales son normalmente muy complejas. Por

esto, a menudo, el ingeniero de sistemas de control tiene la tarea de determinar no sólo cómo describir exactamente un sistema de forma matemática, sino, más importante, cómo hacer suposiciones y aproximaciones correctas, cuando son necesarias, para que el sistema sea caracterizado en una forma realista mediante un modelo matemático lineal. No es difícil entender que las simulaciones analíticas y por computadora de cualquier sistema son tan buenas como el modelo usado para realizarlas. Se debe enfatizar que en la ingeniería de control moderna se debe poner especial interés en el modelado matemático de sistemas para que los problemas de análisis y diseño se puedan resolver convenientemente mediante el empleo de las computadoras. Por todo lo anterior, los objetivos principales de este capítulo son:

1. Introducir algunos componentes comúnmente utilizados en sistemas de control.
2. Mostrar el modelado matemático de sistemas de control y sus componentes.
3. Mostrar cómo el modelado conduce a la solución por computadora.
4. Linealizar sistemas no lineales.

El propósito es introducir el método de modelado. Ya que existe un gran número de tipos de componentes de sistemas de control, no se pretende un tratamiento exhaustivo.

4-2 Ecuaciones de circuitos eléctricos

La forma clásica de escribir ecuaciones de circuitos eléctricos se basa en el método de mallas o en el de nodos, los cuales están formulados a partir de las dos leyes de Kirchhoff. Un método moderno para escribir las ecuaciones de redes es el método de las variables de estado, el cual se ilustró brevemente en la Sec. 2-3. Ya que los circuitos eléctricos que se encuentran en la mayoría de los sistemas de control son muy simples, el tema es tratado aquí a un nivel introductorio. El modelado en variables de estado de circuitos eléctricos se puede ilustrar mediante los dos ejemplos siguientes.

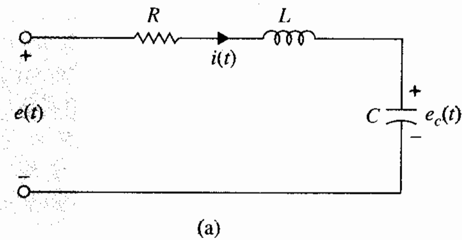
Ejemplo 4-1

Se considera el circuito *RLC* que se muestra en la Fig. 4-1(a). Una forma práctica es asignar la corriente en el inductor L, $i(t)$, y el voltaje a través del capacitor C, $e_c(t)$, como las variables de estado. La razón de esta selección se debe a que las variables de estado están directamente relacionadas con los elementos que almacenan energía en el sistema. El inductor es un almacén de energía cinética eléctrica y el capacitor es un almacén de energía potencial eléctrica. Al asignar a $i(t)$ y $e_c(t)$ como las variables de estado, se tiene una descripción completa del pasado (a través de las condiciones iniciales) y de los estados presente y futuro del circuito.

Las ecuaciones de estado del circuito de la Fig. 4-1(a) se escriben al igualar la corriente en C y el voltaje en L en términos de las variables de estado y del voltaje aplicado $e(t)$. Se tiene:

Corriente en C:
$$C\frac{de_c(t)}{dt} = i(t) \tag{4-1}$$

Voltaje en L:
$$L\frac{di(t)}{dt} = -e_c(t) - Ri(t) + e(t) \tag{4-2}$$



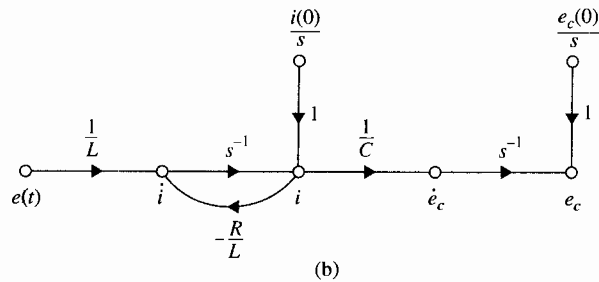


Figura 4-1 (a) Circuito RLC. (b) Diagrama de estado.

En forma matricial las ecuaciones de estado se expresan como:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{de_c(t)}{dt} \\ \dfrac{di(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} e(t) \tag{4-3}$$

El diagrama de estado del circuito se muestra en la Fig. 4-1(b). Observe que las salidas de los integradores se definen como las variables de estado. Las funciones de transferencia del sistema se obtienen al aplicar la fórmula de ganancia de la gráfica de flujo de señal (SFE) al diagrama de estado cuando todas las condiciones iniciales son cero:

$$\frac{E_c(s)}{E(s)} = \frac{(1/LC)s^{-2}}{1 + (R/L)s^{-1}} = \frac{1}{Cs(Ls + R)} \tag{4-4}$$

$$\frac{I(s)}{E(s)} = \frac{(1/L)s^{-1}}{1 + (R/L)s^{-1}} = \frac{1}{Ls + R} \tag{4-5}$$

▲

Ejemplo 4-2

Como otro ejemplo de escribir las ecuaciones de estado de un circuito eléctrico, se considera el circuito mostrado en la Fig. 4-2(a). De acuerdo con la discusión anterior, el voltaje a través del capacitor, $e_c(t)$, y las corrientes en los inductores, $i_1(t)$ y $i_2(t)$, se asignan como las variables de estado, como se muestra en la Fig. 4-2(a). Las ecuaciones de estado del circuito se obtienen al escribir los voltajes a través de los inductores y las corrientes en el capacitor en función de las tres variables de estado.

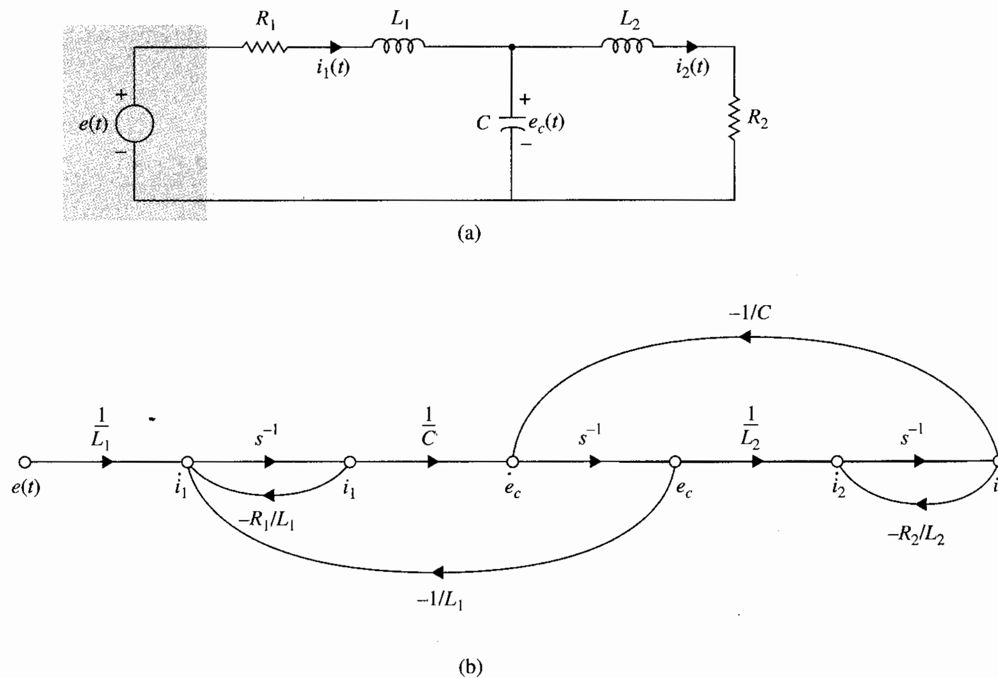


Figura 4-2 (a) Circuito para el ejemplo 4-2. (b) Diagrama de estado.

Las ecuaciones de estado son:

$$L_1 \frac{di_1(t)}{dt} = R_1 i_1(t) - e_c(t) + e(t) \qquad (4\text{-}6)$$

$$L_2 \frac{di_2(t)}{dt} = -R_2 i_2(t) + e_c(t) \qquad (4\text{-}7)$$

$$C \frac{de_c(t)}{dt} = i_1(t) - i_2(t) \qquad (4\text{-}8)$$

En forma matricial, las ecuaciones de estado se escriben como:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_1(t)}{dt} \\ \frac{di_2(t)}{dt} \\ \frac{de_c(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ e_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e(t) \qquad (4\text{-}9)$$

El diagrama de estado del circuito, sin los estados iniciales, se presenta en la Fig. 4-2(b). Las funciones de transferencia entre $I_1(s)$ y $I_2(s)$ y $E_c(s)$ y $E(s)$, respectivamente, se escriben a partir del diagrama de estado:

$$\frac{I_1(s)}{E(s)} = \frac{L_2Cs^2 + R_2Cs + 1}{\Delta} \tag{4-10}$$

$$\frac{I_2(s)}{E(s)} = \frac{1}{\Delta} \tag{4-11}$$

$$\frac{E_c(s)}{E(s)} = \frac{L_2s + R_2}{\Delta} \tag{4-12}$$

en donde:

$$\Delta = L_1L_2Cs^3 + (R_1L_2 + R_2L_1)Cs^2 + (L_1 + L_2 + R_1R_2C)s + R_1 + R_2 \tag{4-13}$$

▲

4-3 Modelado de elementos de sistemas mecánicos

La mayoría de los sistemas de control contiene componentes tanto mecánicos como eléctricos, aunque algunos sistemas también tienen elementos neumáticos e hidráulicos. Desde un punto de vista matemático, la descripción de elementos mecánicos y eléctricos son análogos. De hecho, se puede demostrar que dado un dispositivo eléctrico, normalmente existe un contraparte matemática mecánica análoga, y viceversa.

El movimiento de elementos mecánicos se puede describir en varias dimensiones como de **traslación,** de **rotación,** o sus combinaciones. Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de sistemas mecánicos están formuladas directa o indirectamente mediante la ley del movimiento de Newton.

4-3-1 Movimiento de traslación

El movimiento de traslación está definido como un movimiento que toma lugar a lo largo de una línea recta. Las variables que se utilizan para describir el movimiento de traslación son la **aceleración, velocidad** y **desplazamiento.** La ley del movimiento de Newton establece que *la suma algebraica de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido en una dirección dada es igual al producto de la masa del cuerpo por su aceleración en la misma dirección.* La ley se puede expresar como:

$$\sum \text{fuerzas} = Ma \tag{4-14}$$

en donde M denota la masa y a la aceleración en la dirección considerada. En general, para el movimiento de traslación, los siguientes elementos de sistemas están involucrados.

1. Masa. *La masa es la propiedad de un elemento de almacenar energía cinética del movimiento de traslación.* La masa es análoga a la inductancia de circuitos eléctricos. Si W denota el peso del cuerpo, entonces M está dada por:

$$M = \frac{W}{g} \tag{4-15}$$

en donde g es la aceleración de caída libre del cuerpo debida a la gravedad. (g = 32.174 pies/s^2 en unidades británicas, y g = 9.8066 m/s^2 en el SI de unidades.)

El conjunto consistente de unidades básicas en unidades del sistema británico o del SI son:

Unidades	Masa M	Aceleración	Fuerza
SI	kilogramo (kg)	m/s^2	Newton (N)
Británicas	slug	pies/s^2	libra (lb fuerza)

Los factores de conversión entre éstas y otras unidades secundarias son los siguientes:

Fuerza

1 N = 0.2248 lb (fuerza) = 3.5969 oz (fuerza)

Masa

1 kg = 1000 g = 2.2046 lb (masa)
= 35.274 oz (masa)
= 0.06852 slug

Distancia

1 m = 3.2808 pies = 39.37 plg
1 plg = 25.4 mm
1 pie = 0.3048 m

La Fig. 4-3 ilustra la situación en donde una fuerza está actuando sobre un cuerpo con masa M. La ecuación de la fuerza se escribe como:

$$f(t) = Ma(t) = M\frac{d^2y(t)}{dt^2} = M\frac{dv(t)}{dt} \tag{4-16}$$

en donde $v(t)$ denota la velocidad.

2. Resorte lineal. En la práctica, un resorte lineal puede ser un modelo de un resorte real o la compliancia de un cable o una banda. En general, *un resorte está considerado como:*

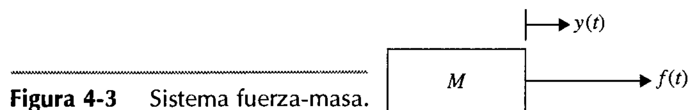


Figura 4-3 Sistema fuerza-masa.

un elemento que almacena energía potencial. Es análogo a un capacitor en un circuito eléctrico. Todos los resortes en la vida real son, de alguna manera, no lineales. Sin embargo, si la deformación del resorte es pequeña, su comportamiento se puede aproximar por la relación lineal:

$$f(t) = Ky(t) \tag{4-17}$$

en donde K es la **constante del resorte,** o simplemente **rigidez.**

Los dos sistemas de unidades básicas para la constante del resorte son los siguientes:

Unidades	Constante del resorte K
SI	N/m
Británicas	lb/pies

La ecuación (4-17) implica que la fuerza que actúa sobre el resorte es directamente proporcional al desplazamiento (deformación) del resorte. Un modelo de un elemento de resorte lineal se presenta en la Fig. 4-4. Si el resorte es precargado con una tensión T, la ecuación (4-17) se debe modificar a:

$$f(t) - T = Ky(t) \tag{4-18}$$

Fricción para el movimiento de traslación

Cuando exista movimiento o tendencia de movimiento entre dos elementos físicos, se presentarán fuerzas de fricción. Las fuerzas de fricción que se encuentran en los sistemas físicos son, normalmente, de naturaleza no lineal. Las características de las fuerzas de fricción entre dos superficies que se encuentran en contacto dependen de factores como la composición de las superficies, la presión entre las mismas, su velocidad relativa, y otros, por lo que la descripción matemática de las fuerzas de fricción es difícil. Existen tres tipos de fricción que se

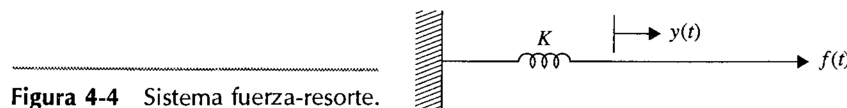


Figura 4-4 Sistema fuerza-resorte.

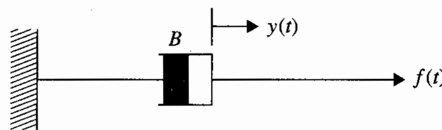


Figura 4-5 Amortiguador para fricción viscosa.

emplean comúnmente en los sistemas prácticos: **fricción viscosa, fricción estática** y **fricción de Coulomb.** Éstas de discutirán a continuación.

1. Fricción viscosa. *La fricción viscosa representa una fuerza que es una relación lineal entre la fuerza aplicada y la velocidad.* A menudo, el esquema del elemento de fricción viscosa se representa como un amortiguador, como el que se muestra en la Fig. 4-5. La expresión matemática de la fricción viscosa es:

$$f(t) = B\frac{dy(t)}{dt} \tag{4-19}$$

en donde B es el **coeficiente de fricción viscosa.**
Las unidades de B son las siguientes:

Unidades	Coeficiente de fricción viscosa B
SI	N/m/s
Británicas	lb/pies/s

La Fig. 4-6 (a) muestra la relación funcional entre la fuerza de fricción viscosa y la velocidad.

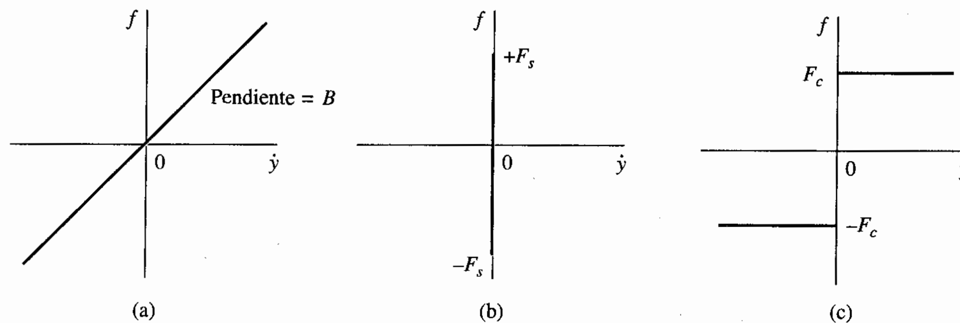


Figura 4-6 Relaciones funcionales de fuerzas de fricción lineal y no lineal. (a) Fricción viscosa. (b) Fricción estática. (c) Fricción de Coulomb.

2. Fricción estática. *La fricción estática representa una fuerza que tiende a prevenir el movimiento desde el comienzo.* La fuerza de fricción estática se puede representar mediante la siguiente expresión:

$$f(t) = \pm(F_s)|_{\dot{y}=0} \tag{4-20}$$

la cual está definida como la fuerza de fricción que existe sólo cuando el cuerpo está estático pero tiene una tendencia a moverse. El signo de la fricción depende de la dirección del movimiento o de la dirección inicial de la velocidad. La relación fuerza a velocidad de la fricción estática se ilustra en la Fig. 4-6(b). Observe que una vez que el movimiento comienza, la fuerza de fricción estática desaparece y otras fricciones toman su lugar.

3. Fricción de Coulomb. *La fricción de Coulomb es una fuerza que tiene una amplitud constante con respecto al cambio de velocidad, pero el signo de la fuerza de fricción cambia al invertir la dirección de la velocidad.* La relación matemática para la fricción de Coulomb está dada por:

$$f(t) = F_c \frac{dy(t)/dt}{|dy(t)/dt|} \tag{4-21}$$

en donde F_c es el **coeficiente de la fricción de Coulomb.** La descripción funcional de la relación fuerza-velocidad se presenta en la figura 4-6(c).

Se debe puntualizar que los tres tipos de fricción citados aquí son meros modelos prácticos que han sido ideados para representar fenómenos de fricción encontrados en sistemas físicos. Éstos no son exhaustivos ni garantizan ser exactos. En muchas situaciones no usuales se tienen que emplear otros modelos para representar adecuadamente el fenómeno real. Uno de estos ejemplos es la fricción de rodado en seco [4, 5], que se utiliza para modelar la fricción en baleros de alta presión que se emplean en sistemas de naves espaciales. Se observa que la fricción de rodado en seco tiene propiedades de histéresis no lineal que hacen imposible que se utilice en el modelado de sistemas lineales.

4-3-2 Movimiento de rotación

El movimiento de rotación de un cuerpo se puede definir como el movimiento alrededor de un eje fijo. La extensión de la ley de Newton para el movimiento de rotación establece que *la suma algebraica de los momentos o pares alrededor de un eje fijo es igual al producto de la inercia por la aceleración angular alrededor del eje;* o,

$$\sum \text{fuerzas} = J\alpha \tag{4-22}$$

en donde J denota la inercia y α es la aceleración angular. Las otras variables que se usan generalmente para describir el movimiento de rotación son el **par** T, la **velocidad angular** ω y el **desplazamiento angular** θ. Los elementos involucrados con el movimiento de rotación son los siguientes.

1. Inercia. *La inercia, J, se considera a la propiedad de un elemento de almacenar energía cinética del movimiento de rotación.* La inercia de un elemento dado depende de la composición geométrica alrededor del eje de rotación y de su densidad. Por ejemplo, la inercia de un disco circular o eje alrededor de su eje geométrico está dado por:

$$J = \tfrac{1}{2} Mr^2 \tag{4-23}$$

Cuando un par es aplicado a un cuerpo con inercia J, como se presenta en la Fig. 4-7, la ecuación del par se escribe como:

$$T(t) = J\alpha(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt} = J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \tag{4-24}$$

en donde $\theta(t)$ es el desplazamiento angular, $\omega(t)$ es la velocidad angular, y $\alpha(t)$ es la aceleración angular.

Las unidades en el SI y británico para la inercia y las variables de la ecuación (4-24) se tabulan a continuación:

Unidades	Inercia	Par de torsión	Desplazamiento angular
SI	kg-m^2	N-m	rad
		din-cm	rad
Británicas	slug-pie^2	lb-pie	
	lb-pie-s^2		rad
	oz-plg-s^2	oz-plg	

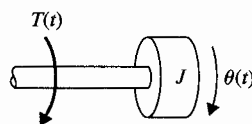


Figura 4-7 Sistema par-inercia.

Los siguientes factores de conversión son útiles:

Desplazamiento angular

$$1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} = 57.3 \text{ grados}$$

Velocidad angular

$$1 \text{ rpm} = \frac{2\pi}{60} = 0.1047 \text{ rad/s}$$
$$1 \text{ rpm} = 6 \text{ grados/s}$$

Par

$$1 \text{ g-cm} = 0.0139 \text{ oz-plg}$$
$$1 \text{ lb-pie} = 192 \text{ oz-plg}$$
$$1 \text{ oz-plg} = 0.00521 \text{ lb-pie}$$

Inercia

$$1 \text{ g-cm} = 1.417 \times 10^{-5} \text{ oz-plg-s}^2$$
$$1 \text{ lb-pie-s}^2 = 192 \text{ oz-plg-s}^2 = 32.2 \text{ lb-pie}^2$$
$$1 \text{ oz-plg-s}^2 = 386 \text{ oz-plg}^2$$
$$1 \text{ g-cm-s}^2 = 980 \text{ g-cm}^2$$

2. Resorte torsional. Como con el resorte lineal para el movimiento de traslación, la **constante del resorte torsional *K*,** en par por unidad de desplazamiento angular, puede representar la compliancia de una varilla o un eje cuando está sujeto a un par aplicado. La Fig. 4-8 ilustra un sistema par-resorte que se puede representar por la ecuación:

$$T(t) = K\theta(t) \tag{4-25}$$

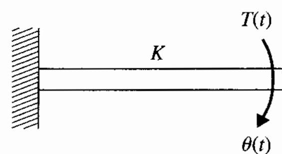


Figura 4-8 Sistema par-resorte torsional.

Las unidades de la constante del resorte K en el SI y británico son las siguientes:

Unidades	Constante del resorte K
SI	N-m/rad
Británicas	pie-lb/rad

Si el resorte torsional está precargado por un par TP, la ecuación (4-25) se modifica a:

$$T(t) - TP \doteq K\theta(t) \quad (4\text{-}26)$$

3. Fricción para movimiento de rotación. Los tres tipos de fricción descritos para el movimiento de traslación se pueden manejar para el movimiento de rotación. De este modo, las ecuaciones (4-19), (4-20) y (4-21) se pueden remplazar, respectivamente, por sus contrapartes:

Fricción viscosa: $$T(t) = B\frac{d\theta(t)}{dt} \quad (4\text{-}27)$$

Fricción estática: $$T(t) = \pm(F_s)|_{\dot{\theta}=0} \quad (4\text{-}28)$$

Fricción de Coulomb: $$T(t) = F_c\frac{d\theta(t)/dt}{|d\theta(t)/dt|} \quad (4\text{-}29)$$

4-3-3 Conversión entre movimientos de traslación y de rotación

En sistemas de control de movimientos, a menudo, es necesario convertir movimiento de rotación en de traslación. Por ejemplo, una carga se puede controlar para que se mueva a lo largo de una línea recta mediante un motor giratorio junto con un tornillo, tal como se mues-

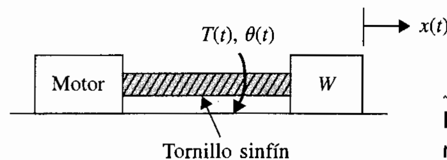


Figura 4-9 Sistema de control de movimiento rotatorio a lineal (tornillo sinfín).

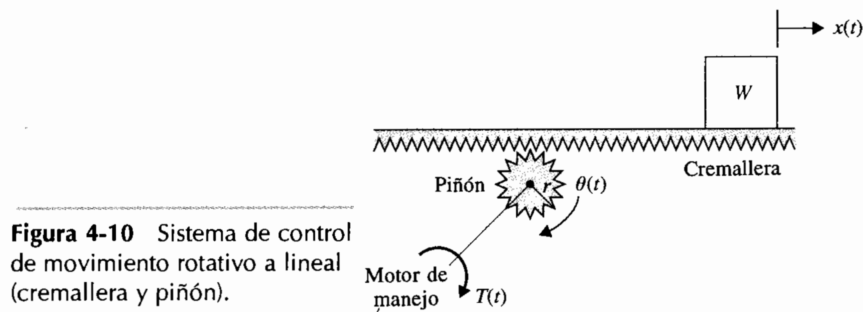


Figura 4-10 Sistema de control de movimiento rotativo a lineal (cremallera y piñón).

tra en la Fig. 4-9. La Fig. 4-10 presenta una situación similar en la que una cremallera y piñón se emplean para una conexión mecánica. Otro sistema familiar en el control del movimiento es el control de una masa a través de una polea mediante un motor giratorio, tal como el control de una rueda de impresión en una máquina de escribir eléctrica (Fig. 4-11). Los sistemas mostrados en las Figs. 4-9, 4-10 y 4-11 se pueden representar por un sistema simple con una inercia equivalente conectada directamente al motor. Por ejemplo, la masa en la Fig. 4-11 se puede ver como una masa puntual que se mueve alrededor de la polea, la cual tiene un radio r. Al despreciar la inercia de la polea, la inercia equivalente que el motor ve es:

$$J = Mr^2 = \frac{W}{g} r^2 \tag{4-30}$$

Si el radio del piñón de la Fig. 4-10 es r, la inercia equivalente que el motor ve también está dada por la ecuación (4-30).

Ahora se considera el sistema de la Fig. 4-9. El tornillo sinfin , L, se define como la distancia lineal que la masa viaja por revolución del tornillo. En principio, los dos sistemas en las Figs. 4-10 y 4-11 son equivalentes, En la Fig. 4-10 la distancia que viaja la masa por revolución del piñón es $2\pi r$. Al utilizar la ecuación (4-30) como la inercia equivalente para el sistema de la Fig. 4-9, se tiene:

$$J = \frac{W}{g}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \tag{4-31}$$

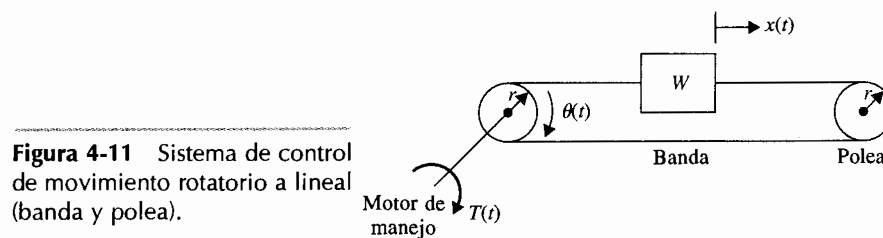


Figura 4-11 Sistema de control de movimiento rotatorio a lineal (banda y polea).

en donde, en unidades británicas,

J = inercia (oz-plg-s^2) L = tornillo sinfin (plg)
W = peso (oz) g = aceleración de la gravedad (386.4 plg/s^2)

4-3-4 Trenes de engranes, palancas y bandas

Un tren de engranes, una palanca o una banda sobre una polea son dispositivos mecánicos que transmiten energía desde una parte del sistema a otro en una forma tal que se alteran la fuerza, el par, la velocidad y desplazamiento. Estos dispositivos también se pueden ver como dispositivos de acoplamiento empleados para lograr la máxima transferencia de potencia. En la Fig. 4-12 se presentan dos engranes acoplados. La inercia y la fricción de los engranes son despreciadas en el caso ideal considerado.

Las relaciones entre los pares T_1 y T_2 los desplazamientos angulares θ_1 y θ_2 y los números de dientes N_1 y N_2 del tren de engranes se obtienen de los siguientes hechos:

1. *El número de dientes sobre la superficie de los engranes es proporcional a los radios r_1 y r_2 de los engranes; esto es*:

$$r_1 N_2 = r_2 N_1 \tag{4-32}$$

2. *La distancia sobre la superficie que viaja cada engrane es la misma.* Por tanto:

$$\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2 \tag{4-33}$$

3. *El trabajo realizado por un engrane es igual al que realiza el otro engrane, ya que se supone que no hay pérdidas.* Por tanto:

$$T_1 \theta_1 = T_2 \theta_2 \tag{4-34}$$

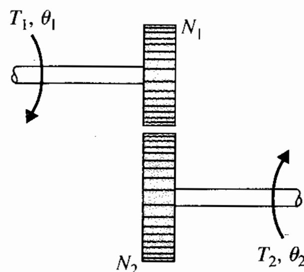


Figura 4-12 Tren de engranes.

Si las velocidades angulares de los dos engranes, ω_1 y ω_2, son puestas en la figura, las ecuaciones (4-32) a (4-34) llevan a:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} \tag{4-35}$$

En la práctica, los engranes tienen inercia y fricción entre los dientes de los engranes acoplados que a menudo no se pueden despreciar. Una representación equivalente de un tren de engranes con fricción viscosa, fricción de Coulomb e inercia, considerados como de parámetros concentrados se presenta en la Fig. 4-13, en donde T denota el par aplicado, T_1 y T_2 son los pares de torsión transmitidos, F_{c1}, y F_{c2}, son los coeficientes de la fricción de Coulomb, y B_1 y B_2 son los coeficientes de fricción viscosa. La ecuación del par para el engrane 2 es:

$$T_2(t) = J_2\frac{d^2\theta_2(t)}{dt^2} + B_2\frac{d\theta_2(t)}{dt} + F_{c2}\frac{\omega_2}{|\omega_2|} \tag{4-36}$$

La ecuación del par para el lado del engrane 1 es:

$$T(t) = J_1\frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} + B_1\frac{d\theta_1(t)}{dt} + F_{c1}\frac{\omega_1}{|\omega_1|} + T_1(t) \tag{4-37}$$

Al emplear la ecuación (4-35), la ecuación (4-36) se convierte en:

$$T_1(t) = \frac{N_1}{N_2}T_2(t) = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2\frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 B_2\frac{d\theta_1(t)}{dt} + \frac{N_1}{N_2}F_{c2}\frac{\omega_2}{|\omega_2|} \tag{4-38}$$

La ecuación (4-38) indica que *es posible reflejar la inercia, fricción, compliancia, par, velocidad, y desplazamiento desde un lado del tren de engranes hacia el otro.* La siguientes

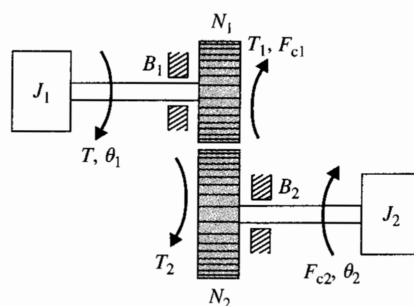


Figura 4-13 Tren de engranes con fricción e inercia.

cantidades se obtienen cuando se reflejan desde el engrane 2 al engrane 1:

Inercia: $\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2$

Desplazamiento angular: $\frac{N_1}{N_2}\theta_2$

Coeficiente de fricción viscosa: $\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 B_2$

Velocidad angular: $\frac{N_1}{N_2}\omega_2$

Par: $\frac{N_1}{N_2}T_2$

Par de fricción de Coulomb: $\frac{N_1}{N_2}F_{c2}\frac{\omega_2}{|\omega_2|}$

De forma similar, los parámetros y variables de los engranes se pueden reflejar desde el engrane 1 al engrane 2 al intercambiar los subíndices en las expresiones anteriores.

Si el efecto de un resorte torsional está presente, la constante del resorte también se multiplica por $(N_1/N_2)^2$ al reflejarla desde el engrane 2 al engrane 1. Ahora, al sustituir la ecuación (4-38) en la ecuación (4-37), se obtiene:

$$T(t) = J_{1e}\frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} + B_{1e}\frac{d\theta_1(t)}{dt} + T_F \tag{4-39}$$

en donde:

$$J_{1e} = J_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2 \tag{4-40}$$

$$B_{1e} = B_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 B_2 \tag{4-41}$$

$$T_F = F_{c1}\frac{\omega_1}{|\omega_1|} + \frac{N_1}{N_2}F_{c2}\frac{\omega_2}{|\omega_2|} \tag{4-42}$$

Ejemplo 4-3

Dada una carga que tiene inercia 0.05 oz-plg-s^2 y par de fricción de Coulomb de 2 oz-plg, encuentre el par de fricción y la inercia reflejadas a través de un tren de engranes con relación 1:5 ($N_1/N_2 = 1/5$, con N_2 en el lado de la carga). La inercia reflejada en el lado de N_1 es $\left(\frac{1}{5}\right)^2 \times 0.05 = 0.002$ oz-plg-s^2. La fricción de Coulomb reflejada es $\frac{1}{5} \times 2 = 0.4$ oz-plg. ▲

Las bandas y cadenas sirven para el mismo propósito que el tren de engranes excepto que permiten la transferencia de energía sobre una distancia mayor sin utilizar un número excesivo de engranes. La Fig. 4-14 muestra el diagrama de una cadena o banda entre dos poleas. Suponiendo que no hay deslizamiento entre la banda y la polea, es fácil ver que la

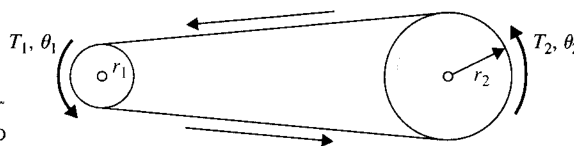


Figura 4-14 Manejador de cadena o banda.

ecuación (4-35) se aplica a este caso. De hecho, la reflexión o transmitancia del par, inercia, fricción, etcétera, es similar a la del tren de engranes.

El sistema de palanca mostrado en la Fig. 4-15 transmite el movimiento de traslación y las fuerzas en la misma forma que el tren de engranes transmite el movimiento de rotación. La relación entre las fuerzas y las distancias es:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{x_2}{x_1} \tag{4-43}$$

4-3-5 Juego y zona muerta

El juego y la zona muerta se encuentran comúnmente en trenes de engranes y mecanismos similares cuando el acoplamiento no es perfecto. En la mayoría de las situaciones, el juego puede llevar a inexactitud no deseada, oscilaciones e inestabilidad en sistemas de control. Además, tiene la tendencia a desgastar los elementos mecánicos. Sin hacer caso de los elementos mecánicos reales, un modelo físico del juego o zona muerta entre un miembro de entrada y uno de salida se muestra en la Fig. 4-16. El modelo se puede emplear para un sistema rotacional así como para uno traslacional. La cantidad de juego es $b/2$ a cada lado de la posición de referencia.

En general, las dinámicas de las conexiones mecánicas con juego dependen de la relación entre la inercia relativa y la fricción del miembro de salida. Si la inercia del miembro de salida es muy pequeña comparada con la del miembro de entrada, el movimiento está controlado, predominantemente por la fricción. Esto significa que el miembro de salida no se move-

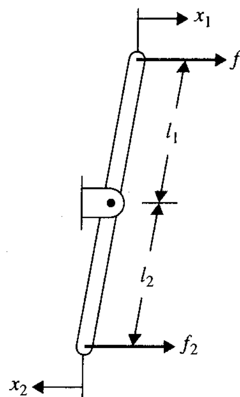


Figura 4-15 Sistema de palanca.

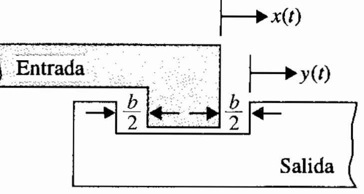


Figura 4-16 Modelo físico de juego entre dos elementos mecánicos.

rá mientras no haya contacto entre los dos miembros. Cuando la salida está manejada por la entrada, los dos miembros viajarán juntos hasta que el miembro de entrada invierta la dirección; entonces el miembro de salida permanecerá quieto hasta que el juego se mueva hacia el otro lado, en cuyo tiempo se supone que el miembro de salida toma instantáneamente la velocidad del miembro de entrada. La característica de transferencia entre los desplazamientos de entrada y de salida de un sistema con juego con inercia despreciable se presenta en la Fig. 4-17.

4-4 Ecuaciones de sistemas mecánicos

Las ecuaciones de un sistema mecánico lineal se escriben, primero construyendo un modelo del sistema que contenga los elementos lineales conectados y luego se aplica la ley del movimiento de Newton al **diagrama de cuerpo libre.** Para el movimiento de traslación se emplea la ecuación de movimiento (4-14), y para el movimiento de rotación se emplea la ecuación (4-22) . Los siguientes ejemplos ilustran cómo se escriben las ecuaciones de sistemas mecánicos.

Ejemplo 4-4

Considere el sistema de masa-resorte-fricción que se muestra en la Fig. 4-18(a). El movimiento lineal de interés es el de dirección horizontal. El diagrama de cuerpo libre del sistema se presenta en la Fig. 4-18(b). La ecuación de la fuerza del sistema es:

$$f(t) = M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + B\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) \tag{4-44}$$

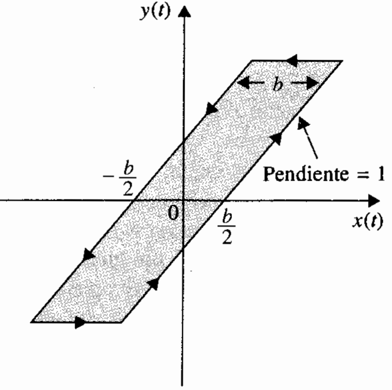


Figura 4-17 Característica entrada-salida del juego.

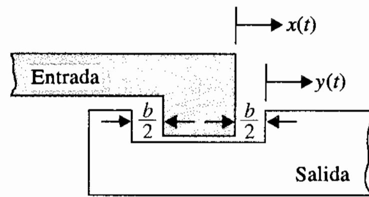


Figura 4-16 Modelo físico de juego entre dos elementos mecánicos.

rá mientras no haya contacto entre los dos miembros. Cuando la salida está manejada por la entrada, los dos miembros viajarán juntos hasta que el miembro de entrada invierta la dirección; entonces el miembro de salida permanecerá quieto hasta que el juego se mueva hacia el otro lado, en cuyo tiempo se supone que el miembro de salida toma instantáneamente la velocidad del miembro de entrada. La característica de transferencia entre los desplazamientos de entrada y de salida de un sistema con juego con inercia despreciable se presenta en la Fig. 4-17.

4-4 Ecuaciones de sistemas mecánicos

Las ecuaciones de un sistema mecánico lineal se escriben, primero construyendo un modelo del sistema que contenga los elementos lineales conectados y luego se aplica la ley del movimiento de Newton al **diagrama de cuerpo libre.** Para el movimiento de traslación se emplea la ecuación de movimiento (4-14), y para el movimiento de rotación se emplea la ecuación (4-22) . Los siguientes ejemplos ilustran cómo se escriben las ecuaciones de sistemas mecánicos.

Ejemplo 4-4

Considere el sistema de masa-resorte-fricción que se muestra en la Fig. 4-18(a). El movimiento lineal de interés es el de dirección horizontal. El diagrama de cuerpo libre del sistema se presenta en la Fig. 4-18(b). La ecuación de la fuerza del sistema es:

$$f(t) = M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + B\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) \tag{4-44}$$

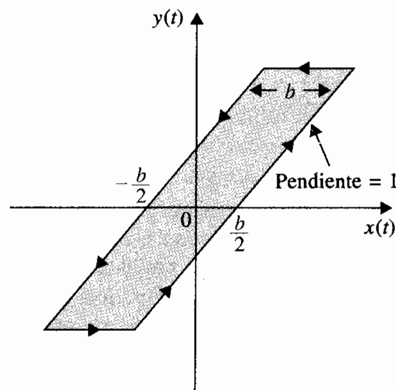


Figura 4-17 Característica entrada-salida del juego.

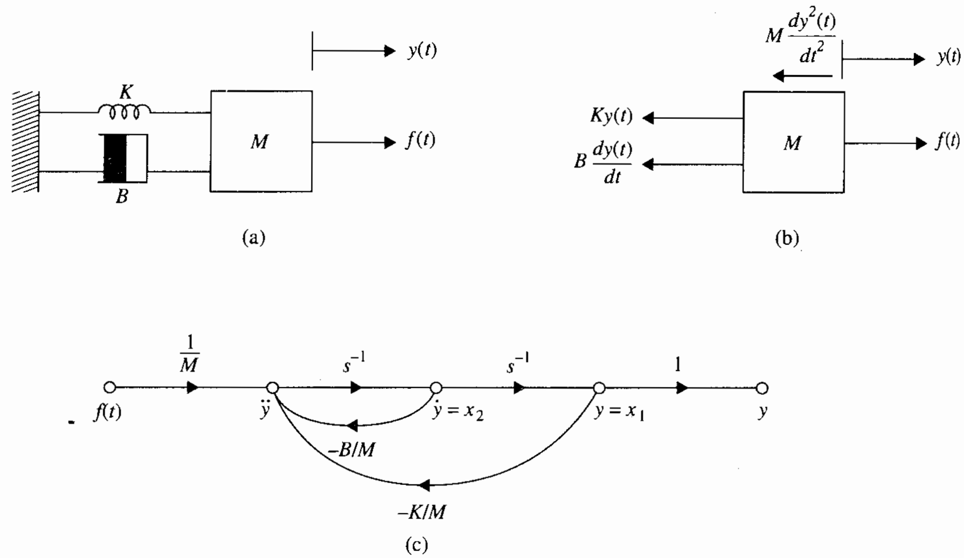


Figura 4-18 (a) Sistema masa-resorte-fricción. (b) Diagrama de cuerpo libre. (c) Diagrama de estado.

Reescribiendo la ecuación (4-44) al igualar el término de la derivada de mayor orden con el resto de los términos:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\frac{B}{M}\frac{dy(t)}{dt} - \frac{K}{M}y(t) + \frac{1}{M}f(t) \tag{4-45}$$

El diagrama de estado del sistema se construye como se muestra en la Fig. 4-18(c). Al definir las salidas de los integradores en el diagrama de estado como las variables de estado x_1 y x_2, las ecuaciones de estado son:

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t) \tag{4-46}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{K}{M}x_1(t) - \frac{B}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}f(t) \tag{4-47}$$

No es difícil ver que este sistema mecánico es análogo al circuito eléctrico *RLC* en serie. Con esta analogía, las ecuaciones de estado se pueden escribir utilizando un conjunto diferente de variables de estado. Considere que la masa M es análoga a la inductancia L, la constante del resorte K es análoga al inverso de la capacitancia $1/C$, y el coeficiente de fricción viscosa B es análogo a la resistencia R. Es lógico asignar a $v(t)$, la velocidad, y a $f_k(t)$, la fuerza que actúa sobre el resorte, como las variables de estado, ya que la primera es análoga a la corriente en L y la última es análoga al voltaje a través de C. Entonces al escribir la fuerza sobre M y la velocidad del resorte como funciones de las variables de

estado y de la fuerza de entrada $f(t)$, se tiene:

$$\text{Fuerza sobre la masa:} \quad M\frac{dv(t)}{dt} = -Bv(t) - f_k(t) + f(t) \tag{4-48}$$

$$\text{Velocidad del resorte:} \quad \frac{1}{K}\frac{df_k(t)}{dt} = v(t) \tag{4-49}$$

▲ Las variables de estado y las ecuaciones de estado de un sistema dinámico no son únicas.

Las ecuaciones de estado se obtienen al dividir ambos miembros de la ecuación (4-48) entre M y al multiplicar la ecuación (4-49) por K.

Este ejemplo simple ilustra que las ecuaciones de estado y las variables de estado de un sistema dinámico no son únicas. La función de transferencia entre $Y(s)$ y $F(s)$ se obtiene al tomar la transformada de Laplace de ambos miembros de la ecuación (4-44) con condiciones iniciales cero:

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \tag{4-50}$$

Se obtiene el mismo resultado al aplicar la fórmula de ganancia a la Fig. 4-18(c). ▲

Ejemplo 4-5

Como otro ejemplo de cómo escribir las ecuaciones dinámicas de un sistema mecánico con movimiento de traslación, se considera el sistema que se muestra en la Fig. 4-19(a). Ya que el resorte se deforma cuando está sujeto a una fuerza $f(t)$, se deben asignar dos desplazamientos, y_1 y y_2, a los extremos del resorte. Los diagramas de cuerpo libre del sistema se presentan en la Fig. 4-19(b). Las ecuaciones de fuerza son:

$$f(t) = K[y_1(\mathrm{t}) - y_2(t)] \tag{4-51}$$

$$K[y_1(t) - y_2(t)] = M\frac{d^2y_2(t)}{dt^2} + B\frac{dy_2(t)}{dt} \tag{4-52}$$

Estas ecuaciones se arreglan de nuevo como:

$$y_1(\mathrm{t}) = y_2(t) + \frac{1}{K}f(t) \tag{4-53}$$

$$\frac{d^2y_2(t)}{dt^2} = -\frac{B}{M}\frac{dy_2(t)}{dt} + \frac{K}{M}[y_1(t) - y_2(t)] \tag{4-54}$$

Al utilizar las dos últimas ecuaciones, el diagrama de estado del sistema se dibuja en la Fig. 4-19(c). Las variables de estado se definen como $x_1(t) = y_2(t)$ y $x_2(t) = dy_2(t)/dt$. Las ecuaciones de estado se escriben directamente del diagrama de estado:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \tag{4-55}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{B}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}f(t) \tag{4-56}$$

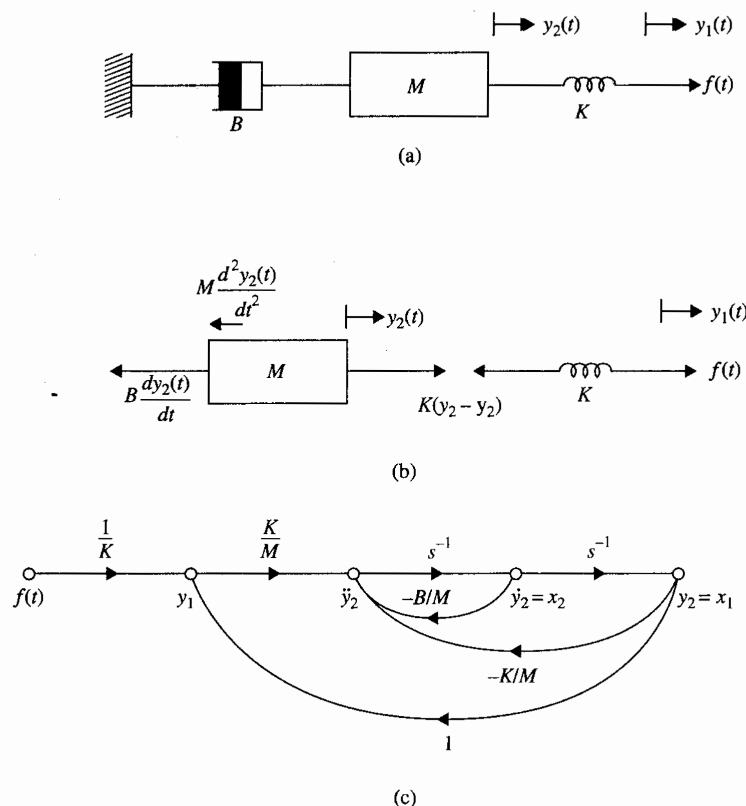


Figura 4-19 Sistema mecánico para el ejemplo 4-5. (a) Sistema masa-resorte-fricción. (b) Diagrama de cuerpo libre. (c) Diagrama de estado.

Como una alternativa, se puede asignar la velocidad $v(t)$ de la masa M como una de las variables de estado y la fuerza $f_k(t)$ en el resorte como la otra variable de estado. Se tiene:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{B}{M}v(t) + \frac{1}{M}f_k(t) \tag{4-57}$$

$$f_k(t) = f(t) \tag{4-58}$$

Uno puede preguntarse por qué existe una sola ecuación de estado en la ecuación (4-48), si existen dos variables de estado $v(t)$ y $f_k(t)$. Las dos ecuaciones de estado de las ecuaciones (4-55) y (4-56) claramente muestran que el sistema es de segundo orden. La situación se explica mejor al hacer referencia al circuito eléctrico análogo del sistema que se presenta en la Fig. 4-20. Aunque el circuito tiene dos elementos que almacenan energía en L y C, y por tanto debería haber dos variables de estado, el voltaje a través del capacitor, $e_c(t)$, en este caso es redundante, ya que es igual al voltaje aplicado $e(t)$. Las ecuaciones (4-57) y (4-56) sólo pueden proporcionar las soluciones para la velocidad de M, $v(t)$, lo

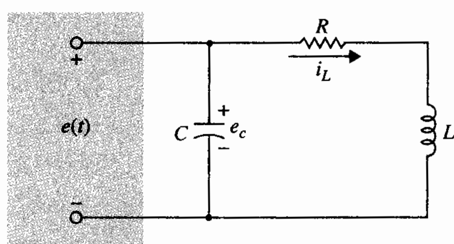


Figura 4-20 Circuito eléctrico análogo para el sistema mecánico de la Fig. 4-19.

cual es lo mismo que $dy_2(t)/dt$, una vez que se ha especificado la fuerza $f(t)$. Entonces $y_2(t)$ se determina al integrar $v(t)$ con respecto a t. El desplazamiento $y_1(t)$ se encuentra al emplear la ecuación (4-51). Por otro lado, las ecuaciones (4-55) y (4-56) dan las soluciones para $y_2(t)$ y $dy_2(t)/dt$ directamente, y $y_1(t)$ se obtiene de la ecuación (4-51).

Las funciones de transferencia del sistema se obtienen al aplicar la fórmula de ganancia al diagrama de estado de la Fig. 4-19(c).

$$\frac{Y_2(s)}{F(s)} = \frac{1}{s(Ms + B)} \tag{4-59}$$

$$\frac{Y_1(s)}{F(s)} = \frac{Ms^2 + Bs + K}{Ks(Ms + B)} \tag{4-60}$$

▲

Ejemplo 4-6

En este ejemplo se escribirán las ecuaciones para el sistema mecánico de la Fig. 4-21(a) . Entonces se dibujará el diagrama de estado y se obtendrán las funciones de transferencia para el sistema. Los diagramas de cuerpo libre para las dos masas se presentan en la Fig. 4-21(b), con las direcciones de referencia de los desplazamientos $y_1(t)$ y $y_2(t)$ como se indican. Las ecuaciones de fuerza de Newton para el sistema se escriben directamente de los diagramas de cuerpo libre:

$$f(t) + M_1 g = M_1 \frac{d^2y_1(t)}{dt^2} + B_1 \left[\frac{dy_1(t)}{dt} - \frac{dy_2(t)}{dt} \right] + K_1[y_1(t) - y_2(t)] \tag{4-61}$$

$$M_2 g = -B_1 \left[\frac{dy_1(t)}{dt} - \frac{dy_2(t)}{dt} \right] - K_1[y_1(t) - y_2(t)] + M_2 \frac{d^2y_2(t)}{dt^2} + B_2 \frac{dy_2(t)}{dt} + K_2 y_2(t) \tag{4-62}$$

Ahora se descomponen estas dos ecuaciones diferenciales simultáneas de segundo orden en cuatro ecuaciones al definir las siguientes variables de estado:

$$x_1(t) = y_1(t) \tag{4-63}$$

$$x_2(t) = \frac{dy_1(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt} \tag{4-64}$$

$$x_3(t) = y_2(t) \tag{4-65}$$

$$x_4(t) = \frac{dy_2(t)}{dt} = \frac{dx_3(t)}{dt} \tag{4-66}$$

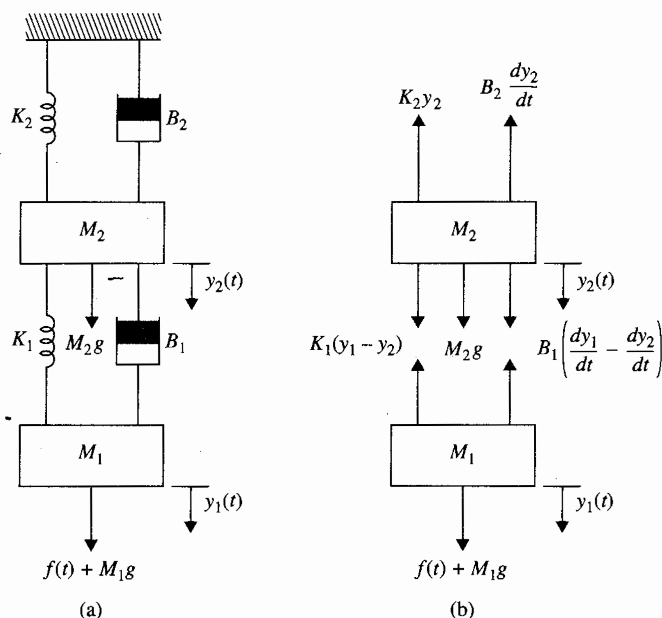


Figura 4-21 Sistema mecánico para el sistema del ejemplo 4-6.

Las ecuaciones (4-64) y (4-66) forman dos ecuaciones de estado; las otras dos se obtienen al sustituir las ecuaciones (4-63) a (4-66) en las ecuaciones (4-61) y (4-62). Rearreglando, se tienen las siguientes ecuaciones de estado:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \tag{4-67}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{K_1}{M_1}[x_1(t) - x_3(t)] - \frac{B_1}{M_1}[x_2(t) - x_4(t)] + \frac{1}{M_1}f(t) + g \tag{4-68}$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = x_4(t) \tag{4-69}$$

$$\frac{dx_4(t)}{dt} = \frac{K_1}{M_2}x_1(t) + \frac{B_1}{M_2}x_2(t) - \frac{K_1 + K_2}{M_2}x_3(t) - \frac{1}{M_2}(B_1 + B_2)x_4(t) + g \tag{4-70}$$

Si nos interesan los desplazamientos $y_1(t)$ y $y_2(t)$, las ecuaciones de salida son:

$$y_1(t) = x_1(t) \tag{4-71}$$

$$y_2(t) = x_3(t) \tag{4-72}$$

El diagrama de estado del sistema, de acuerdo con las ecuaciones escritas anteriormente, se presenta en la Fig. 4-22. En forma alterna, el diagrama de estado se puede dibujar primero rearreglando las ecuaciones (4-61) y (4-62). Las transformadas de las salidas $Y_1(s)$ y $Y_2(s)$ se escriben en términos de las entradas

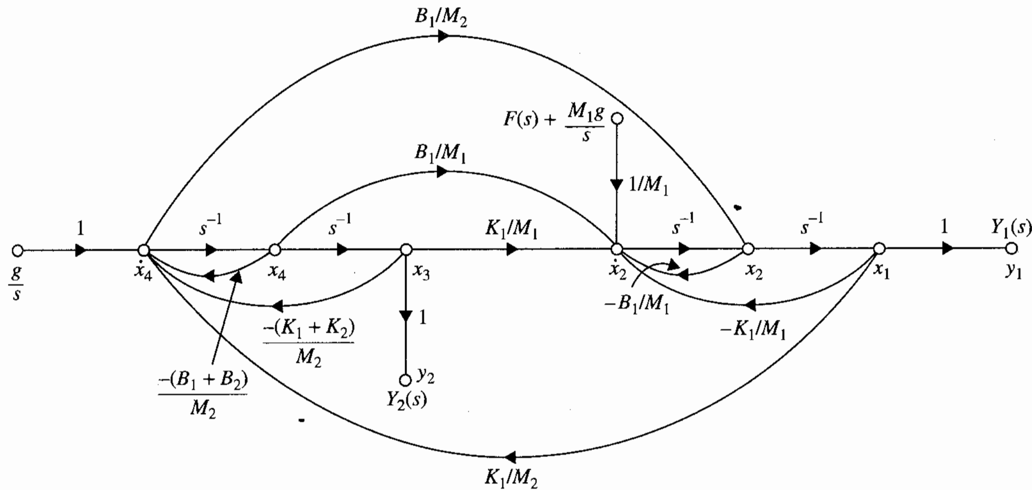


Figura 4-22 Diagrama de estado para el sistema mecánico de la Fig. 4-21.

$F(s)$ y g al aplicar la fórmula de ganancia al diagrama de estado:

$$Y_1(s) = \frac{M_2s^2 + (B_1 + B_2)s + (K_1 + K_2)}{\Delta}F(s) + \frac{M_1M_2s^2 + (M_1B_1 + M_1B_2 + M_2B_1)s + M_1K_1 + M_1K_2 + M_2K_1}{\Delta}\frac{g}{s} \tag{4-73}$$

$$Y_2(s) = \frac{B_1s + K_1}{\Delta}F(s) + \frac{M_1M_2s^2 + B_1(M_1 + M_2)s + K_1(M_1 + M_2)}{\Delta}\frac{g}{s} \tag{4-74}$$

en donde:

$$\Delta = M_1M_2s^4 + [M_1(B_1 + B_2) + B_1M_2]s^3 + [M_1(K_1 + K_2) + K_1M_2 + B_1B_2]s^2 + (K_1B_2 + B_1K_2)s + K_1K_2 \tag{4-75}$$

Las funciones de transferencia $Y_1(s)/F(s)$ y $Y_2(s)/F(s)$ se pueden obtener de las ecuaciones (4-73) y (4-74), respectivamente, al hacer que la fuerza gravitacional g sea cero. Esto es equivalente a suponer que el sistema está inicialmente en un estado de equilibrio en el que la fuerza gravitacional está balanceada mediante la precarga de los resortes.

Las ecuaciones de estado también se pueden escribir directamente del sistema mecánico al asignar las variables de estado $v_1(t) = dy_1(t)/dt$ y $v_2(t) = dy_2(t)/dt$, y las fuerzas sobre los dos resortes como $f_{k1}(t)$ y $f_{k2}(t)$. Entonces si se escriben las fuerzas que actúan sobe las masas y las velocidades de los resortes como funciones de las cuatro variables de estado y de las fuerzas externas, las ecuaciones de estado son:

Fuerza sobre M_1: $$M_1\frac{dv_1(t)}{dt} = -B_1v_1(t) + B_2v_2(t) - f_{k1}(t) + f(t) + M_1g \tag{4-76}$$

Fuerza sobre M_2: $M_2 \frac{dv_2(t)}{dt} = B_1 v_1(t) - (B_1 + B_2)v_2(t) + f_{k1}(t) - f_{k2}(t) + M_2 g$ (4-77)

Velocidad de K_1: $\frac{df_{k1}(t)}{dt} = K_1[v_1(t) - v_2(t)]$ (4-78)

Velocidad de K_2: $\frac{df_{k2}(t)}{dt} = K_2 v_2(t)$ (4-79)

▲

Ejemplo 4-7

El sistema rotacional mostrado en la figura 4-23(a) consiste en un disco montado en un eje que está fijo en un extremo. El momento de inercia del disco alrededor del eje de rotación es J. El canto del disco está próximo a una superficie, y el coeficiente de fricción viscosa entre las dos superficies es B. La inercia del eje es despreciable, pero la constante de resorte torsional es K.

Se supone que se aplica un par al disco, como se muestra; entonces la ecuación del par o momento alrededor del eje se escribe a partir del diagrama de cuerpo libre de la Fig. 4-23(b):

$$T(t) = J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B\frac{d\theta(t)}{dt} + K\theta(t) \tag{4-80}$$

Observe que este sistema es análogo al sistema traslacional de la Fig 4-18. Las ecuaciones de estado se pueden escribir al definir las variables de estado como $x_1(t) = \theta(t)$ y $x_2(t) = dx_1(t)$. ▲

Ejemplo 4-8

La Fig. 4-24(a) muestra el diagrama de un motor acoplado a una carga inercial a través de un eje con una constante de resorte K. Un acoplamiento no rígido entre dos componentes mecánicos en un sistema de control, a menudo, puede causar resonancias torsionales que se pueden transmitir a todas las partes del sistema. Las variables y parámetros del sistema se definen como sigue:

- ▲ $T_m(t)$ = par del motor
- ▲ B_m = coeficiente de fricción viscosa del motor
- ▲ K = constante de resorte del eje
- ▲ $\theta_L(t)$ = desplazamiento de la carga
- ▲ $\omega_L(t)$ = velocidad de la carga
- ▲ J_m = inercia del motor
- ▲ J_L = carga inercial
- ▲ $\theta_m(t)$ = desplazamiento del motor
- ▲ $\omega_m(t)$ = velocidad del motor

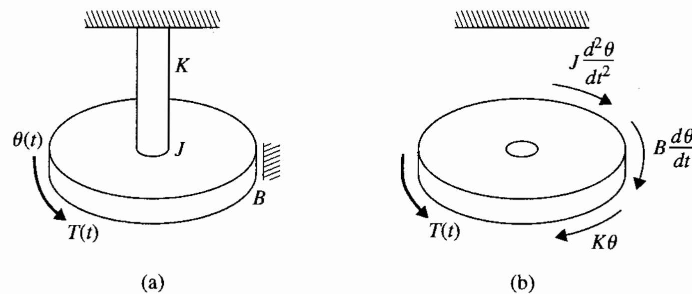


Figura 4-23 Sistema de rotación para el ejemplo 4-7.

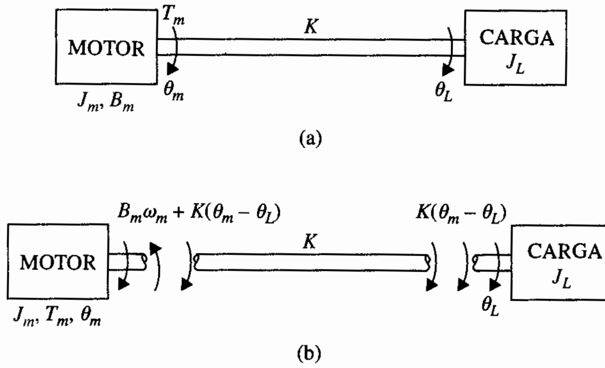


Figura 4-24 (a) Sistema motor-carga. (b) Diagrama de cuerpo libre.

El diagrama de cuerpo libre del sistema se presenta en la Fig. 4-24(b). Las ecuaciones del par del sistema son:

$$\frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = -\frac{B_m}{J_m}\frac{d\theta_m(t)}{dt} - \frac{K}{J_m}[\theta_m(t) - \theta_L(t)] + \frac{1}{J_m}T_m(t) \tag{4-81}$$

$$K[\theta_m(t) - \theta_L(t)] = J_L\frac{d^2\theta_L(t)}{dt^2} \tag{4-82}$$

En este caso el sistema contiene tres elementos que almacenan energía: J_m, J_L, y K. Por tanto, debería haber tres variables de estado. Se debe tener cuidado al construir el diagrama de estado y al asignar las variables de estado de forma que se incorpore el número mínimo de estas últimas. Las ecuaciones (4-81) y (4-82) se rearreglan como:

$$\frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = -\frac{B_m}{J_m}\frac{d\theta_m(t)}{dt} - \frac{K}{J_m}[\theta_m(t) - \theta_L(t)] + \frac{1}{J_m}T_m(t) \tag{4-83}$$

$$\frac{d^2\theta_L(t)}{dt^2} = \frac{K}{J_L}[\theta_m(t) - \theta_L(t)] \tag{4-84}$$

El diagrama de estado con tres integradores se muestra en la Fig. 4-25. La clave dada por las ecuaciones (4-83) y (4-85) es que $\theta_m(t)$ y $\theta_L(t)$ aparezcan sólo como su diferencia, $\theta_m(t) - \theta_L(t)$, en estas ecuaciones. Del diagrama de estado de la Fig. 4-25, las variables de estado se definen como $x_1(t) = \theta_m(t) - \theta_L(t)$, $x_2(t) = d\theta_L(t)/dt$, y $x_3(t) = d\theta_m(t)/dt$. Las ecuaciones de estado son:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_3(t) - x_2(t) \tag{4-85}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{K}{J_L}x_1(t) \tag{4-86}$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = -\frac{K}{J_m}x_1(t) - \frac{B_m}{J_m}x_3(t) + \frac{1}{J_m}T_m(t) \tag{4-87}$$

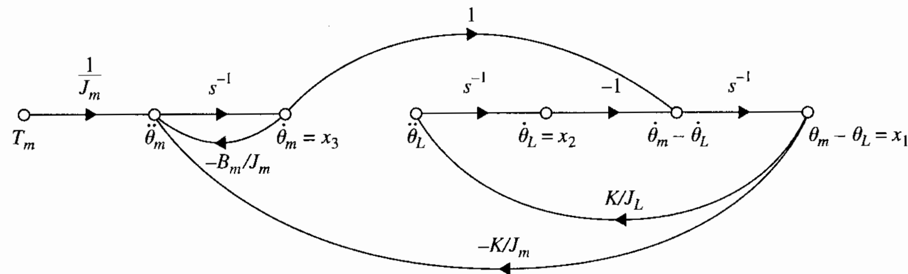


Figura 4-25 Diagrama de estado del sistema de la Fig. 4-24.

Las funciones de transferencia entre $\Theta_m(s)$ y $T_m(s)$ y $\Theta_L(s)$ y $T_m(s)$ se escriben al aplicar la fórmula de ganancia al diagrama de estado de la Fig. 4-25:

$$\frac{\Theta_m(s)}{T_m(s)} = \frac{X_3(s)}{sT_m(s)} = \frac{J_L s^2 + K}{s[J_m J_L s^3 + B_m J_L s^2 + K(J_m + J_L)s + B_m K]} \tag{4-88}$$

$$\frac{\Theta_L(s)}{T_m(s)} = \frac{X_2(s)}{sT_m(s)} = \frac{K}{s[J_m J_L s^3 + B_m J_L s^2 + K(J_m + J_L)s + B_m K]} \tag{4-89}$$

▲

4-5 Sensores y codificadores en sistemas de control

Los sensores y codificadores son componentes importantes empleados para supervisar el desempeño y para la realimentación en sistemas de control. En esta sección se describe el principio de operación de algunos sensores y codificadores que se emplean comúnmente en sistemas de control.

4-5-1 Potenciómetro

Un potenciómetro es un transductor electromecánico que convierte energía mecánica en energía eléctrica. La entrada del dispositivo es una forma de desplazamiento mecánico, ya sea lineal o de rotación. Cuando se aplica un voltaje a través de las terminales fijas del potenciómetro, el voltaje de salida, que se mide entre la terminal variable y tierra, es proporcional al desplazamiento de entrada, ya sea linealmente o de acuerdo con alguna relación no lineal.

Los potenciómetros rotatorios están disponibles comercialmente en presentaciones de una o varias revoluciones múltiples, con movimiento de rotación limitado o no limitado. Comúnmente, los potenciómetros están hechos de alambre o de material resistente plástico conductivo. La Fig. 4-26 muestra un potenciómetro rotatorio, y la Fig. 4-27 un potenciómetro lineal que contiene un amplificador operacional interconstruido. Para control de precisión, el potenciómetro de plástico conductivo es preferible, ya que tiene una resolución infinita, larga vida rotacional, una salida suave, y bajo ruido estático.

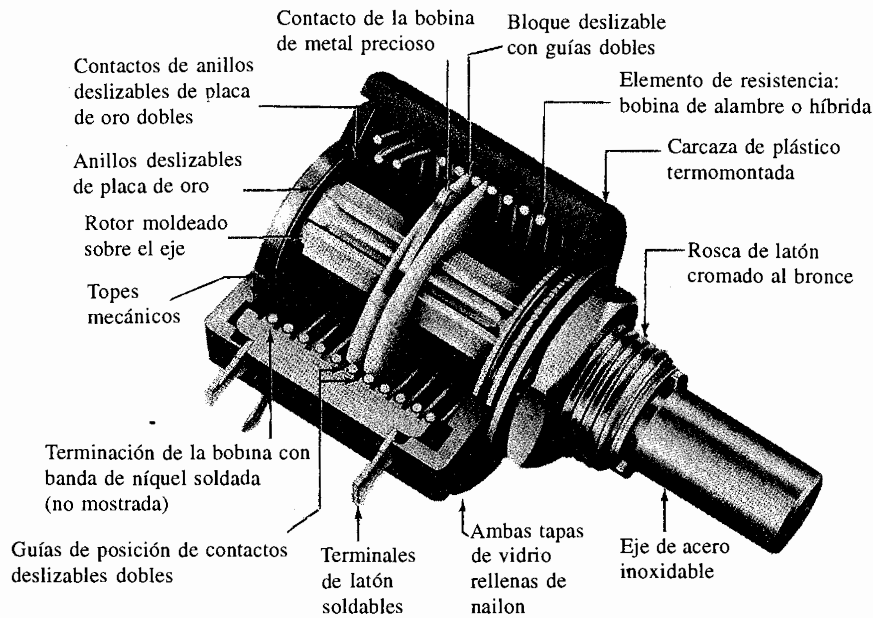


Figura 4-26 Potenciómetro rotatorio de 10 vueltas. (Cortesía de Helipot Division de Beckman Instruments, Inc.)

La Fig. 4-28 muestra la representación del circuito equivalente de un potenciómetro, lineal o rotatorio. Ya que el voltaje entre la terminal variable y la referencia es proporcional al desplazamiento del eje del potenciómetro, cuando se aplica un voltaje entre las terminales fijas, el dispositivo se puede usar para indicar la posición absoluta de un sistema o la posición relativa de dos salidas mecánicas. La Fig. 4-29(a) muestra el arreglo cuando la carcaza del

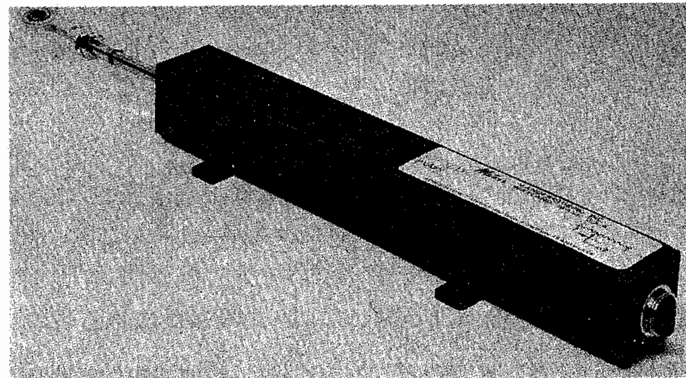


Figura 4-27 Potenciómetro de movimiento lineal con amplificador operacional interconstruido. (Cortesía de Waters Manufacturing, Inc.)

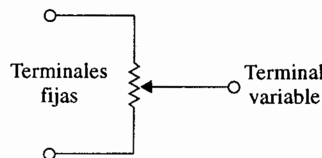


Figura 4-28 Representación del circuito de un potenciómetro.

potenciómetro está conectada a la referencia, el voltaje de salida $e(t)$ será proporcional a la posición del eje $\theta_c(t)$ en el caso de un movimiento rotatorio. Entonces:

$$e(t) = K_s\theta_c(t) \tag{4-90}$$

en donde K_s es la constante de proporcionalidad. Para un potenciómetro de N vueltas, el desplazamiento total del brazo variable es $2\pi N$ radianes. La constante de proporcionalidad K_s está dada por:

$$K_s = \frac{E}{2\pi N} \quad \text{V/rad} \tag{4-91}$$

en donde E es la magnitud del voltaje de referencia aplicado a las terminales fijas. Un arreglo más flexible se obtiene al utilizar dos potenciómetros conectados en paralelo como se muestra en la Fig. 4-29(b). Este arreglo permite la comparación de dos posiciones de ejes localizados en forma remota. El voltaje de salida se toma entre las terminales variables de los dos potenciómetros y está dado por:

$$e(t) = K_s[\theta_1(t) - \theta_2(t)] \tag{4-92}$$

La Fig. 4-30 ilustra la representación en diagrama de bloques de los circuitos de la Fig. 4-29.

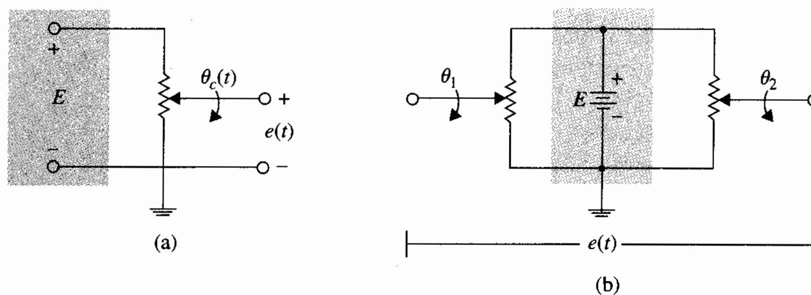


Figura 4-29 (a) Potenciómetro empleado como indicador de posición. (b) Dos potenciómetros empleados para detectar las posiciones de los ejes.

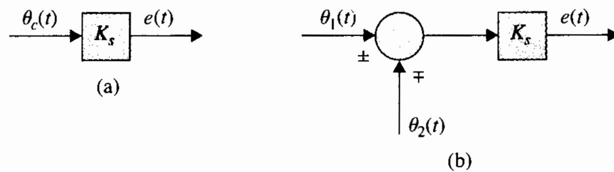


Figura 4-30 Representación en diagrama de bloques de los arreglos de potenciómetros de la Fig. 4-29.

▲ En la terminología de sistemas de control, una señal de cd se refiere a una señal no modulada.

En sistemas de control de motores de cd, los potenciómetros se usan a menudo para realimentar la posición. La Fig. 4-31(a) muestra el esquema de un sistema de control de posición de un motor de cd . Los potenciómetros se usan en la trayectoria de realimentación para comparar la posición real de la carga con la posición de referencia deseada. Si existe una discrepancia entre la posición de la carga y la entrada de referencia, se genera una señal de error mediante los potenciómetros que moverán al motor en tal forma que este error se minimice rápidamente. Como se presenta en la Fig. 4-31(a), la señal de error es amplificada por un amplificador de cd cuyas salidas manejan la armadura de un motor de cd de imán permanente. Las formas de onda típicas de las señales en el sistema cuando la entrada $\theta_r(t)$ es una función escalón se presentan en la Fig. 4-31(b). Observe que las señales eléctricas no están moduladas. *En la terminología de sistemas de control, normalmente, una señal de cd se refiere como una señal no modulada. Por otro lado, una señal de ca se refiere a señales que son moduladas mediante un proceso de modulación.* Estas definiciones son diferentes a las empleadas en ingeniería eléctrica, en donde las señales de cd son unidireccionales y las de ca indican señales alternantes.

La Fig. 4-32(a) ilustra un sistema de control que tiene, esencialmente, el mismo propósito que el del sistema de la Fig. 4-31(a), excepto que prevalecen las señales de ca. En este caso, el voltaje aplicado al detector de error es senoidal. La frecuencia de esta señal es normalmente mucho mayor que la de la señal que se transmite a través del sistema. Los sistemas de control con señales de ca se encuentran en naves espaciales que son más susceptibles a ruido.

Las señales típicas de sistemas de control de ca se muestran en la Fig. 4-32(b). La señal $v(t)$ se denomina portadora cuya frecuencia es ω_c, o bien:

$$v(\mathrm{t}) = E \operatorname{sen} \omega_c t \tag{4-93}$$

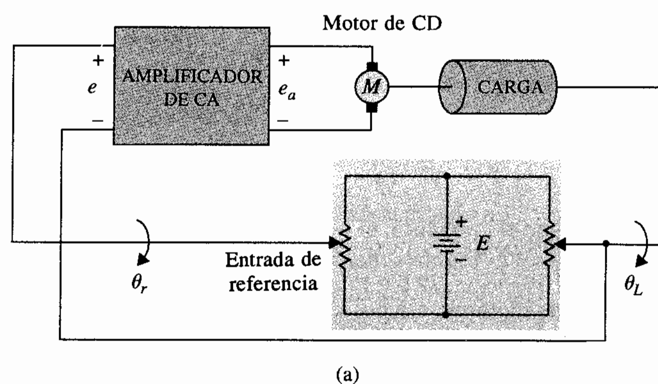
En forma analítica, la salida de la señal de error está dada por:

$$e(\mathrm{t}) = K_s \theta_e(t) v(t) \tag{4-94}$$

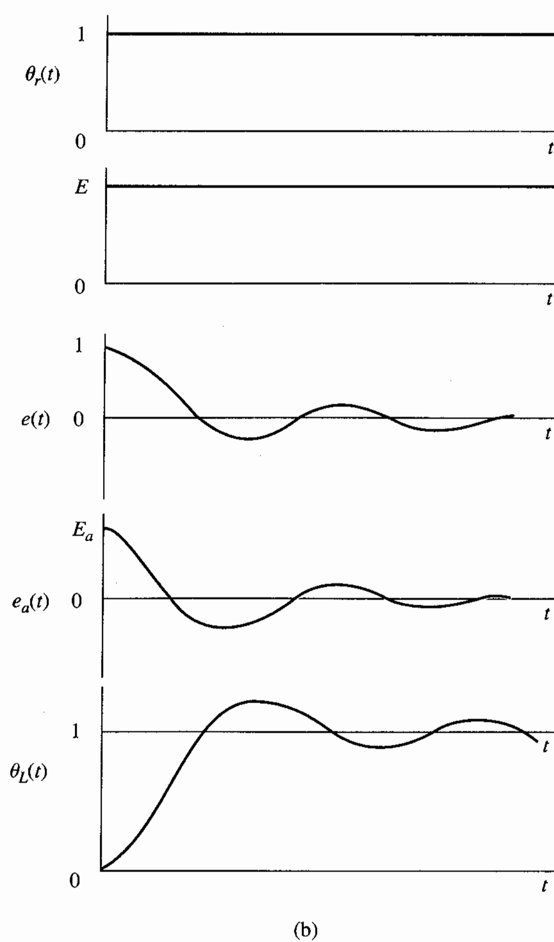
en donde $\theta_e(t)$ es la diferencia entre el desplazamiento de entrada y el desplazamiento de la carga, es decir:

$$\theta_e(t) = \theta_r(t) - \theta_r(t) \tag{4-95}$$

Para $\theta_e(t)$ que se muestra en la Fig. 4-32(b), $e(t)$ se vuelve una señal **modulada con portadora suprimida.** Una inversión en fase de $e(t)$ ocurre cuando la señal cruza el eje de magnitud cero. Esta inversión de fase provoca que el motor de ca invierta su dirección de acuerdo con el sentido de corrección deseado de la señal de error $\theta_e(t)$. El nombre *modulación con porta-*

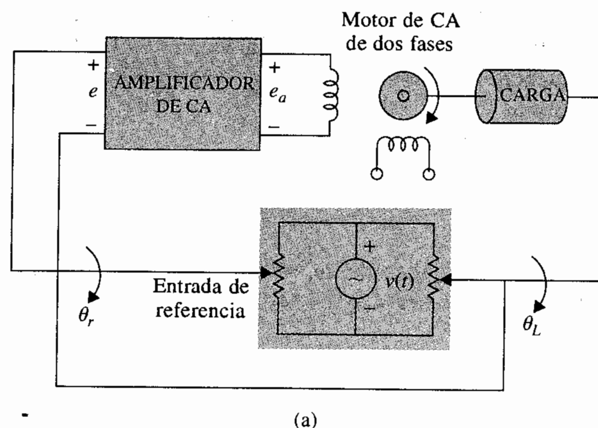


(a)



(b)

Figura 4-31 (a) Sistema de control de posición de un motor de cd con potenciómetros como detectores de error. (b) Formas de onda típicas de las señales en el sistema de control de la parte (a).



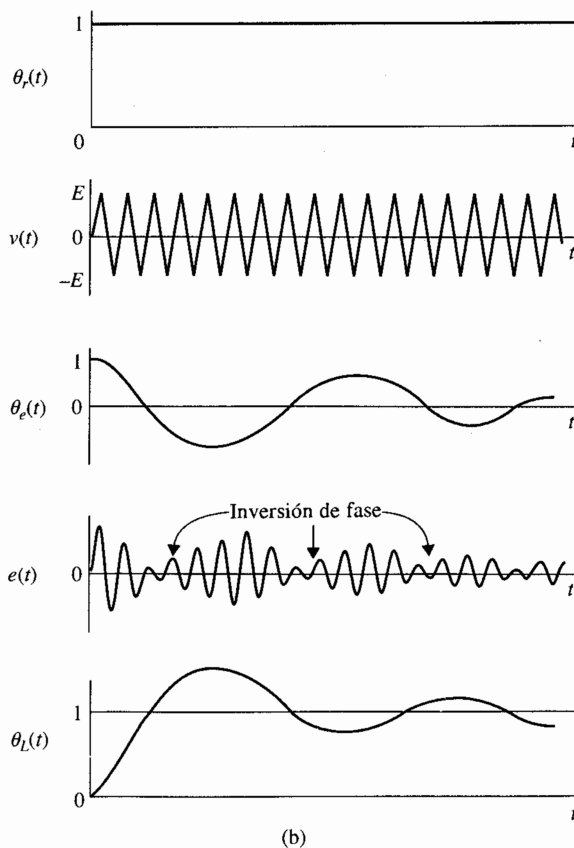


Figura 4-32 (a) Sistema de control de ca con potenciómetros como detectores de error. (b) Formas de onda típicas de las señales en el sistema de control de la parte (a).

dora suprimida proviene del hecho de que cuando una señal $\theta_e(t)$ es modulada por una señal portadora $v(t)$ de acuerdo con la ecuación (4-94), la señal resultante $e(t)$ ya no contiene la frecuencia portadora original ω_c. Para ilustrar esto, suponga que $\theta_e(t)$ es también senoidal dada por:

$$\theta_e(t) = \operatorname{sen} \omega_s t \tag{4-96}$$

en donde, normalmente, $\omega_s \ll \omega_c$. Mediante el uso de relaciones trigonométricas, al sustituir las ecuaciones (4-93) y (4-96) en la ecuación (4-94), se obtiene:

$$e(t) = \tfrac{1}{2} K_s E[\cos(\omega_c - \omega_s)t - \cos(\omega_c + \omega_s)t] \tag{4-97}$$

Por tanto, $e(t)$ no contiene la frecuencia portadora ω_c o la frecuencia de la señal ω_s, sino solamente las dos bandas laterales $\omega_c + \omega_s$ y $\omega_c - \omega_s$.

Cuando se transmite la señal modulada a través del sistema, el motor actúa como un demodulador, ya que el desplazamiento de la carga será de la misma forma que la señal de cd antes de la modulación. Esto se ve claramente de las formas de onda de la Fig. 4-32(b). Se debe señalar que un sistema de control no necesita que todos sus componentes sean de ca o cd. Es muy común acoplar un componente de cd a un componente de ca a través de un modulador o un dispositivo de ca a un dispositivo de cd mediante un demodulador. Por ejemplo, el amplificador de cd del sistema de la Fig. 4-31(a) se puede remplazar por un amplificador de ca que está precedido por un modulador y seguido por un demodulador.

4-5-2 Tacómetros

Los tacómetros son dispositivos electromecánicos que convierten energía mecánica en energía eléctrica. El dispositivo trabaja esencialmente como un generador de voltaje, con la salida de voltaje proporcional a la magnitud de la velocidad angular del eje de entrada. En sistemas de control, la mayoría de los tacómetros empleados son de la variedad de cd (*i.e.*, el voltaje de

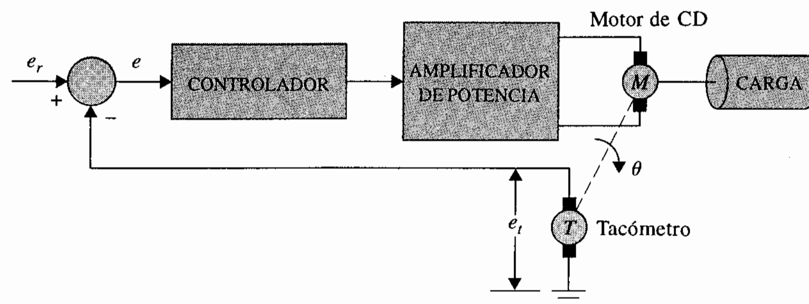


Figura 4-33 Sistema de control de velocidad con realimentación por tacómetro.

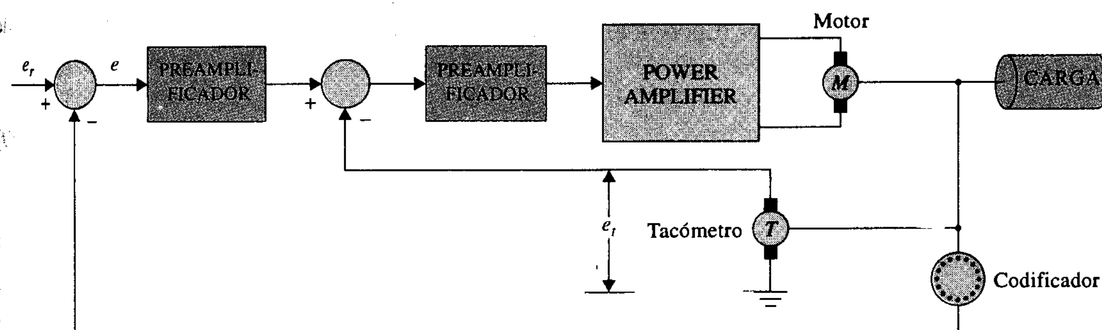


Figura 4-34 Sistema de control de posición con realimentación por tacómetro.

salida es una señal de cd). Los tacómetros de cd se utilizan en diversas formas en sistemas de control; pueden usarse como indicadores de velocidad para proporcionar una lectura de la velocidad del eje o proveer realimentación de velocidad o control de velocidad o estabilización. La Fig. 4-33 es un diagrama de bloques de un sistema de control de velocidad típico en donde la salida del tacómetro se compara con la referencia de voltaje, que representa la velocidad deseada. La diferencia entre las dos señales, o error, se amplifica y emplea para manejar el motor, para que la velocidad alcance el valor deseado. En este tipo de aplicación, la exactitud del tacómetro es muy crítica, ya que la exactitud del control de velocidad depende de ella.

Nota: A menudo, los tacómetros se emplean en sistemas de control para mejorar la estabilidad.

En sistemas de control de posición, a menudo se utiliza la realimentación de velocidad para mejorar la estabilidad o el amortiguamiento del sistema en lazo cerrado. La Fig. 4-34 muestra el diagrama de bloques de dicha aplicación. En este caso, la realimentación por tacómetro forma un lazo interno para mejorar las características de amortiguamiento del sistema, y la exactitud del tacómetro no es tan crítica.

El tercero y uso más tradicional de los tacómetros de cd es proveer la lectura de la velocidad de un eje giratorio. Los tacómetros empleados en esta forma se conectan por lo general directamente a un voltímetro calibrado en revoluciones por minuto (rpm).

Modelado matemático de tacómetros

La dinámica del tacómetro se puede representar por la ecuación:

$$e_t(t) = K_t \frac{d\theta(t)}{dt} = K_t \omega(t) \qquad (4\text{-}98)$$

en donde $e_t(t)$ es el voltaje de salida, $\theta(t)$ es el desplazamiento del rotor en radianes, $\omega(t)$ es la velocidad del rotor en rad/s, y K_t es la **constante del tacómetro** en V/rad/s. El valor de K_t está dado como un parámetro de catálogo en **volts por 1000 rpm** (V/krpm).

La función de transferencia de un tacómetro se obtiene al tomar la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (4-98). El resultado es:

$$\frac{E_t(s)}{\Theta(s)} = K_t s \tag{4-99}$$

en donde $E_t(S)$ y $\Theta(S)$ son las transformadas de Laplace de $e_t(t)$ y $\theta(t)$, respectivamente.

4-5-3 Codificador incremental

Los codificadores incrementales se encuentran con frecuencia en sistemas de control modernos para convertir desplazamiento lineal o rotatorio en un código digital o señales de pulsos. Los codificadores que producen una señal digital de salida se conocen como **codificadores absolutos.** En términos más simples, los codificadores absolutos producen como salida un código digital distinto que indica cada incremento menos significativo de resolución. Por otro lado, **los codificadores incrementales** proveen un pulso por cada incremento de resolución pero no hace distinciones entre dichos incrementos. En la práctica, la selección de un tipo de codificador depende de objetivos económicos y de control. Para la mayoría, la necesidad de codificadores absolutos tiene mucho que ver con la idea de perder datos durante una falla de potencia o las aplicaciones que involucran periodos de movimiento mecánico sin leerlos debido a problemas de potencia. Sin embargo, la simplicidad de construcción, el bajo costo, la facilidad de aplicación y la versatilidad de los codificadores incrementales los hacen muy populares en sistemas de control.

Los codificadores incrementales están disponibles en las formas lineales y rotatorias. Las Figs. 4-35 y 4-36 muestran codificadores incrementales típicos de forma rotativa y lineal, respectivamente. Un codificador incremental típico rotativo tiene cuatro partes básicas: una fuente de luz, un disco giratorio, una máscara estacionaria y un detector, como se presenta en la Fig. 4-37. El disco tiene sectores opacos y transparentes distribuidos en forma alterna. Un par de estos sectores representa un periodo incremental. La máscara se usa para dejar pasar o bloquear la luz entre la fuente de luz y el fotodetector localizado detrás de la mascara. Para los codificadores con baja resolución, la máscara no es necesaria. Para codificadores con resolución fina (hasta miles de incrementos por revolución), a menudo se utiliza una máscara múltiple para maximizar la recepción de la luz.

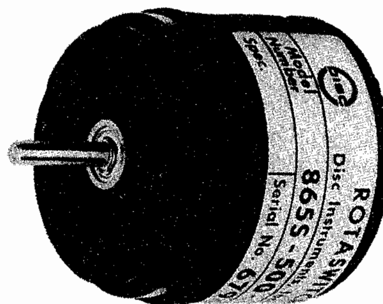


Figura 4-35 Codificador incremental rotatorio. (Cortesía de DISC Instruments, Inc.)

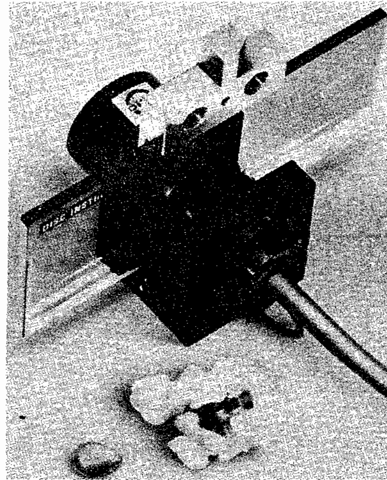


Figura 4-36 Codificador incremental lineal. (Cortesía de DISC Instruments, Inc.)

Las formas de onda de las salidas de los detectores son generalmente de tipo triangular o senoidal, en función de la resolución requerida. Las señales de onda cuadrada compatibles con lógica digital se obtienen al utilizar un amplificador lineal seguido por un comparador. La Fig. 4-38(a) presenta una onda rectangular típica de un codificador incremental de un solo canal. En este caso los pulsos son producidos en ambas direcciones de rotación del eje. Se necesita un codificador de dos canales con dos juegos de pulsos de salida para detectar dirección y otras funciones de control. Cuando la fase de los dos trenes de pulsos de salida es de 90° eléctricos, se dice que las dos señales están en cuadratura, como se muestra en la Fig. 4-38(b); las señales definen únicamente transiciones de 0 a 1 o de 1 a 0 con respecto a la dirección de la rotación del disco codificador, de esta forma se puede construir el circuito lógico de detección de la dirección para decodificar dichas señales. La Fig. 4-39 muestra la salida de un solo canal y las salidas en cuadratura con formas de onda senoidales. Las señales senoidales del codificador incremental se pueden utilizar para el control fino de posición en sistemas de control realimentado. Los ejemplos siguientes ilustran algunas aplicaciones de los codificadores incrementales en sistemas de control.

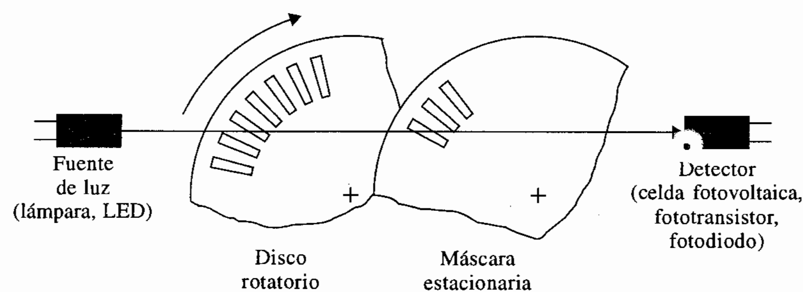


Figura 4-37 Incrementadores optomecánicos típicos.

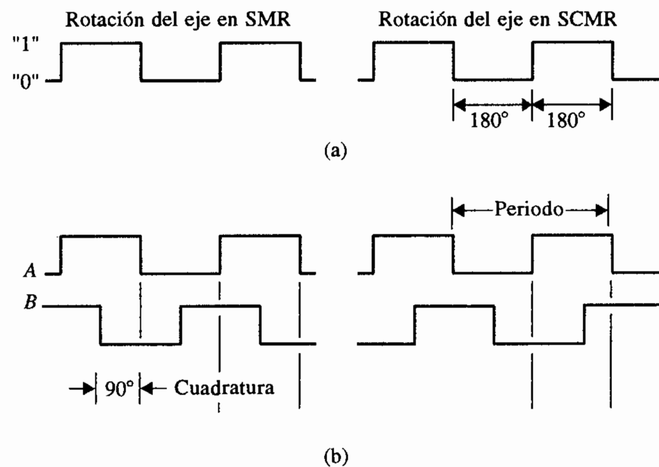


Figura 4-38 (a) Formas de onda de salida rectangulares típicas de un dispositivo codificador de canal simple (bidireccional). (b) Señales típicas de un codificador de dos canales en cuadratura (bidireccional).

Ejemplo 4-9

Considere un codificador incremental que genera dos señales senoidales en cuadratura cuando el disco del codificador gira. Las señales de salida de los dos canales se muestran en la Fig. 4-40 sobre un ciclo. Observe que las dos señales del codificador generan cuatro cruces por cero por ciclo. Estos cruces por cero se pueden usar para indicación de posición, control de posición o medición de velocidad en sistemas de control. Se supone que el eje del codificador está acoplado directamente al eje del rotor de un motor que maneja la rueda de impresión (margarita) de una máquina de escribir electrónica o un procesador de textos. La rueda de impresión tiene 96 posiciones de caracteres en su periferia, y el codificador tiene 480 ciclos. Por tanto hay $480 \times 4 = 1920$ cruces por cero por revolución. Para la margarita de 96

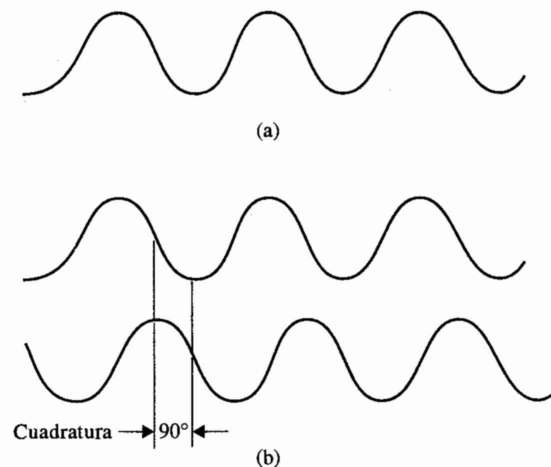


Figura 4-39 (a) Formas de onda de salida senoidales típicas de un dispositivo codificador de un canal simple. (b) Señales típicas de un codificador de canal doble en cuadratura.

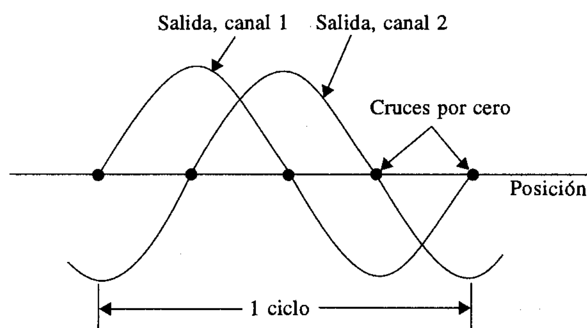


Figura 4-40 Un ciclo de las señales de salida de un codificador incremental de canal doble.

caracteres, esto corresponde a 1920/96 = 20 cruces por cero por carácter; esto es, hay 20 cruces por cero entre dos caracteres adyacentes.

Una forma de medir la velocidad de la margarita es contar el número de pulsos generados por un reloj electrónico que ocurren entre cruces de cero consecutivos de la salida del codificador. Se supone que se utiliza un reloj de 500 kHz (*i.e.*, el reloj genera 500 000 pulsos/s). Si el contador cuenta, digamos 500 pulsos de reloj mientras el codificador gira desde un cruce por cero al siguiente, la velocidad del eje es:

$$\frac{500\,000 \text{ pulsos/segundo}}{500 \text{ pulsos/cruce por cero}} = 1000 \text{ cruces por cero/segundo}$$

$$= \frac{1000 \text{ cruces por cero/segundo}}{1920 \text{ cruces por cero/segundo}} = 0.52083 \text{ rev/segundo}$$

$$= 31.25 \text{ rpm} \tag{4-100}$$

El arreglo del codificador descrito se puede usar para el control fino de la posición de la margarita. Se considera que el cruce por cero A de la forma de onda de la Fig. 4-40 corresponda a una posición de un carácter sobre la margarita (el siguiente carácter está 20 cruces por cero más adelante), y este punto corresponde a un punto de equilibrio estable. El control de posición burdo del sistema debe colocar la margarita en un cruce por cero en cualquier lado de la posición A; entonces el sistema de control debe anular el error de una forma rápida empleando la pendiente de la onda senoidal en la posición A. ▲

4-6 Motores de cd en sistemas de control

Los motores de corriente directa (cd) son una de las fuentes motrices más ampliamente usadas en la industria actualmente. Hace años, la mayoría de los servomotores pequeños empleados para propósitos de control eran de la variedad de ca. En realidad, un motor de ca es más difícil de controlar, especialmente para control de posición, y sus características no son lineales, lo que los hace más difíciles de analizar. Por otro lado, los motores de cd son más caros debido a las escobillas y conmutadores, y los motores de cd de flujo variable son adecuados sólo para cierto tipo de aplicaciones de control. Antes de que la tecnología de imán perma-

nente se desarrollara completamente, el par por unidad de volumen o peso de un motor de cd con un campo de imán permanente estaba muy lejos de lo deseado. Actualmente, con el desarrollo de los imanes de "tierras raras", es posible alcanzar una alta relación par-volumen en motores de cd de imán permanente a un costo razonable. Además, los avances alcanzados en la tecnología de escobillas y conmutadores hace prácticamente que no necesiten mantenimiento. Los avances logrados en electrónica de potencia han hecho que los motores de cd sin escobillas sean muy populares en sistemas de control de alto desempeño. Las técnicas de manufactura avanzada han producido motores de cd con rotores sin hierro que tienen una inercia muy baja, por lo que alcanzan propiedades de relación par-inercia muy alta, y constantes de tiempo muy bajas, las cuales han abierto nuevas aplicaciones para motores de cd en equipo periférico de cómputo tales como unidades de cinta, impresoras, unidades de disco y procesadores de textos, así como en las industrias automotriz y de máquinas-herramienta.

4-6-1 Principios de operación básicos de motores de cd

El motor de cd es básicamente un transductor de par que convierte energía eléctrica en energía mecánica. El par desarrollado en el eje del motor es directamente proporcional al flujo en el campo y a la corriente en la armadura. Como se presenta en la Fig. 4-41, un conductor que lleva corriente está colocado en un campo magnético con flujo ϕ, a una distancia r del centro de rotación. La relación entre el par desarrollado, el flujo ϕ, y la corriente i_a es:

$$T_m = K_m \phi i_a \tag{4-101}$$

en donde T_m es el par del motor (N-m, lb-pie, u oz.-plg), ϕ es el flujo magnético (webers), i_a es la corriente de armadura (amperes), y K_m es la constante de proporcionalidad.

Además del par desarrollado por el arreglo mostrado en la Fig. 4-41, cuando el conductor se mueve en el campo magnético, se genera un voltaje entre sus terminales. Este voltaje, la **fuerza contraelectromotriz,** la cual es proporcional a la velocidad del eje, tiende a oponerse al flujo de corriente. La relación entre la fuerza contraelectromotriz y la velocidad del eje es:

$$e_b = K_m \phi \omega_m \tag{4-102}$$

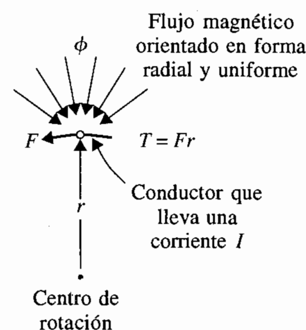


Figura 4-41 Producción del par en un motor de cd.

en donde e_b denota la fuerza contraelectromotriz (volts), y ω_m es la velocidad del eje (rad/s) del motor. Las ecuaciones (4-101) y (4-102) forman la base de la operación del motor de cd.

4-6-2 Clasificación básica de motores de cd de imán permanente

En general, el campo magnético de un motor de cd se puede producir por bobinas o imanes permanentes. Debido a la popularidad de los motores de cd de imán permanente en aplicaciones de sistemas de control, nos concentraremos en este tipo de motor. Los motores de corriente directa de imán permanente se pueden clasificar de acuerdo con el esquema de conmutación y al diseño de la armadura. Los motores de cd convencionales tienen escobillas mecánicas y conmutadores. Sin embargo, en una clase importante de motores de cd la conmutación se hace en forma electrónica; este tipo de motor se llama **motor de cd sin escobillas.**

De acuerdo con la construcción de la armadura, el motor de cd de imán permanente se puede descomponer en tres tipos de diseño de armadura: motores **de núcleo de hierro, de devanado superficial** y **de bobina móvil.**

Motores de cd de imán permanente de núcleo de hierro

La configuración del rotor y estator de un motor de cd de imán permanente de núcleo de hierro se muestra en la Fig. 4-42. El material del imán permanente puede ser bario-ferrita, Alnico, o un compuesto de "tierras raras". El flujo magnético producido por el imán pasa a través de la estructura del rotor laminado que tiene ranuras. Los conductores de la armadura están localizados en las ranuras del rotor. Este tipo de motor de cd está caracterizado por una inercia del rotor relativamente alta (ya que la parte giratoria está formada por las bobinas de la armadura), una inductancia alta, bajo costo y alta confiabilidad.

Motor de cd de devanado superficial

La Fig. 4-43 muestra la construcción del rotor de un motor de cd de imán permanente de devanado superficial. Los conductores de la armadura están pegados a la superficie de la estructura cilíndrica del rotor, la cual está hecha de discos laminados sujetados al eje del

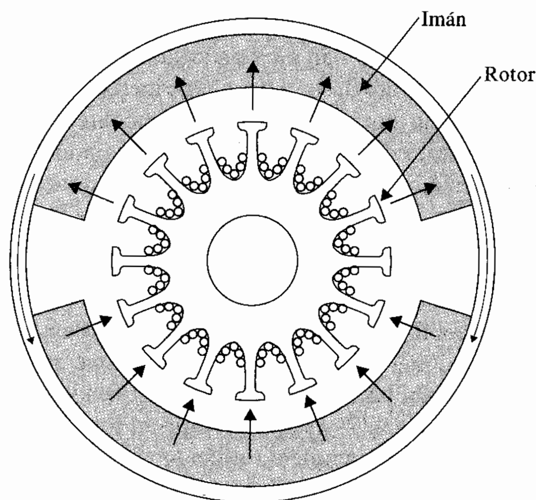


Figura 4-42 Sección transversal de un motor de cd de imán permanente de núcleo de hierro.

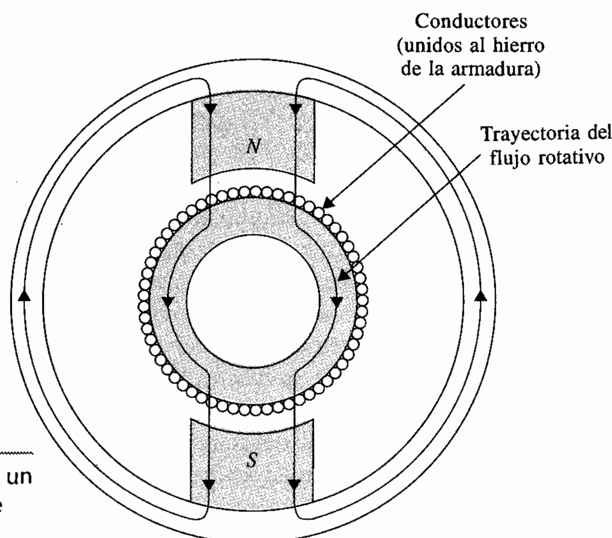


Figura 4-43 Sección transversal de un motor de cd de imán permanente de devanado superficial.

motor. Ya que en este diseño no se emplean ranuras sobre el rotor, la armadura no presenta el efecto de "rueda dentada". Puesto que los conductores están proyectados en el entre hierro de aire que está entre el rotor y el campo de imán permanente, este tipo de motor tiene menor inductancia que el de estructura de núcleo de hierro.

Motor de cd de bobina móvil

Los motores de bobina móvil están diseñados para tener momentos de inercia muy bajos e inductancia de armadura también muy baja. Esto se logra al colocar los conductores de la armadura en el entre hierro entre la trayectoria de regreso de flujo estacionario y la estructura de imán permanente, como se muestra en la Fig. 4-44. En este caso, la estructura del conductor está soportada por un material no magnético —normalmente resinas epóxicas o fibra de vidrio— para formar un cilindro hueco. Uno de los extremos del cilindro forma un eje, el cual está conectado al eje del motor. Una vista de la sección transversal de este tipo de motor se muestra en la Fig. 4-45. Ya que se han eliminado todos los elementos no necesarios de la armadura del motor de bobina móvil, su momento de inercia es muy bajo. Como los conductores en la armadura de bobina móvil no están en contacto directo con el hierro, la inductancia del motor es muy baja; valores de menos de 100 μH son comunes en este tipo de motor. Las propiedades de inercia e inductancia bajas hacen que el motor de bobina móvil sea una de las mejores elecciones de actuadores para sistemas de control de alto desempeño.

Motores de cd sin escobillas

Los motores de cd sin escobillas difieren de los mencionados anteriormente en que emplean conmutación eléctrica (en lugar de mecánica) de la corriente de la armadura. La configuración del motor de cd sin escobillas más comúnmente empleado —especialmente para aplicaciones de movimiento incremental— es una en la que el rotor consta de imanes y un soporte de hierro, en el que las bobinas conmutadas están localizadas en forma externa a las partes giratorias, como se muestra en la Fig. 4-46. En comparación con los motores de cd conven-

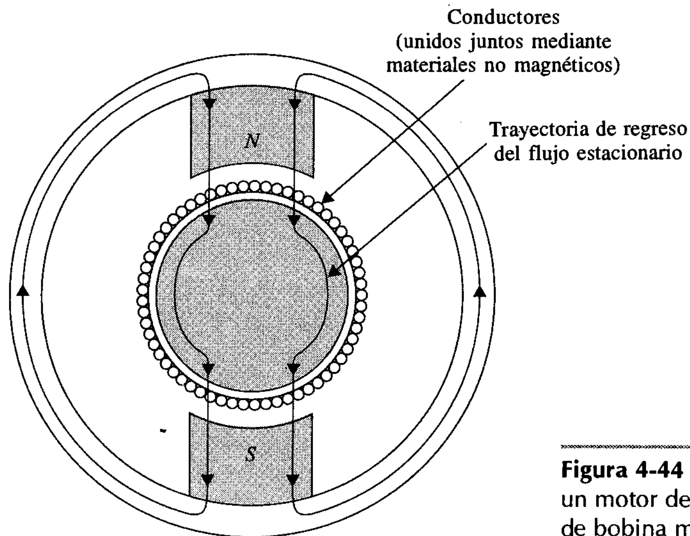


Figura 4-44 Sección transversal de un motor de cd de imán permanente de bobina móvil.

como el que se muestra en la Fig. 4-42, es una configuración "interna-externa". En función de la aplicación específica, los motores de cd sin escobillas se pueden usar cuando se requiere un momento de inercia bajo, como en el manejo del eje de unidades de disco de alto desempeño empleados en computadoras.

4-6-3 Modelado matemático de motores de cd de imán permanente

Ya que los motores de cd se usan en forma extensa en sistemas de control, para propósitos de análisis, es necesario establecer modelos matemáticos para los motores de cd para aplicaciones de control. Se utilizará el diagrama del circuito equivalente de la Fig. 4-47 para represen-

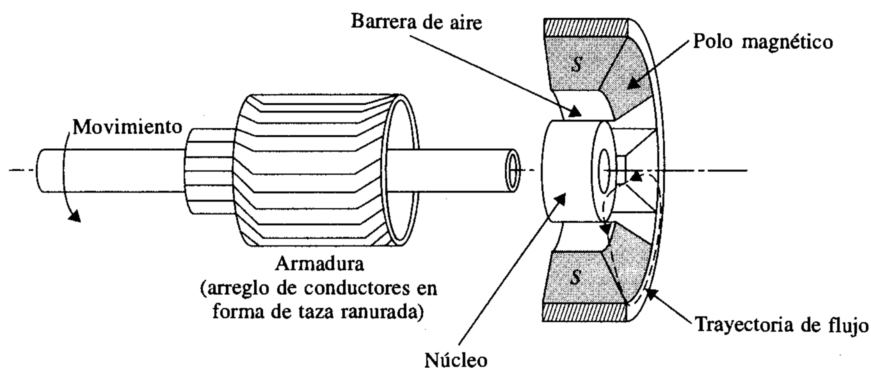


Figura 4-45 Corte lateral de la sección transversal de un motor de cd de bobina móvil.

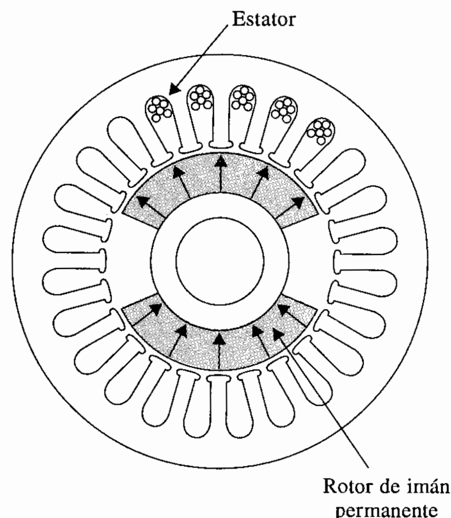


Figura 4-46 Sección transversal de un motor de cd de imán permanente sin escobillas.

tar un motor de cd de imán permanente. La armadura está modelada como un circuito con resistencia R_a conectada en serie a una inductancia L_a, y a una fuente de voltaje e_b que representa la fuerza contraelectromotriz en la armadura cuando el rotor gira. Las variables y parámetros del motor se definen como sigue:

- ▲ $i_a(t)$ = corriente de armadura
- ▲ R_a = resistencia de armadura
- ▲ $e_b(t)$ = fuerza contraelectromotriz
- ▲ $T_L(t)$ = par de carga
- ▲ $T_m(t)$ = par del motor
- ▲ $\theta_m(t)$ = desplazamiento del rotor
- ▲ K_i = constante del par
- ▲ L_a = inductancia de la armadura
- ▲ $e_a(t)$ = voltaje aplicado
- ▲ K_b = constante de la fuerza contraelectromotriz
- ▲ ϕ = flujo magnético en el entre hierro
- ▲ $\omega_m(t)$ = velocidad angular del rotor
- ▲ J_m = inercia del rotor
- ▲ B_m = coeficiente de fricción viscosa

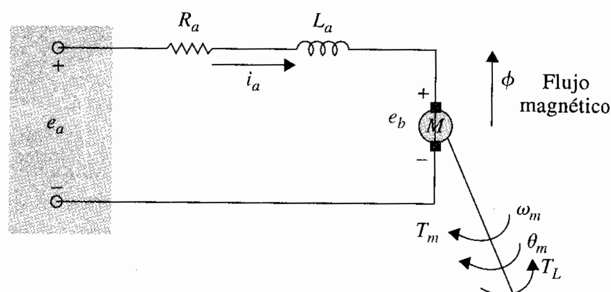


Figura 4-47 Modelo de un motor de cd excitado en forma separada.

Con referencia al diagrama del circuito de la Fig. 4-47, el control del motor de cd se aplica a las terminales de la armadura en la forma del voltaje aplicado $e_a(t)$. Para un análisis lineal, se supone que el par desarrollado por el motor es proporcional al flujo en el entre hierro y a la corriente de la armadura. Por tanto:

$$T_m(t) = K_m(t)\phi i_a(t) \qquad (4\text{-}103)$$

Ya que ϕ es constante, la ecuación (4-103) se escribe como:

$$T_m(t) = K_i i_a(t) \qquad (4\text{-}104)$$

en donde K_i es la **constante del par** en N-m/A, lb-pie/A, u oz-plg/A.

Al comenzar con el voltaje de entrada de control $e_a(t)$, las ecuaciones de causa y efecto para el circuito del motor de la Fig. 4-47 son:

$$\frac{di_a(t)}{dt} = \frac{1}{L_a}e_a(t) - \frac{R_a}{L_a}i_a(t) - \frac{1}{L_a}e_b(t) \qquad (4\text{-}105)$$

$$T_m(t) = K_i i_a(t) \qquad (4\text{-}106)$$

$$e_b(t) = K_b\frac{d\theta_m(t)}{dt} = K_b\omega_m(t) \qquad (4\text{-}107)$$

$$\frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = \frac{1}{J_m}T_m(t) - \frac{1}{J_m}T_L(t) - \frac{B_m}{J_m}\frac{d\theta_m(t)}{dt} \qquad (4\text{-}108)$$

en donde $T_L(t)$ representa el par de carga debido a la fricción tal como la fricción de Coulomb.

Las ecuaciones (4-105) a (4-108) consideran a $e_a(t)$ como la causa de todas las causas; la ecuación (4-105) considera que $di_a(t)/dt$ es el efecto inmediato de aplicar el voltaje $e_a(t)$, entonces en la ecuación (4-106), $i_a(t)$ produce el par $T_m(t)$, la ecuación (4-107) define la fuerza contraelectromotriz, y finalmente, en la ecuación (4-108), el par $T_m(t)$ produce la velocidad angular $\omega_m(t)$ y el desplazamiento $\theta_m(t)$.

Las variables de estado del sistema se pueden definir como $i_a(t)$, $\omega_m(t)$ y $\theta_m(t)$. Al sustituir directamente y al eliminar las variables que no son de estado de las ecuaciones (4-105) a la (4-108), las ecuaciones de estado del sistema de motor de cd escritas en la forma matricial son:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_a(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} \\ \frac{d\theta_m(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 \\ \frac{K_i}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_a(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_m} \\ 0 \end{bmatrix} T_L(t) \qquad (4\text{-}109)$$

Observe que en este caso, en las ecuaciones de estado, $T_L(t)$ se tratan como una segunda entrada.

El diagrama de estado del sistema se dibuja en la Fig. 4-48 empleando la ecuación (4-109). La función de transferencia entre el desplazamiento del motor y el voltaje de entrada se obtiene del diagrama de estado como:

$$\frac{\Theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_i}{L_a J_m s^3 + (R_a J_m + B_m L_a)s^2 + (K_b K_i + R_a B_m)s} \tag{4-110}$$

en donde $T_L(t)$ se igualó a cero.

La Fig. 4-49 muestra la representación en diagrama de bloques del sistema de un motor de cd. La ventaja de utilizar el diagrama de bloques es que proporciona una visión clara de la relación de funciones de transferencia entre cada bloque del sistema. Ya que s se puede factorizar en el denominador de la ecuación (4-110), *el significado de la función de transferencia* $\Theta_m(s)/E_a(s)$ *es que el motor de cd es esencialmente un dispositivo integrador entre estas dos variables.* Esto ya se esperaba, puesto que si $e_a(t)$ es una entrada constante, el desplazamiento de salida del motor será la salida de un integrador; esto es, se incrementará linealmente con el tiempo.

▲ Un motor de cd es, en esencia, un dispositivo integrador.

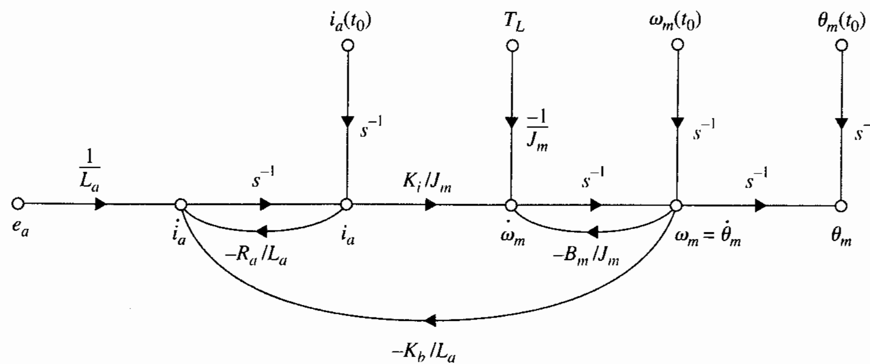


Figura 4-48 Diagrama de estado de un motor de cd.

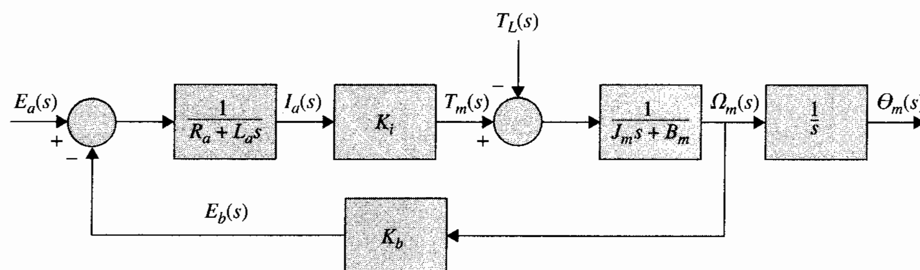


Figura 4-49 Diagrama de bloques de un sistema de motor de cd.

Aunque un motor de cd es por sí mismo un sistema en lazo abierto, el diagrama de estado de la Fig. 4-48 y el diagrama de bloques de la Fig. 4-49 muestran que el motor tiene "interconstruido" un lazo realimentado provocado por la fuerza contraelectromotriz. Físicamente, la fuerza contraelectromotriz representa la realimentación de la señal que es proporcional al negativo de la velocidad del motor. Como se observa de la ecuación (4-110), la constante de la fuerza contraelectromotriz K_b representa un término que se añade a la resistencia R_a y al coeficiente de fricción viscosa B_m. Por tanto, *la fuerza contraelectromotriz es equivalente a una "fricción eléctrica" que tiende a mejorar la estabilidad del motor, y en general, la estabilidad del sistema.*

▲ La fuerza contraelectromotriz mejora la estabilidad del sistema.

Relación entre K_i y K_b

Aunque funcionalmente la constante del par K_i y la constante de la fuerza contraelectromotriz K_b son dos parámetros separados, para un motor dado, sus valores están estrechamente relacionados. Para mostrar esta relación, la potencia mecánica desarrollada en la armadura se escribe como:

$$P = e_b(t)i_a(t) \tag{4-111}$$

La potencia mecánica también se expresa como:

$$P = T_m(t)\omega_m(t) \tag{4-112}$$

en donde, en las unidades del SI, $T_m(t)$ está en N-m y $\omega_m(t)$ está en rad/s. Ahora, al sustituir las ecuaciones (4-106) y (4-107) en la ecuación (4-111), se obtiene:

$$P = T_m(t)\omega_m(t) = K_b\omega_m(t)\frac{T_m(t)}{K_i} \tag{4-113}$$

de donde se obtiene:

$$K_b \text{ (V/rad/sec)} = K_i \text{ (N-m/A)} \tag{4-114}$$

En consecuencia se ve que en unidades del SI, los valores de K_b y K_i son idénticos si K_b se expresa en V/rad/s y K_i está en N-m/A.

En unidades del sistema británico, la ecuación (4-111) se convierte a caballos de fuerza (hp); esto es:

$$P = \frac{e_b(t)i_a(t)}{746} \quad \text{hp} \tag{4-115}$$

En términos del par y la velocidad angular, P está dada por:

$$P = \frac{T_m(t)\omega_m(t)}{550} \quad \text{hp} \tag{4-116}$$

en donde $T_m(t)$ está en pies-lb y $\omega_m(t)$ en rad/s. Al emplear las ecuaciones (4-106) y (4-107) e igualar las dos últimas, se obtiene:

$$\frac{K_b \omega_m(t) T_m(t)}{746 K_i} = \frac{T_m(t)\omega_m(t)}{550} \tag{4-117}$$

Por tanto:

$$K_b = \frac{746}{550} K_i = 1.356 K_i \tag{4-118}$$

en donde K_b está en V/rad/s y K_i en pies-lb/A.

4-6-4 Curvas par-velocidad de un motor de cd

Las curvas par-velocidad de un motor de cd describen la capacidad de producción de un par estático del motor con respecto al voltaje aplicado y a la velocidad del motor. Con referencia a la Fig. 4-50, en estado estacionario, el efecto de la inductancia es cero, y la ecuación del par del motor es:

$$T_m = K_i I_a = \frac{K_i(E_a - K_b \Omega_m)}{R_a} \tag{4-119}$$

en donde T_m, I_a, E_a y Ω_m representan los valores en estado estacionario del par del motor, la corriente, el voltaje aplicado y la velocidad, respectivamente.

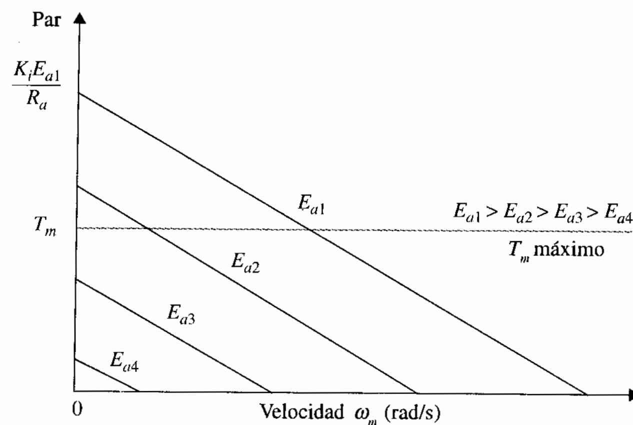


Figura 4-50 Curvas par-velocidad de un motor de cd.

Para un voltaje aplicado dado E_a, la ecuación (4-119) describe la relación lineal de las características par-velocidad del motor de cd. En realidad, el motor puede estar sujeto a dos tipos de saturación o limitaciones. Una limitación se debe a que la corriente de la armadura aumenta cuando E_a se incrementa, el circuito magnético se saturará, por lo que el par del motor no puede exceder cierto valor máximo. La segunda limitación se debe a la corriente máxima que el motor puede manejar debido a la disipación de calor.

La Fig. 4-50 muestra un conjunto típico de curvas par-velocidad para diferentes voltajes aplicados. La pendiente de estas curvas se determina de la ecuación (4-119) y se expresa como:

$$k = \frac{dT_m}{d\Omega_m} = -\frac{K_i K_b}{R_a} \tag{4-120}$$

El límite del par debido a la saturación magnética se presenta por una línea punteada en la figura. En la práctica, las curvas par-velocidad de un motor de cd se pueden determinar en forma experimental con un dinamómetro.

4-6-5 Curvas par-velocidad de un sistema amplificador/motor de cd

Ya que el motor de cd siempre es manejado por un amplificador de potencia que actúa como una fuente de energía, es más práctico presentar las curvas par-velocidad de la combinación amplificador-motor, especialmente si la ganancia del amplificador está sujeta a saturación. La Fig. 4-51 muestra el diagrama de bloques equivalente de un sistema amplificador-motor. El amplificador tiene una ganancia de K_1. El nivel de saturación del voltaje de salida del amplificador es E_L. También se introduce una realimentación de corriente con ganancia K_L para la estabilización del sistema. La ecuación del par en estado estable del sistema se escribe de la Fig. 4-51 al considerar que E_{in} y Ω_m son entradas, y T_m es la salida. Cuando el amplificador no está saturado, el par del motor es:

$$T_m = \frac{K_i(K_1 E_{\text{in}} - K_b \Omega_m)}{R_a + K_1 K_2} \tag{4-121}$$

Sin la saturación del amplificador, las curvas par-velocidad descritas por la ecuación (4-121) son nuevamente una familia de líneas rectas, como se ilustra en la Fig. 4-50. La pendiente de las curvas par-velocidad es:

$$k = \frac{dT_m}{d\Omega_m} = -\frac{K_1 K_b}{R_a + K_1 K_2} \tag{4-122}$$

Al comparar la ecuación (4-122) con la (4-120), se observa que el efecto de la realimentación de corriente en el amplificador es que la ganancia K_2 reduce la pendiente de las curvas par-velocidad del motor.

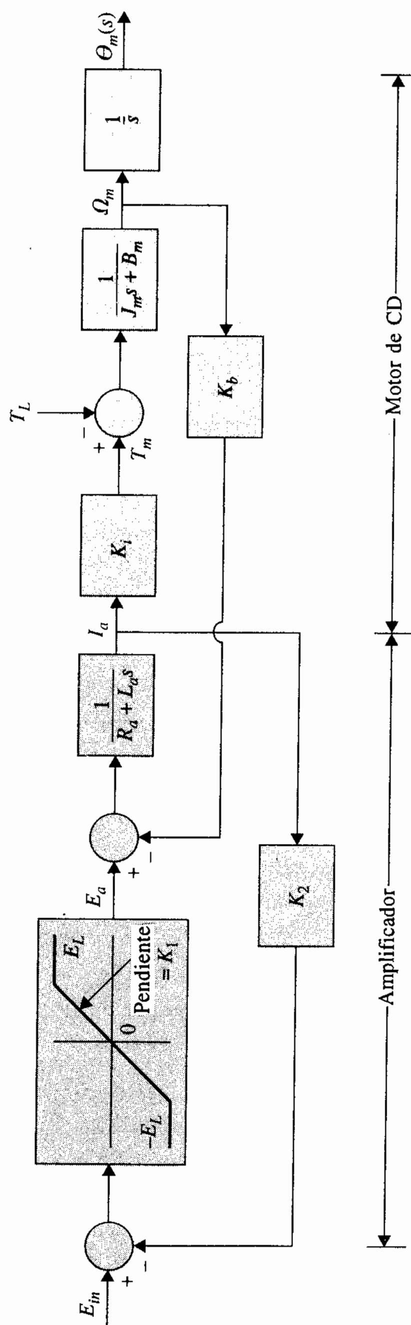


Figura 4-51 Diagrama de bloques equivalente de un sistema amplificador/motor de cd.

Cuando el amplificador está sujeto a saturación, $|E_a| \le E_L$. Cuando $|E_a| = E_L$, la ecuación del par en estado estacionario es:

$$T_m = \frac{K_i}{R_a}(E_L - K_b\Omega_m) \tag{4-123}$$

Esta ecuación da el par al rotor bloqueado máximo ($\Omega_m = 0$) como $T_m = K_i E_L / R_a$. La pendiente de la curva par-velocidad bajo saturación del amplificador es $-K_i K_b / R_a$. La Fig. 4-52 muestra las curvas par-velocidad de la combinación amplificador-motor cuando el amplificador está sujeto a saturación.

4-7 Linealización de sistemas no lineales

En las secciones anteriores, se observa que la mayoría de los componentes y actuadores que se encuentran en sistemas físicos tiene características no lineales. En la práctica, se puede encontrar que algunos dispositivos tienen características no lineales moderadas, o que las propiedades no lineales pueden aparecer en ciertas regiones de operación. El modelar estos dispositivos como sistemas lineales puede brindar resultados analíticos muy exactos sobre un intervalo amplio de condiciones de operación. Sin embargo, existe un sinnúmero de dispositivos físicos que poseen características fuertemente no lineales. Para estos dispositivos, un modelo linealizado sólo es válido en un intervalo de condiciones de operación muy limitado, y a menudo sólo en el punto de operación en el que se realizó la linealización. Más importante

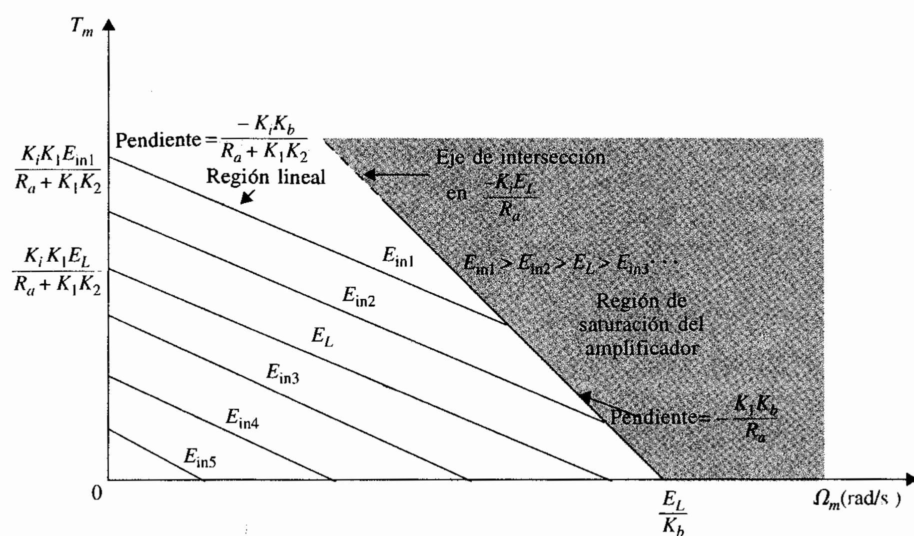


Figura 4-52 Curva par-velocidad de un sistema amplificador/motor de cd con saturación en el amplificador y realimentación de corriente.

es que cuando un sistema no lineal es linealizado en un punto de operación, el modelo lineal puede contener elementos variantes con el tiempo.

Un sistema no lineal se representa mediante las ecuaciones de estado en la forma matricial siguiente:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{r}(t)] \tag{4-124}$$

en donde $\mathbf{x}(t)$ representa el vector de estado de $n \times 1$, $\mathbf{r}(t)$ es el vector de entrada de $p \times 1$ y $\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{r}(t)]$ denota un vector función de $n \times 1$. En general, $\mathbf{f}$ es una función del vector de estado y del vector de entrada.

La capacidad de representar un sistema no lineal y/o variante con el tiempo mediante ecuaciones de estado es una ventaja que distingue al enfoque de variables de estado sobre el método de la función de transferencia, ya que este último sólo está definido estrictamente para sistemas lineales invariantes con el tiempo. Como un ejemplo ilustrativo sencillo, considere las siguientes ecuaciones de estado no lineales:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + x_2^2(t) \tag{4-125}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + r(t) \tag{4-126}$$

Ya que los sistemas no lineales son normalmente difíciles de analizar y diseñar, es deseable realizar una linealización cuando la situación lo justifique.

A continuación se describe un proceso de linealización que depende de la expansión de las ecuaciones de estado no lineales en una serie de Taylor alrededor de un punto o trayectoria de operación nominal. Todos los términos de la serie de Taylor de orden superior que uno se descartan, y resulta la aproximación lineal de las ecuaciones de estado no lineales en el punto nominal.

La trayectoria de operación nominal se denota por $\mathbf{x}_0(t)$, la cual corresponde a la entrada nominal $\mathbf{r}_0(t)$ y algunos estados iniciales fijos. Al expandir la ecuación de estado no lineal de la ecuación (4-124) en una serie de Taylor alrededor de $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t)$ y descartando los términos de orden superior se obtiene:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0) + \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{r})}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0} (x_j - x_{0j}) + \sum_{j=1}^{p} \left.\frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{r})}{\partial r_j}\right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0} (r_j - r_{0j}) \tag{4-127}$$

en donde $i = 1, 2, \ldots, n$. Sea:

$$\Delta x_i = x_i - x_{0i} \tag{4-128}$$

y

$$\Delta r_j = r_j - r_{0j} \tag{4-129}$$

Eje
4-1

Entonces:

$$\Delta \dot{x}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_{0i} \tag{4-130}$$

Ya que:

$$\dot{x}_{0i} = f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0) \tag{4-131}$$

La ecuación (4-127) se escribe como:

$$\Delta \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{r})}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0} \Delta \dot{x}_j + \sum_{j=1}^{p} \left.\frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{r})}{\partial r_j}\right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0} \Delta r_j \tag{4-132}$$

La ecuación (4-132) se puede escribir en la forma matricial siguiente:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^* \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B}^* \Delta r \tag{4-133}$$

en donde:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{4-134}$$

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r_1} & \frac{\partial f_1}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial r_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r_1} & \frac{\partial f_2}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial r_p} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial r_1} & \frac{\partial f_n}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial r_n} \end{bmatrix} \tag{4-135}$$

Los ejemplos siguientes ilustran el procedimiento de linealización que se acaba de describir.

Ejemplo 4-10

La Fig. 4-53 muestra el diagrama de bloques de un sistema de control con una no linealidad de saturación. Las ecuaciones de estado del sistema son:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(t) = x_2(t) \tag{4-136}$$
$$\dot{x}_2(t) = f_2(t) = u(t) \tag{4-137}$$

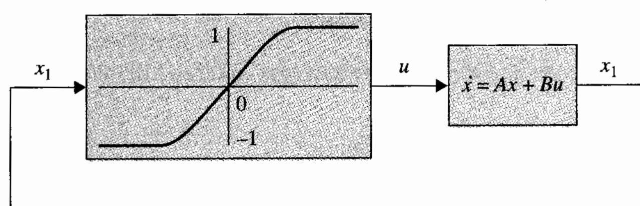


Figura 4-53 Sistema de control no lineal.

en donde la relación entrada-salida de la no linealidad de saturación se representa mediante:

$$u(t) = (1 - e^{-K|x_1(t)|})\ \mathrm{SGN}\ x_1(t) \qquad (4\text{-}138)$$

en donde:

$$\mathrm{SGN}\ x_1(t) = \begin{cases} +1 & x_1(t) > 0 \\ -1 & x_1(t) < 0 \end{cases} \qquad (4\text{-}139)$$

Al sustituir la ecuación (4-138) en la (4-137) y empleando la ecuación (4-132), se obtienen las ecuaciones de estado linealizadas:

$$\Delta \dot{x}_1(t) = \frac{\partial f_1(t)}{\partial x_2} \Delta x_2(t) = \Delta x_2(t) \qquad (4\text{-}140)$$

$$\Delta \dot{x}_2(t) = \frac{\partial f_2(t)}{\partial x_1(t)} \Delta x_1(t) = Ke^{-K|x_{01}|} \Delta x_1 \qquad (4\text{-}141)$$

en donde x_{01} denota el valor nominal de $x_1(t)$. Observe que las dos últimas ecuaciones son lineales y sólo son válidas para señales pequeñas. En forma matricial, estas ecuaciones de estado linealizadas se escriben como:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1(t) \\ \Delta \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}142)$$

en donde:

$$a = Ke^{-K|x_{01}|} = \text{constante} \qquad (4\text{-}143)$$

Es interesante revisar el significado de la linealización. Si x_{01} se escoge en el origen de la no linealidad, $x_{01} = 0$, entonces $a = K$; la ecuación (4-141) se convierte en:

$$\Delta \dot{x}_2(t) = K\, \Delta x_1(t) \qquad (4\text{-}144)$$

Por tanto, el modelo linealizado es equivalente a tener un amplificador lineal con una ganancia constante K. Por otro lado, si x_{01} es un número grande, el punto de operación nominal estará en la porción saturada de la no linealidad, y $a = 0$. Esto significa que cualquier variación pequeña de $x_1(t)$ [$\Delta x_1(t)$ pequeño] prácticamente no producirá ningún cambio en $\Delta x_2(t)$. ▲

Ejemplo 4-11

En el ejemplo 4-10 el sistema linealizado se vuelve invariante con el tiempo. Como se mencionó anteriormente, la linealización de un sistema no lineal a menudo resulta en un sistema lineal variante con el tiempo. Considere el sistema no lineal siguiente:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{-1}{x_2^2(t)} \tag{4-145}$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t)x_1(t) \tag{4-146}$$

Estas ecuaciones se van a linealizar en una trayectoria nominal, $[x_{01}(t), x_{02}(t)]$, la cual es la solución de las ecuaciones con la condición inicial $x_1(0) = x_2(0) = 1$ y la entrada $u(t) = 0$.

Al integrar ambos miembros de la ecuación (4-137) respecto a t bajo las condiciones anteriores, se tiene:

$$x_2(t) = x_2(0) = 1 \tag{4-147}$$

Entonces la ecuación (4-145) da:

$$x_1(t) = -t + 1 \tag{4-148}$$

Por tanto, la trayectoria nominal en la que se van a linealizar las ecuaciones (4-145) y (4-146) se describe como:

$$x_{01}(t) = -t + 1 \tag{4-149}$$

$$x_{02}(t) = 1 \tag{4-150}$$

Ahora al evaluar los coeficientes de la ecuación (4-132), se obtiene:

$$\frac{\partial f_1(t)}{\partial x_1(t)} = 0 \qquad \frac{\partial f_1(t)}{\partial x_2(t)} = \frac{2}{x_2^3(t)} \qquad \frac{\partial f_2(t)}{\partial x_1(t)} = u(t) \qquad \frac{\partial f_2(t)}{\partial u(t)} = x_1(t) \tag{4-151}$$

La ecuación (4-132) da:

$$\Delta\dot{x}_1(t) = \frac{2}{x_{02}^3(t)}\Delta x_2(t) \tag{4-152}$$

$$\Delta\dot{x}_2(t) = u_0(t)\,\Delta x_1(t) + x_{01}(t)\,\Delta u(t) \tag{4-153}$$

Al sustituir las ecuaciones (4-149) y (4-150) en las ecuaciones (4-152) y (4-153), las eecuaciones linealizadas son:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1(t) \\ \Delta\dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1-t \end{bmatrix} \Delta u(t) \tag{4-154}$$

lo cual es un conjunto de ecuaciones de estado lineales con coeficientes variantes con el tiempo. ▲

Ejemplo 4-12

La Fig. 4-54 muestra el diagrama de un sistema de suspensión magnética de una esfera. El objetivo del sistema es controlar la posición de la esfera de acero mediante el ajuste de la corriente en el electroimán a través del voltaje de entrada $e(t)$. Las ecuaciones diferenciales del sistemas son:

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} = Mg - \frac{i^2(t)}{y(t)} \tag{4-155}$$

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} \tag{4-156}$$

en donde:

- ▲ $e(t)$ = voltaje de entrada
- ▲ $i(t)$ = corriente de bobinado
- ▲ L = inductancia de bobinado
- ▲ g = aceleración gravitacional
- ▲ $y(t)$ = posición de la esfera
- ▲ R = resistencia del bobinado
- ▲ M = masa de la esfera

Las variables de estado se definen como $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = dy(t)/dt$ y $x_3(t) = i(t)$. Las ecuaciones de estado del sistema son:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \tag{4-157}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = g - \frac{1}{M}\frac{x_3^2(t)}{x_1(t)} \tag{4-158}$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = -\frac{R}{L}x_3(t) + \frac{1}{L}e(t) \tag{4-159}$$

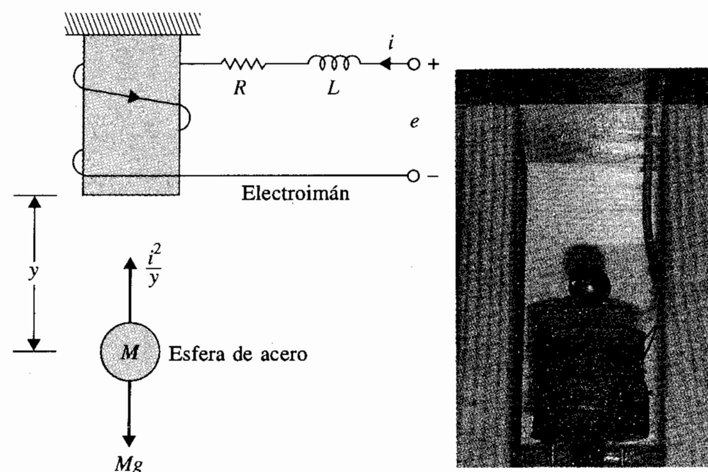


Figura 4-54 Sistema de suspensión imán-esfera.

El sistema se va a linealizar en el punto de equilibrio $y_0(t) = x_{01}$ = constante. Entonces:

$$x_{02}(t) = \frac{dx_{01}(t)}{dt} = 0 \tag{4-160}$$

$$\frac{d^2y_0(t)}{dt^2} = 0 \tag{4-161}$$

El valor nominal de $i(t)$ se determina al sustituir la ecuación (4-161) en la ecuación (4-155). Por tanto:

$$i_0(t) = x_{03}(t) = \sqrt{Mgx_{01}} \tag{4-162}$$

La ecuación de estado linealizada se expresa en la forma de la ecuación (4-133), con los coeficientes **A*** y **B*** evaluados como:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{x_{03}^2}{Mx_{01}^2} & 0 & \dfrac{-2x_{03}}{Mx_{01}} \\ 0 & 0 & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{g}{x_{01}} & 0 & -2\left(\dfrac{g}{Mx_{01}}\right)^{1/2} \\ 0 & 0 & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \tag{4-163}$$

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} \tag{4-164}$$

▲

4-8 Sistemas con retardo de transporte

Todos los sistemas considerados tienen funciones de transferencia que son el cociente de los polinomios. En la práctica, se pueden encontrar retrasos puros en varios tipos de sistemas, especialmente en sistemas con transmisiones hidráulicas, neumáticas o mecánicas. Los sistemas con control por computadora también tienen retardos, ya que la computadora toma cierto tiempo en ejecutar operaciones numéricas. En estos sistemas la salida no comienza a responder a la entrada sino hasta después de un intervalo de tiempo dado. La Fig. 4-55 ilustra algunos sistemas en los que se observa el retardo de transporte o retardos puros. La Fig. 4-55(a) esboza un arreglo en el que dos fluidos diferentes se mezclan en proporciones adecuadas. Para asegurar que se mida una solución homogénea, los puntos de supervisión se localizan a cierta distancia del punto de mezcla. Por tanto, existe un retraso entre el punto de mezcla y el lugar adonde se detecta el cambio en la concentración. Si la velocidad del flujo de la solución mezclada es v pulgadas por segundo y d es la distancia entre los puntos de mezcla y medición, el tiempo de retardo está dado por:

$$T_d = \frac{d}{v} \quad \text{segundos} \tag{4-165}$$

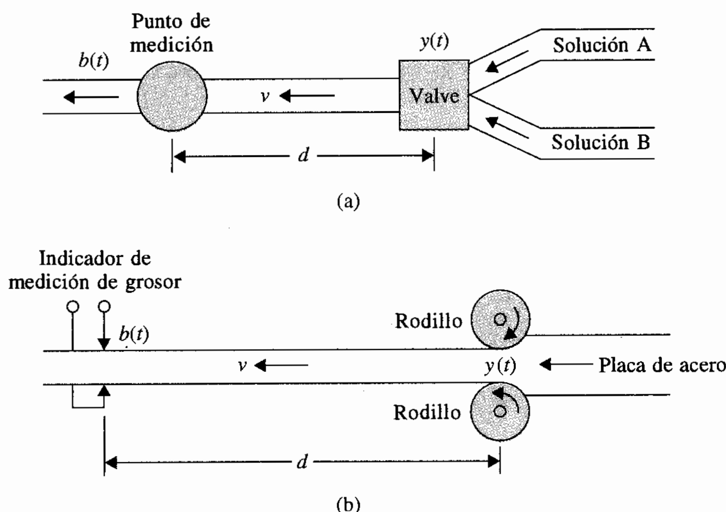


Figura 4-55 Sistemas físicos con retardo de transporte.

Se supone que la concentración en el punto de mezcla es $y(t)$ y que ésta se reproduce sin cambios T_d segundos después en el punto de supervisión, la cantidad medida es:

$$b(t) = y(t - T_d) \tag{4-166}$$

La trasformada de Laplace de la ecuación (4-166) es:

$$B(s) = e^{-T_d s}Y(s) \tag{4-167}$$

en donde $Y(s)$ es la transformada de Laplace de $y(t)$. La función de transferencia entre $b(t)$ y $y(t)$ es:

$$\frac{B(s)}{Y(s)} = e^{-T_d s} \tag{4-168}$$

La Fig. 4-55(b) ilustra el control del grueso de placas de acero. La función de transferencia entre el grueso de los rodillos y el punto de medición está dado nuevamente por la ecuación (4-168).

4-8-1 Aproximación de funciones con retardo mediante funciones racionales

Los sistemas que están descritos inherentemente por funciones de transferencia trascendentales son más difíciles de manejar. Muchas herramientas analíticas, tal como el criterio de

Routh-Hurwitz (Cap. 6), están restringidas a funciones de transferencia racionales. La técnica del lugar geométrico de las raíces (Cap. 8) también se aplica más fácilmente a sistemas con funciones de transferencia racionales.

Existen muchas formas de aproximar a $e^{-T_d s}$ por una función racional. Una forma de aproximar la función exponencial es mediante una serie de Maclaurin; esto es:

$$e^{-T_d s} \cong 1 - T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{2} \tag{4-169}$$

o

$$e^{-T_d s} \cong \frac{1}{1 + T_d s + T_d^2 s^2/2} \tag{4-170}$$

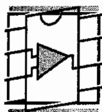
en donde sólo se utilizan tres términos de la serie. Aparentemente, las aproximaciones no son válidas cuando la magnitud de $T_d s$ es grande.

Una aproximación mejor es la de Padé [6, 7], la cual está dada por una aproximación de dos términos:

$$e^{-T_d s} \cong \frac{1 - T_d s/2}{1 + T_d s/2} \tag{4-171}$$

La característica de la aproximación de la ecuación (4-171) es que la función de transferencia contiene un cero en el semiplano derecho del plano s, por lo que la respuesta al escalón del sistema aproximado puede presentar un sobrepaso negativo pequeño cerca de $t = 0$.

4-9 Amplificadores operacionales



Los amplificadores operacionales, o simplemente **amps-op,** ofrecen una forma conveniente de construir, implantar o realizar funciones de transferencia en el dominio s o en tiempo continuo. En sistemas de control, los amps-op se emplean a menudo para implantar, controladores o compensadores que se obtienen del proceso de diseño de sistemas de control. Por ello, es bueno ilustrar las configuraciones comunes con amps-op. Sin embargo, una presentación profunda está más allá de los alcances de este libro. Para aquellos que estén interesados, existen muchos textos que están dedicados a los aspectos del diseño de circuitos y aplicaciones de los amps-op [8,9].

El principal objetivo aquí es mostrar cómo implantar funciones de transferencia de primer orden con amps-op manteniendo en mente que las funciones de transferencia de ma-

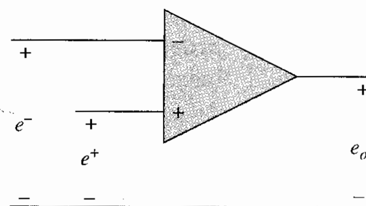


Figura 4-56 Diagrama de un amplificador operacional.

yor orden también son importantes. De hecho, las funciones de transferencia de mayor orden se pueden realizar al conectar configuraciones de primer orden. Sólo se presenta una muestra de la multitud de configuraciones de los amps-op.

4-9-1 Amp-op ideal

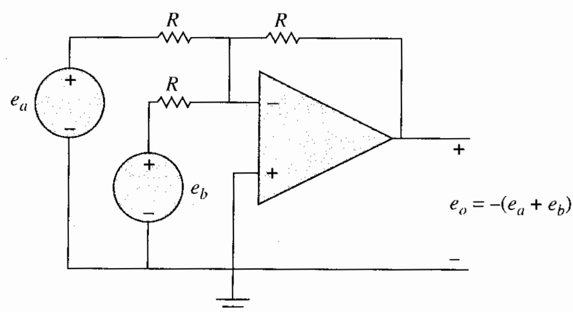
Cuando se tiene cierta práctica en ingeniería, un circuito de un amp-op se puede analizar adecuadamente al considerar al amp-op como ideal. El circuito del amp-op ideal se presenta en la Fig. 4-56 y tiene las siguientes propiedades:

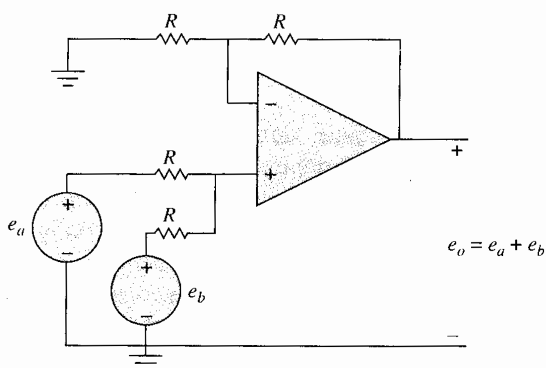
1. El voltaje entre las terminales + y – es cero; esto es, $e^+ = e^-$. Esta propiedad se conoce comúnmente como *tierra virtual* o *corto virtual*.
2. Las corrientes dentro de las terminales + y – son cero. Por tanto la impedancia de entrada es infinita.
3. La impedancia vista hacia la terminal de salida es cero. Por tanto, la salida es una fuente de voltaje ideal.
4. La relación entrada-salida es $e_0 = A(e^+ - e^-)$, donde la ganancia A tiende a infinito.

La aplicación de estas propiedades ideales permiten determinar la relación entrada-salida de muchas configuraciones del amp-op. Un amp-op no se puede usar como el que se muestra en la Fig. 4-56. En su lugar, la operación lineal requiere de añadir realimentación de la señal de salida a la terminal de entrada.

4-9-2 Sumas y restas

Como se ilustró en el Cap. 3, uno de los elementos fundamentales en un diagrama de bloques o una gráfica de flujo de señal es la suma o resta de señales. Cuando estas señales son voltajes, los amps-op permiten una forma simple de sumar o restar señales como se muestra en la Fig. 4-57, en donde todos los resistores tienen el mismo valor. Empleando superposición y las propiedades ideales dadas anteriormente, la relación entrada-salida de la Fig. 4-57(a) es $v_o = -(v_a - v_b)$.





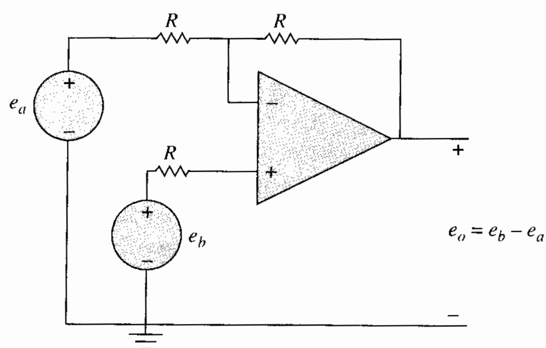


Figura 4-57 Amplificadores operacionales empleados para sumar y restar señales.

Por tanto, la salida es la suma negativa de los voltajes de entrada. Cuando se desea una suma positiva, se puede emplear el circuito que se muestra en la Fig. 4-57(b). Aquí la salida está dada por $e_o = e_a + e_b$. Al modificar ligeramente la Fig. 4-57(b) se obtiene el circuito restador de la Fig. 4-57(c), el cual tiene la relación entrada-salida $e_o = e_b - e_a$.

4-9-3 Configuraciones de amplificadores operacionales de primer orden

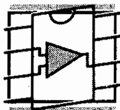
Al añadir o sustraer señales, los amps-op se pueden emplear para implantar funciones de transferencia de sistemas en tiempo continuo. Aunque existen muchas alternativas posibles, sólo se exploran aquellas que emplean la configuración del amp-op inversor que se muestra en la Fig. 4-58. En la figura, $Z_1(s)$ y $Z_2(s)$ son las impedancias compuestas comúnmente por resistores y capacitores. Los inductores no se emplean comúnmente porque tienden a ser voluminosos y caros. Al emplear las propiedades del amp-op ideal, la relación entrada-salida, o la función de transferencia del circuito que se muestra en la Fig. 4-58 se puede escribir en diversas formas como:

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = \frac{-1}{Z_1(s)Y_2(s)}$$
$$= -Z_2(s)Y_1(s) = -\frac{Y_1(s)}{Y_2(s)} \qquad (4\text{-}172)$$

en donde $Y_1(s) = 1/Z_1(s)$ y $Y_2(s) = 1/Z(s)$ son las admitancias asociadas con las impedancias del circuito. Las diferentes formas de función de transferencia dadas en la ecuación (4-172) se aplican convenientemente a las diferentes composiciones de las impedancias del circuito.

Empleando la configuración del amp-op inversor mostrado en la Fig. 4-58 así como resistores y capacitores como elementos para formar a $Z_1(s)$ y $Z_2(s)$, la tabla 4-1 ilustra varias implantaciones comunes de funciones de transferencia. Como se muestra en la tabla, es posible implantar polos y ceros a lo largo del eje negativo real así como en el origen del plano s. Debido a que se empleó la configuración inversora del amp-op, todas las funciones de transferencia tienen ganancias negativas. La ganancia negativa no es un inconveniente, ya que es fácil añadir una ganancia de −1 a la señal de entrada y salida para hacer que la ganancia neta sea positiva.

Ejemplo 4-13



Como un ejemplo de una realización en amp-op de funciones de transferencia, considere la función de transferencia:

$$G(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \qquad (4\text{-}173)$$

en donde K_P, K_D, y K_I son constantes reales. En el Cap. 10 esta función de transferencia será llamada **controlador PID,** ya que el primer término es una ganancia **P**roporcional, el segundo es un término **I**ntegral, y el tercero es un término **D**erivativo. Al emplear la tabla 4-1, la ganancia proporcional se

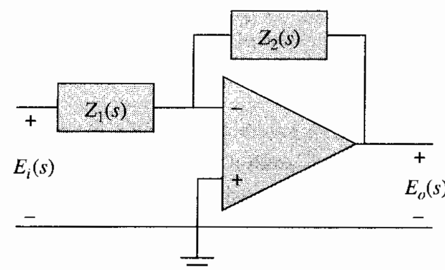


Figura 4-58 Configuración de un amplificador operacional inversor.

Tabla 4-1 Funciones de transferencia de un amplificador operacional en configuración inversora

	Elemento de entrada	Elemento de realimentación	Función de transferencia	Comentarios
(a)	R_1 $Z_1 = R_1$	R_2 $Z_2 = R_2$	$-\frac{R_2}{R_1}$	Ganancia inversora, *i.e.*, si $R_1 = R_2$, $e_o = -e_i$
(b)	R_1 $Z_1 = R_1$	C_2 $Y_2 = sC_2$	$\left(\frac{-1}{R_1C_2}\right)\frac{1}{s}$	Polo en el origen, *i.e.*, un integrador.
(c)	C_1 $Y_1 = sC_1$	R_2 $Z_2 = R_2$	$(-R_2C_1)s$	Cero en el origen, *i.e.*, un diferenciador.
(d)	R_1 $Z_1 = R_1$	R_2, C_2 $Y_2 = \frac{1}{R_2} + sC_2$	$\frac{-\frac{1}{R_1C_2}}{s + \frac{1}{R_2C_2}}$	Polo en $\frac{-1}{R_2C_2}$ con una ganancia de CD de $-R_2/R_1$
(e)	R_1 $Z_1 = R_1$	R_2, C_2 $Z_2 = R_2 + \frac{1}{sC_2}$	$\frac{-R_2}{R_1}\left(\frac{s + 1/R_2C_2}{s}\right)$	Polo en el origen y un cero en $-1/R_2C_2$, *i.e.*, un controlador PI.
(f)	R_1, C_1 $Y_1 = \frac{1}{R_1} + sC_1$	R_2 $Z_2 = R_2$	$-R_2C_1\left(s + \frac{1}{R_1C_1}\right)$	Cero en $s = \frac{-1}{R_1C_1}$, *i.e.*, un controlador PD.
(g)	R_1, C_1 $Y_1 = \frac{1}{R_1} + sC_1$	R_2, C_2 $Y_2 = \frac{1}{R_2} + sC_2$	$\frac{\frac{-C_1}{C_2}\left(s + \frac{1}{R_1C_1}\right)}{s + \frac{1}{R_2C_2}}$	Polo en $s = \frac{-1}{R_2C_2}$ y un cero en $s = \frac{-1}{R_1C_1}$, *i.e.*, un controlador de adelanto y atraso.

puede implantar con el renglón (a), el término integral se puede realizar con el renglón (b), y el término derivativo se puede llevar a cabo con el renglón (c). Por superposición, la salida de $G(s)$ es la suma de las respuestas debido a cada término en $G(s)$. Esta suma se puede realizar al añadir una resistencia adicional en la entrada del circuito que se muestra en la Fig. 4-57(a). Al hacer que la suma sea negativa, las ganancias negativas de los términos proporcional, integral y derivativo se cancelan, dando el resul-

tado deseado que se muestra en la Fig. 4-59. Las funciones de transferencia de los componentes del circuito del amp-op de la Fig. 4-59 son:

Proporcional: $$\frac{E_P(s)}{E(s)} = -\frac{R_2}{R_1} \qquad (4\text{-}174)$$

Integral: $$\frac{E_I(s)}{E(s)} = -\frac{1}{R_iC_is} \qquad (4\text{-}175)$$

Derivativo: $$\frac{E_D(s)}{E(s)} = -R_dC_ds \qquad (4\text{-}176)$$

El voltaje de salida es:

$$E_o(s) = -[E_P(s) + E_I(s) + E_D(s)] \qquad (4\text{-}177)$$

Por tanto, la función de transferencia del circuito del amp-op del PID es:

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E(s)} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{R_iC_is} + R_dC_ds \qquad (4\text{-}178)$$

Al igualar las ecuaciones (4-173) y (4-178), el diseño se completa al seleccionar los valores de los resistores y los capacitores del circuito del amp-op para obtener los valores deseados de K_P, K_I, y K_D. El diseño del controlador se debe basar en la disponibilidad de valores estándar de capacitores y resistores.

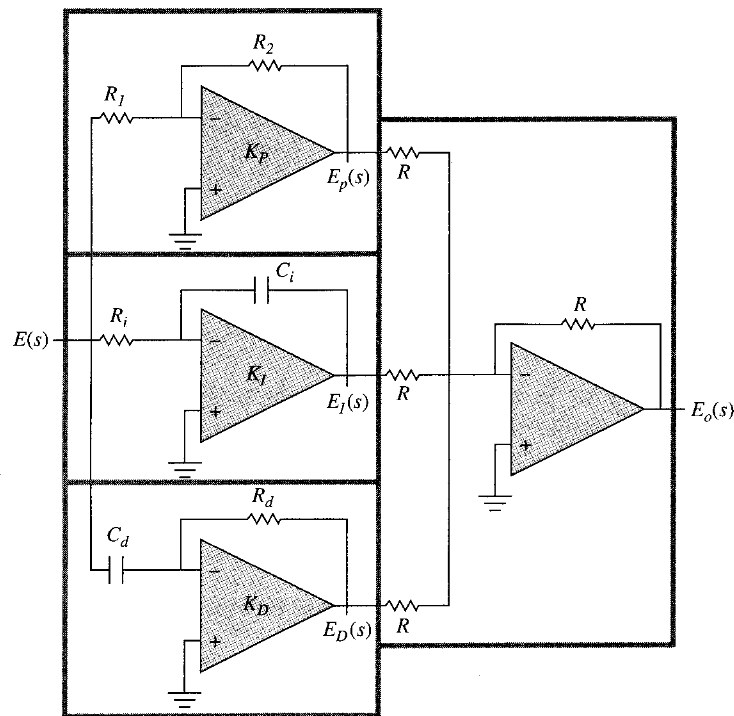
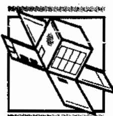


Figura 4-59 Implantación de un controlador PID.

Es importante observar que la Fig. 4-59 sólo es una de las posibles implantaciones de la ecuación (4-173). Por ejemplo, es posible implantar el controlador PID con tres amps-op. También es común, añadir componentes que limiten la ganancia en alta frecuencia del diferenciador y para limitar la magnitud de salida del integrador, el cual se refiere como protección de *antisaturación* (*antiwindup*). Una de las ventajas del circuito de la Fig. 4-59 es que cada una de las tres constantes, K_P, K_I, y K_D, se pueden ajustar en forma individual al variar los valores de los resistores en su amp-op respectivo. Los amps-op también se pueden utilizar en sistemas de control para convertidores A/D y D/A, dispositivos de muestreo y para realizaciones de elementos no lineales para compensación de sistemas. ▲

4-10 Sistema de seguimiento del Sol



En esta sección se modela un sistema de control de seguimiento del Sol cuyo propósito es controlar la altitud de un vehículo espacial para que pueda seguir al Sol con gran exactitud. En el sistema descrito, el seguimiento del Sol se realiza sólo en un plano. Un diagrama esquemático del sistema se muestra en la Fig. 4-60. Los elementos principales del discriminador de error son dos rectángulos pequeños de celdas fotovoltaicas de silicio montadas atrás de una hendedura rectangular en un compartimiento. Las celdas están montadas de tal forma que cuando el detector se apunta al Sol, el rayo de luz de la hendedura cae en ambas celdas. Las celdas de silicio se emplean como fuentes de corriente y se conectan en polaridad opuesta a la entrada del amp-op. Cualquier diferencia en la corriente de cortocircuito de las dos celdas es

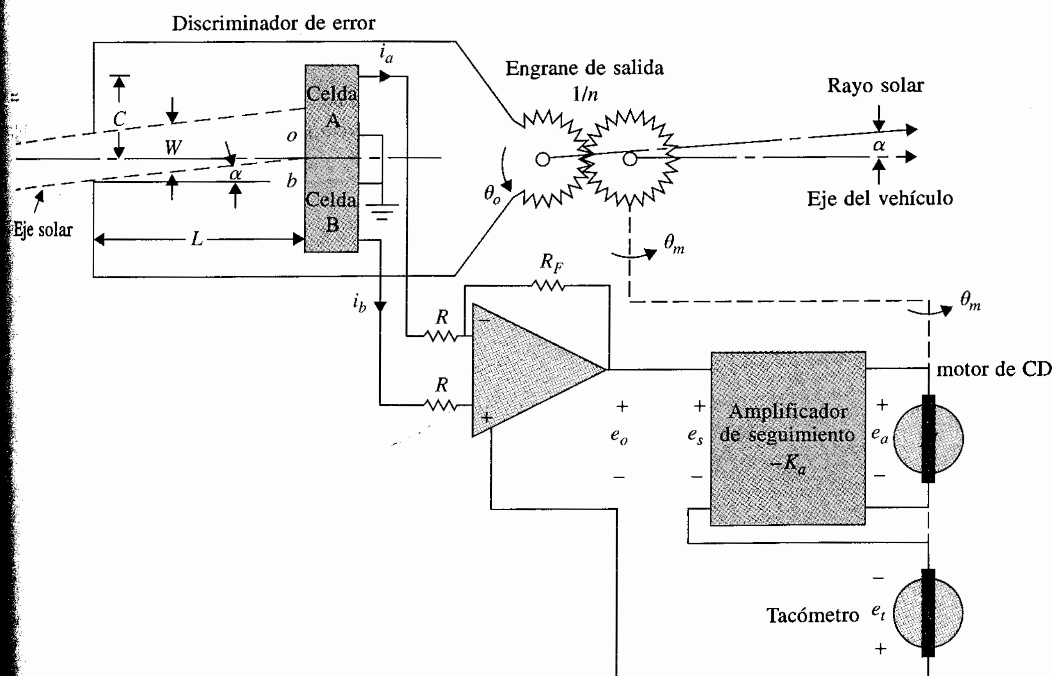


Figura 4-60 Diagrama de un sistema de seguimiento del Sol.

detectada y amplificada por el amp-op. Ya que la corriente de cada celda es proporcional a la iluminación sobre la misma, se genera una señal de error en la salida del amplificador cuando la luz de la hendedura no está centrada en forma precisa sobre las celdas. Este voltaje de error, cuando se realimenta al amplificador de seguimiento, causará que el motor alinee nuevamente al sistema. A continuación se da la descripción de cada parte del sistema.

4-10-1 Sistema de coordenadas

El centro del sistema de coordenadas se considera que está en los engranes de salida del sistema. El eje de referencia se considera fijo sobre el motor de cd, y todas las rotaciones se miden con respecto a este eje. El eje solar o la línea que va desde el engrane de salida hasta el Sol hace un ángulo $\theta_r(t)$ con respecto al eje de referencia, y $\theta_o(t)$ denota el eje del vehículo con respecto al eje de referencia. El objetivo del sistema de control es mantener el error entre $\theta_r(t)$ y $\theta_o(t)$, $\alpha(t)$, cerca de cero:

$$\alpha(t) = \theta_r(t) - \theta_o(t) \tag{4-179}$$

El sistema de coordenadas descrito se ilustra en la Fig. 4-61.

4-10-2 Discriminador de error

Cuando el vehículo está alineado perfectamente con el Sol, $\alpha(t) = 0$, y $i_a(t) = i_b(t) = I$, o $i_a(t) = i_b(t) = 0$. De la geometría del rayo del Sol y las celdas fotovoltaicas que se muestran en la Fig. 4-60, se tiene:

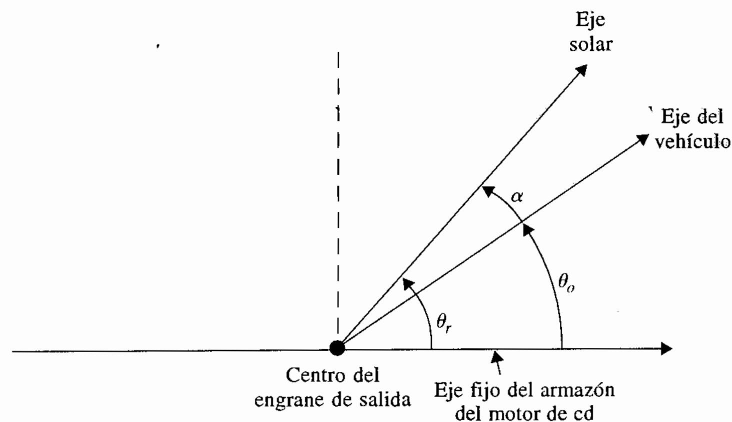


Figura 4-61 Sistema de coordenadas para el sistema de seguimiento del Sol.

$$oa = \frac{W}{2} + L \tan \alpha(t) \tag{4-180}$$

$$ob = \frac{W}{2} - L \tan \alpha(t) \tag{4-181}$$

en donde oa denota el ancho del rayo del Sol que ilumina a la celda A, y ob es lo mismo en relación con la celda B, para una $\alpha(t)$ dada. Ya que la corriente $i_a(t)$ es proporcional a oa, e $i_b(t)$ a ob, se tiene:

$$i_a(t) = I + \frac{2LI}{W} \tan \alpha(t) \tag{4-182}$$

$$i_b(t) = I - \frac{2LI}{W} \tan \alpha(t) \tag{4-183}$$

para $0 \le \tan \alpha(t) \le W/2L$. Para $W/2L \le \tan \alpha(t) \le (C - W/2)L$, el rayo del Sol está por completo sobre la celda A, e $i_a(t) = 2I$, $i_b(t) = 0$. Para $(C - W/2)L \le \tan \alpha(t) \le (C + W/2)L$, $i_a(t)$ se reduce linealmente desde $2I$ a cero. $i_a(t) = i_b(t) = 0$ para $\tan \alpha(t) \ge (C + W/2)L$. Por tanto, el discriminador de error se puede representar por la característica no lineal de la Fig. 4-62, en donde para un ángulo pequeño $\alpha(t)$, $\tan \alpha(t)$ se ha aproximado por $\alpha(t)$ sobre la abscisa.

4-10-3 Amp-op

La relación entre la salida del amp-op y las corrientes $i_a(t)$ y $i_b(t)$ es:

$$e_o(t) = -R_F[i_a(t) - i_b(t)] \tag{4-184}$$

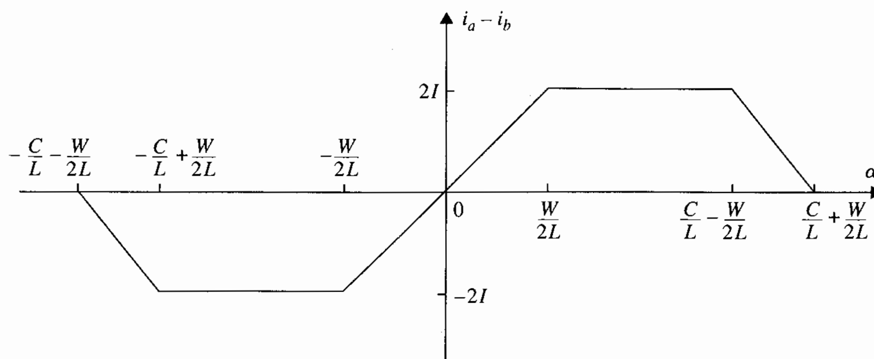


Figura 4-62 Característica no lineal del discriminador de error. La abscisa es tan α que se aproxima por α para valores pequeños de α.

4-10-4 Amplificador de seguimiento

La ganancia del amplificador de seguimiento es $-K$. Con referencia a la Fig. 4-60, la salida del amplificador de seguimiento se expresa como:

$$e_a(t) = -K[e_o(t) + e_t(t)] = -Ke_s(t) \quad (4\text{-}185)$$

4-10-5 Tacómetro

El voltaje de salida del tacómetro, e_t, se relaciona con la velocidad angular del motor a través de la constante K_t:

$$e_t(t) = K_t\omega_m(t) \quad (4\text{-}186)$$

La posición angular del engrane de salida se relaciona con la posición del motor a través de la relación del engrane $1/n$. Por tanto:

$$\theta_o = \frac{1}{n}\theta_m \quad (4\text{-}187)$$

4-10-6 Motor de cd

El motor de cd se modeló en la Sec. 4-6. Las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} e_a(t) &= R_a i_a(t) + e_b(t) \\ e_b(t) &= K_b\omega_m(t) \\ T_m(t) &= K_i i_a(t) \\ T_m(t) &= J\frac{d\omega_m(t)}{dt} + B\omega_m(t) \end{aligned} \quad (4\text{-}188)$$

en donde J y B son los coeficientes de inercia y fricción viscosa del eje del motor. En la ecuación (4-188) la inductancia del motor se desprecia. Un diagrama de bloques que caracteriza las relaciones funcionales del sistema se presenta en la Fig. 4-63.

4-11 Resumen

Este capítulo estuvo dedicado al modelado matemático de sistemas físicos. Se describieron las relaciones matemáticas básicas de sistemas eléctricos lineales y mecánicos. Para sistemas lineales, las ecuaciones diferenciales, las ecuaciones de estado y las funciones de transferencia son las herramientas fundamentales para el modelado. Las operaciones y descripciones matemáticas de algunos de los componentes más comúnmente usados en sistemas de control, tales como detectores de error, tacómetros y motores de cd, se presentaron en este capítulo.

Debido a limitaciones de espacio y al enfoque del libro, sólo se describen algunos de los dispositivos físicos empleados en la práctica. El propósito principal de este capítulo es ilustrar los métodos del modelado de sistemas, por lo que el tratamiento de los mismos no intenta ser exhaustivo.

Figura 4-63 Diagrama de bloques del sistema de seguimiento del Sol.

Ya que los sistemas no lineales no pueden ignorarse en el mundo real, y este libro no está dedicado a este tema, en la Sec. 4-7 se introdujo la linealización de sistemas no lineales en un punto de operación nominal. Una vez que se determinó el modelo linealizado, el desempeño del sistema no lineal se puede investigar bajo las condiciones de pequeña señal en el punto de operación designado.

Se modelaron los sistemas con retardos puros, y se describieron los métodos para aproximar las funciones de transferencia de dichos sistemas mediante funciones racionales. Finalmente, se describieron los amplificadores operacionales y sus aplicaciones para implantar funciones de transferencia.

Preguntas de repaso

1. Describa cómo se deben definir las variables de estado para un sistema físico.
2. ¿Bajo qué condición el número de variables de estado de un sistema físico no es igual al número de elementos que almacenan energía?
3. Entre los tres tipos de fricción descritos, ¿cuál es el tipo gobernado por una relación matemática lineal?
4. Dado un sistema de dos engranes con desplazamientos angulares θ_1 y θ_2, números de dientes N_1 y N_2, y pares T_1 y T_2, escriba las relaciones matemáticas entre estas variables y parámetros.
5. ¿Cómo se emplean los potenciómetros en sistemas de control?
6. Los codificadores digitales se emplean en sistemas de control para detección de posición y velocidad. Considere que un codificador se ajusta para producir 3600 cruces por cero por revolución. ¿Cuál es la rotación angular del eje del codificador en grados si se detectan 16 cruces por cero?
7. El codificador descrito en la pregunta de repaso 6 y un reloj electrónico con una frecuencia de 1 MHz se emplean para medir velocidad. ¿Cuál es el promedio de velocidad del eje del codificador en rpm si se detectan 500 pulsos de reloj entre dos cruces por cero consecutivos del codificador?
8. Establezca las ventajas de los motores de cd en aplicaciones de sistemas de control.
9. ¿Cuáles son las fuentes de las no linealidades en un motor de cd?
10. ¿Cuáles son los efectos de la inductancia y de la inercia en un motor de cd?
11. ¿Qué es la fuerza contraelectromotriz, y cómo afecta al desempeño de un sistema de control?
12. Cuáles son las constantes de tiempo eléctricas y mecánicas de un motor eléctrico?
13. ¿Bajo qué circunstancias la constante de par K_i de un motor de cd es válida, y cómo se relaciona con la constante de la fuerza contraelectromotriz K_b?
14. Para un sistema amplificador/motor de cd si el amplificador tiene características de saturación, ¿qué parámetros de desempeño limitan la saturación? (Remítase a la Fig. 4-52.)
15. Una carga inercial y de fricción están manejadas por un motor de cd con un par T_m. La ecuación dinámica del sistema es:

$$T_m(t) = J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + B_m\omega_m$$

Si la inercia se duplica, ¿cómo afectará a la velocidad en estado estable del motor? ¿Cómo se afectará la velocidad en estado estacionario si se duplica el coeficiente de fricción B_m? ¿Cuál es la constante mecánica del sistema?

16. ¿Qué es un tacómetro y cómo se emplea en sistemas de control?
17. ¿La técnica de linealización descrita en este capítulo produce siempre un sistema lineal e invariante con el tiempo?
18. Exprese la función de transferencia de un retardo puro T_d.

Referencias

Análisis en variable de estado de circuitos eléctricos

1. **B. C. KUO,** *Linear Circuits and Systems,* McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.

Sistemas mecánicos

2. **R. CANNON,** *Dynamics of Physical Systems,* McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.

Motores de cd

3. **B. C. KUO and J. TAL, eds.,** *Incremental Motion Control,* Vol. 1, *DC Motors and Control Systems,* SRL Publishing Co., Champaign, IL, 1979.

Fricción seca

4. **P. B. DAHL,** *A Solid Friction Model,* Report TOR-0158 (3107-18)-1, Aerospace Corporation, El Segundo, CA, May 1968.
5. **N. A. OSBORN and D. L. RITTENHOUSE,** "The Modeling of Friction and Its Effects on Fine Pointing Control," *AIAA Mechanics and Control of Flight Conference,* Paper 74-875, Aug. 1974.

Aproximación de Padé

6. **J. G. TRUXAL,** *Automatic Feedback Control System Synthesis,* McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.
7. **H. S. WALL,** *Continued Fractions,* Chapter 20, D. Van Nostrand Co., New York, 1948.

Amplificadores operacionales

8. **E. J. KENNEDY,** *Operational Amplifier Circuits,* Holt, Rinehart and Winston, Fort Worth, TX, 1988.
9. **J. V. WAIT, L. P. HUELSMAN, and G. A. KORN,** *Introduction to Operational Amplifier Theory and Applications,* 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1992.

Problemas

▲ Diagramas de estado, ecuaciones de estado, funciones de transferencia

4-1. Escriba las ecuaciones de fuerza de los sistemas lineales de traslación que se muestran en la Fig. 4P-1.

(a) Dibuje los diagramas de estado empleando el número mínimo de integradores. Escriba las ecuaciones de estado a partir de los diagramas de estado.

(b) Defina las variables de estado como sigue:

(i) $x_1 = y_2$, $x_2 = dy_2/dt$, $x_3 = y_1$, y $x_4 = dy_1/dt$

(ii) $x_1 = y_2$, $x_2 = y_1$, y $x_3 = dy_1/dt$

(iii) $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, y $x_3 = dy_2/dt$

Escriba las ecuaciones de estado y dibuje el diagrama de estado con estas variables de estado. Encuentre las funciones de transferencia $Y_1(s)/F(s)$ y $Y_2(s)/F(s)$.

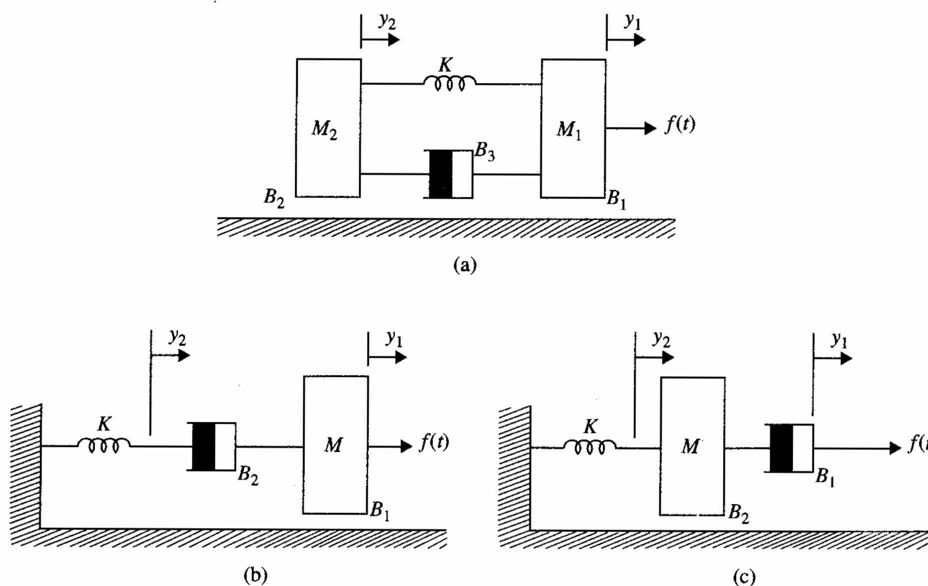


Figura 4P-1

▲ Ecuaciones de fuerza, diagramas de estado, ecuaciones de estado, funciones de transferencia

4-2. Escriba las ecuaciones de fuerza de los sistemas lineales de traslación mostrados en la Fig. 4P-2. Dibuje el diagrama de estado empleando el número mínimo de integradores. Escriba las ecuaciones de estado a partir del diagrama de estado. Encuentre las funciones de transferencia $Y_1(s)/F(s)$ y $Y_2(s)/F(s)$. Para las funciones de transferencia haga que $Mg = 0$.

▲ Sistemas de rotación, ecuaciones de par, ecuaciones de estado, funciones de transferencia

4-3. Escriba las ecuaciones de par de los sistemas de rotación mostrados en la Fig. 4P-3. Dibuje los diagramas de estado empleando el número mínimo de integradores. Escriba las ecuaciones de estado a partir de los diagramas de estado. Encuentre la función de transferencia $\Theta(s)/T(s)$

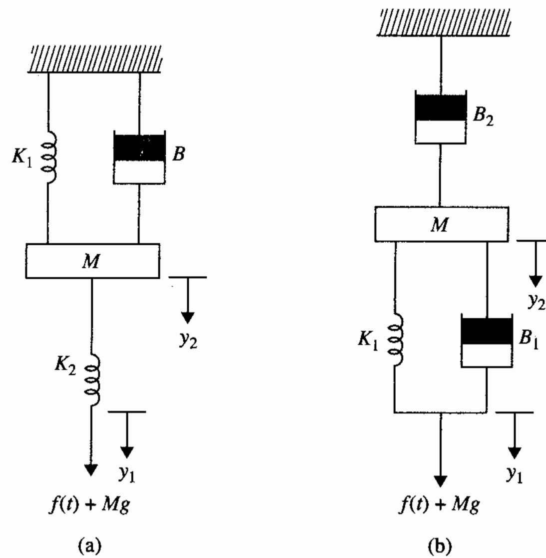


Figura 4P-2

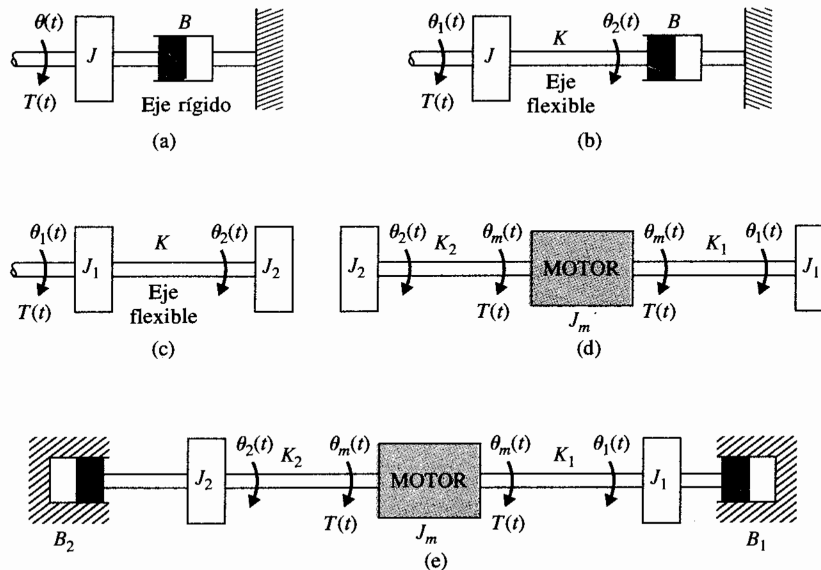


Figura 4P-3

para el sistema de la Fig. 4P-3(a). Encuentre las funciones de transferencia $\Theta_1(s)/T(s)$ y $\Theta_2(s)/T(s)$ para los sistemas de las partes (b), (c), (d) y (e).

▲ Sistema de control de un motor

4-4. Un sistema de control en lazo abierto de un motor se presenta en la Fig. 4P-4. El potenciómetro tiene un intervalo máximo de 10 vueltas (20π rad). Encuentre las funciones de transferencia

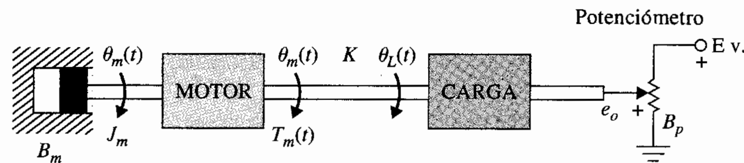


Figura 4P-4

$E_o(s)/T_m(s)$. Se definen los siguientes parámetros y variables: $\theta_m(t)$ es el desplazamiento del motor, $\theta_L(t)$ es el desplazamiento de la carga, $T_m(t)$ es el par del motor, J_m es la inercia del motor, B_m es el coeficiente de fricción viscosa del motor, B_p es el coeficiente de fricción viscosa del potenciómetro, $e_o(t)$ es el voltaje de salida, y K es la constante del resorte torsional.

▲ Sistema de tren de engranes

4-5. Escriba las ecuaciones del par del sistema de tren de engranes que se muestra en la Fig. 4P-5. Los momentos de inercia de los engranes son J_1, J_2, y J_3. $T_m(t)$ es el par aplicado; N_1, N_2, N_3, y N_4 son los números de dientes de los engranes. Suponga que los ejes son rígidos.

(a) Suponga que J_1, J_2, y J_3 son despreciables. Escriba las ecuaciones de par del sistema. Encuentre la inercia total que el motor ve.

(b) Repita la parte (a) con los momentos de inercia J_1, J_2, y J_3.

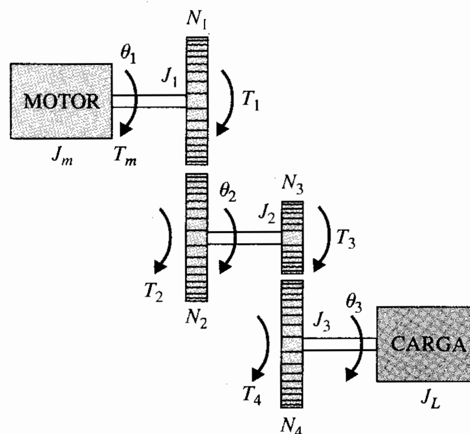


Figura 4P-5

▲ Sistema de remolque

4-6. Un vehículo que jala un remolque mediante un acoplamiento resorte-amortiguador se muestra en la Fig. 4P-6. Se definen los siguientes parámetros y variables: M es la masa del remolque, K_h la constante del resorte del acoplamiento, B_h es el coeficiente de fricción de amortiguación del acoplamiento, B_t es el coeficiente de fricción viscosa del remolque, $y_1(t)$ es el desplazamiento del vehículo remolcador, $y_2(t)$ es el desplazamiento del remolque, y $f(t)$ es la fuerza del vehículo remolcador.

(a) Escriba la ecuación diferencial del sistema.

(b) Escriba las ecuaciones de estado definiendo las siguientes variables de estado: $x_1(t) = y_1(t) - y_2(t)$ y $x_2(t) = dy_2(t)\ dt$.

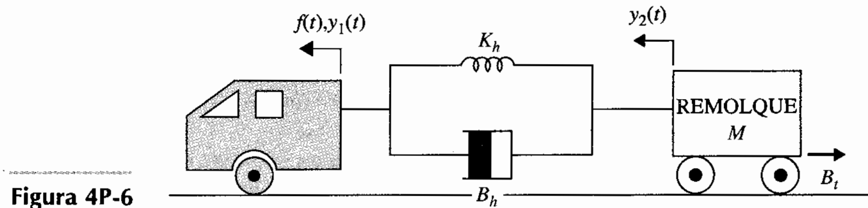


Figura 4P-6

▲ Sistema motor-carga

4-7. La Fig. 4P-7 muestra un sistema de motor-carga acoplado a través de un tren de engranes con una relación de engranes $n = N_1/N_2$. El par del motor es $T_m(t)$, y $T_L(t)$ representa el par de carga.

(a) Encuentre la relación de engranes óptima n^* tal que la aceleración de la carga $\alpha_L = d\theta_L/dt$ sea máxima.

(b) Repita la parte (a) cuando el par de carga es cero.

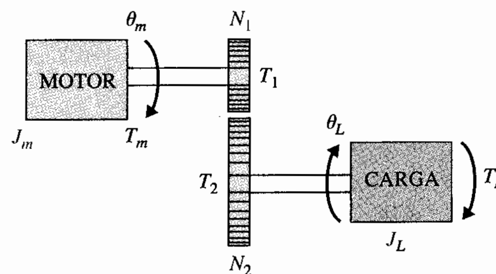
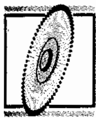


Figura 4P-7



▲ Sistema de control de una rueda de impresión (margarita)

4-8. La Fig. 4P-8 muestra el diagrama simplificado de un sistema de control de una rueda de impresión de un procesador de textos. La rueda de impresión está controlada por un motor de cd a través de bandas y poleas. Suponga que las bandas son rígidas. Se definen los siguientes parámetros y variables: $T_m(t)$ es el par del motor, $\theta_m(t)$ es el desplazamiento del motor, $y(t)$ es el desplazamiento lineal de la rueda de impresión, J_m es la inercia del motor, B_m es el coeficiente de fricción viscosa del motor, r es el radio de la polea, y M es la masa de la rueda de impresión.

(a) Escriba la ecuación diferencial del sistema.

(b) Encuentre la función de transferencia $Y(s)/T_m(s)$.

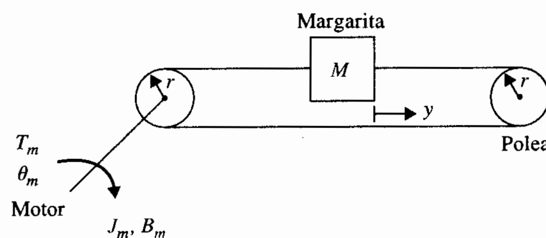
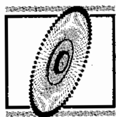


Figura 4P-8



▲ Sistema de control de una rueda de impresión

4-9. La Fig. 4P-9 muestra el diagrama de un sistema de rueda de impresión con bandas y poleas. Las bandas se modelan como resortes lineales con constantes de resorte K_1 y K_2.

(a) Encuentre las ecuaciones diferenciales del sistema empleando θ_m y y como las variables dependientes.

(b) Escriba las ecuaciones de estado empleando $x_1 = r\theta_m - y$, $x_2 = dy/dt$, y $x_3 = \omega_m = d\theta_m/dt$ como las variables de estado.

(c) Dibuje el diagrama de estado del sistema.

(d) Encuentre la función de transferencia $Y(s)/T_m(s)$.

(e) Encuentre la ecuación característica del sistema.

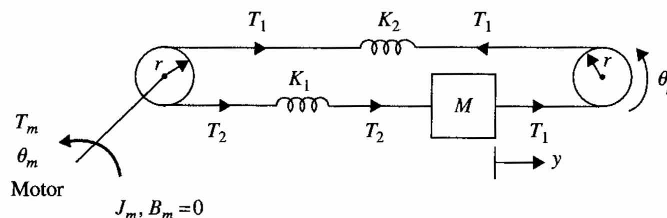


Figura 4P-9

▲ Sistema motor-carga

4-10. El diagrama esquemático de un sistema de motor-carga se presenta en la Fig. 4P-10. Se definen los siguientes parámetros y variables: $T_m(t)$ es el par del motor, $\omega_m(t)$ es la velocidad angular, $\theta_m(t)$ es el desplazamiento del motor, $\omega_L(t)$ es la velocidad de la carga, $\theta_L(t)$ es el desplazamiento de la carga, K es la constante del resorte torsional, J_m es la inercia del motor, B_m es el coeficiente de fricción viscosa del motor y B_L es el coeficiente de fricción viscosa de la carga.

(a) Escriba las ecuaciones de par del sistema.

(b) Encuentre las funciones de transferencia $\Theta_L(s)/T_m(s)$ y $\Theta_m(s)/T_m(s)$.

(c) Encuentre la ecuación característica del sistema.

(d) Sea $T_m(t) = T_m$ un par constante aplicado; muestre que $\omega_m = \omega_L$ constante en estado estable. Encuentre las velocidades en estado estable ω_m y ω_L.

(e) Repita la parte (d) cuando el valor de J_L se duplica pero J_m permanece igual.

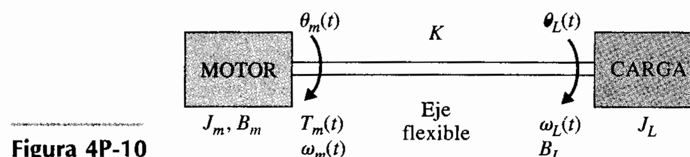


Figura 4P-10

▲ Sistema motor-tacómetro

4-11. El diagrama esquemático de un sistema de control que contiene un motor acoplado a un tacómetro y la una carga inercial se presenta en la Fig. 4P-11. Se definen los siguientes parámetros y variables: T_m es el par del motor, J_m es la inercia del motor, J_t es la inercia del

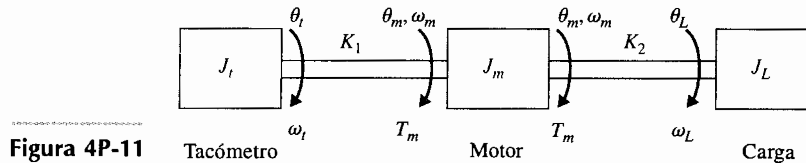


Figura 4P-11

tacómetro, J_L es la inercia de la carga, K_1 y K_2 son las constantes de resorte de los ejes, θ_t es el desplazamiento del tacómetro, θ_m es la velocidad del motor, θ_L es el desplazamiento de la carga, ω_t es la velocidad del tacómetro, ω_L es la velocidad de la carga, y B_m es el coeficiente de fricción viscosa del motor.

(a) Escriba las ecuaciones de estado del sistema empleando θ_L, ω_L, θ_t, ω_t, θ_m, y ω_m como las variables de estado (en el orden indicado). El par del motor T_m es la entrada.

(b) Dibuje el diagrama de estado con T_m a la izquierda y terminando con θ_L en la extrema derecha. El diagrama de estado debe tener un total de 10 nodos. No considere los estados iniciales.

(c) Encuentre las siguientes funciones de transferencia:

$$\frac{\Theta_L(s)}{T_m(s)} \qquad \frac{\Theta_t(s)}{T_m(s)} \qquad \frac{\Theta_m(s)}{T_m(s)}$$

(d) Encuentre la ecuación característica del sistema.

Sistema motor de cd

4-12. La ecuación del voltaje de un motor de cd se escribe como:

$$e_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + K_b \omega_m(t)$$

en donde $e_a(t)$ es el voltaje aplicado, $i_a(t)$ es la corriente de armadura, R_a es la resistencia de armadura, L_a es la inductancia de armadura, K_b es la constante de fuerza contraelectromotriz, $\omega_m(t)$ es la velocidad del motor, y $\omega_r(t)$ es la entrada de referencia de voltaje. Al tomar la

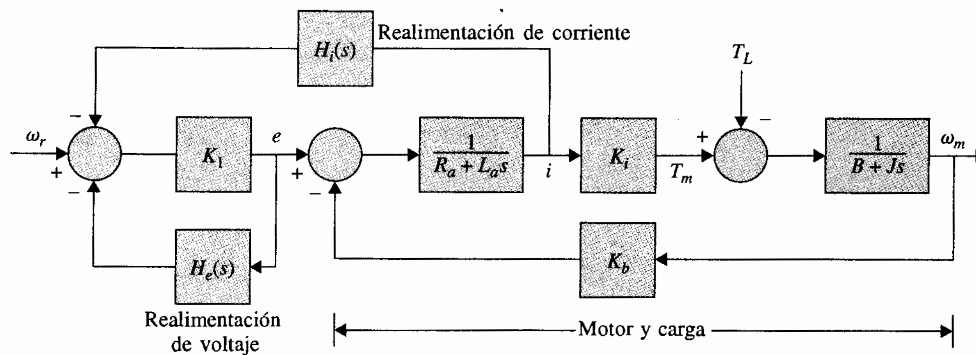


Figura 4P-12

transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación del voltaje considerando condiciones iniciales cero y al resolver para $\Omega_m(s)$, se obtiene:

$$\Omega_m(s) = \frac{E_a(s) - (R_a + L_a s)I_a(s)}{K_b}$$

lo cual muestra que la información de la velocidad se puede generar al realimentar el voltaje y la corriente de armadura. El diagrama de bloques de la Fig. 4P-12 muestra un sistema de motor de cd, con realimentación del voltaje y la corriente, para control de velocidad.

(a) Sea K_l la ganancia muy grande de un amplificador. Muestre que cuando $H_i(s)/H_e(s) = -(R_a + L_a s)$, la velocidad del motor $\omega_m(t)$ es totalmente independiente del par de carga-perturbación T_L.

(b)* Encuentre la función de transferencia entre $\Omega_m(s)$ y $\Omega_r(s)(T_L = 0)$ cuando $H_i(s)$ y $H_e(s)$ se seleccionan como en la parte (a).

▲ Control de altitud de un misil guiado

4-13. Este problema trata con el control de altitud de un misil guiado. Cuando viaja a través de la atmósfera, un misil encuentra fuerzas aerodinámicas que tienden a causar inestabilidad en la altitud del misil. La parte importante desde el punto de vista del control de vuelo es la fuerza lateral del aire, la cual tiende a causar que el misil gire alrededor de su centro de gravedad. Si la línea central del misil no está alineada con la dirección por la que el centro de gravedad C está viajando, como se muestra en la Fig. 4P-13, con ángulo θ, que es llamado el ángulo de ataque, se produce una fuerza lateral por el arrastre del aire a través del cual viaja el misil. La fuerza total F_a se puede considerar aplicada en el centro de presión P. Como se muestra en la Fig. 4P-13, esta fuerza lateral tiende a causar que el misil se desplome, especialmente si el punto P está frente al centro de gravedad C. La aceleración angular del misil con respecto al punto C, debida a la fuerza lateral, se denota como α_F. Normalmente, α_F, es directamente proporcional al ángulo de ataque θ y está dada por:

$$\alpha_F = \frac{K_F d}{J}\theta$$

en donde K_F es una constante que depende de parámetros como la presión dinámica, la velocidad del misil, la densidad del aire, etcétera, y

J = momento de inercia del misil en C
d_1 = distancia de C a P

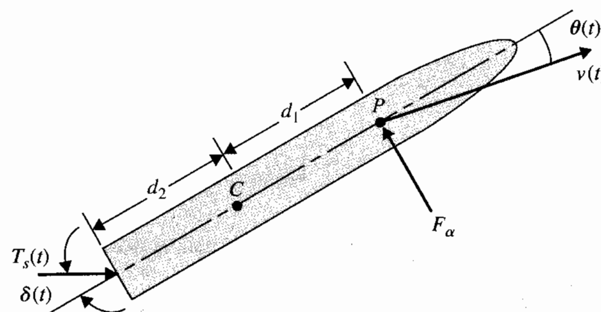


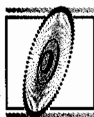
Figura 4P-13

El principal objetivo del control de vuelo es proveer la acción estabilizante para contrarrestar los efectos de la fuerza lateral. El control estándar implica el empleo de inyección de gas en la cola del misil para cambiar la dirección del empuje del motor del cohete T_s, como se muestra en la figura.

(a) Escriba las ecuaciones diferenciales del par para relacionar a T_s, δ, θ, y los parámetros del sistema. Suponga que δ es muy pequeña, por lo que seno $\delta(t)$ es aproximadamente igual a $\delta(t)$.

(b) Suponga que T_s es un par constante. Encuentre la función de transferencia $\Theta(s)/\Delta(s)$, en donde $\Theta(s)$ y $\Delta(s)$ son las transformadas de Laplace de $\theta(t)$ y $\delta(t)$, respectivamente. Suponga que $\delta(t)$ es muy pequeña.

(c) Repita las partes (a) y (b) con los puntos C y P intercambiados. La d_1 en expresión de α_F debe cambiarse a d_2.



▲ Sistema de control de una rueda de impresión

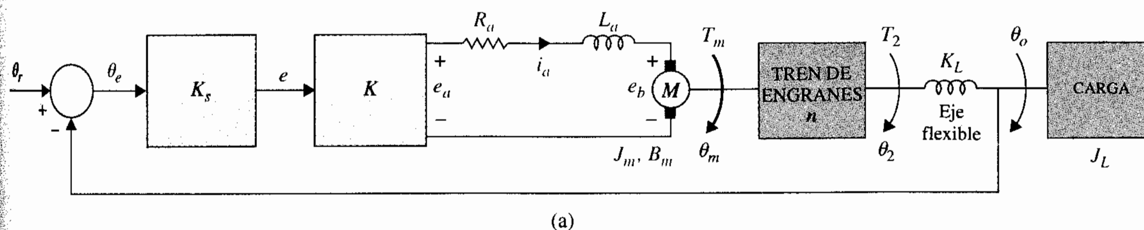
4-14. La Fig. 4P-14(a) muestra el diagrama de un sistema de control de un motor de cd para el control de la rueda de impresión descrita en la Fig. 1-3. La carga en este caso es la margarita, la cual está acoplada directamente al eje del motor. Se definen los parámetros y variables siguientes: K_s es la ganancia del detector de error (V/rad), K_i es la constante de par (oz-plg/A), K es la ganancia del amplificador (V/V), K_b es la constante de la fuerza contraelectromotriz (V/rad/s), n es la relación del tren de engranes $= \theta_2/\theta_m = T_m/T_2$, B_m es el coeficiente de fricción viscosa del motor (oz-plg-s), J_m es la inercia del motor (oz-plg-s²), K_L es la constante del resorte torsional del eje del motor, (oz-plg/rad), y J_L es la inercia de la carga (oz-plg-s²).

(a) Escriba las ecuaciones de causa y efecto del sistema. Rearregle estas ecuaciones en la forma de ecuaciones de estado con $x = \theta_o$, $x = \omega_o$, $x = \theta_m$, $x = \omega_m$, y $x = i_a$.

(b) Dibuje un diagrama de estado empleando los nodos que se muestran en la Fig. 4P-14(b).

(c) Obtenga la función de transferencia de la trayectoria directa (con la trayectoria de realimentación externa abierta): $G(s) = \Theta_o(s)/\Theta_e(s)$. Encuentre la función de transferencia de lazo cerrado $M(s) = \Theta_o(s)/\Theta_r(s)$.

(d) Repita la parte (c) cuando el eje del motor es rígido (*i.e.*, $K_L = \infty$). Muestre que se



(a)



(b)

Figura 4P-14

puede obtener la solución al tomar el límite de K_L cuando se aproxima a infinito en el resultado de la parte (c).

▲ Sistema de control amplificador/motor de cd

4-15. La Fig. 4P-15 muestra el diagrama de un sistema de amplificador/motor de cd con realimentación de corriente. El sistema se usa para el control de las superficies de control de un aeronave moderna. El amplificador tiene la característica de voltaje-saturación mostrada. Las curvas de par-velocidad del sistema se determinaron en forma experimental y se muestran en la figura. El voltaje de salida del amplificador se satura a 100 V (E_L = 100V).

(a) Determine la ecuación de la curva par-velocidad (sin saturación) del diagrama de bloques, en estado estacionario, mediante el empleo de la fórmula de ganancia de las gráficas de flujo de señal, con T_m como salida y E_{in} y Ω_m como entradas. En la Fig. 4P-15, Ω_m se muestra como una entrada a K_b, no como una realimentación de la salida del motor. Esto refleja cómo se condujo el experimento de la curva par-velocidad. Determine la pendiente de las curvas par-velocidad cuando la salida del amplificador está

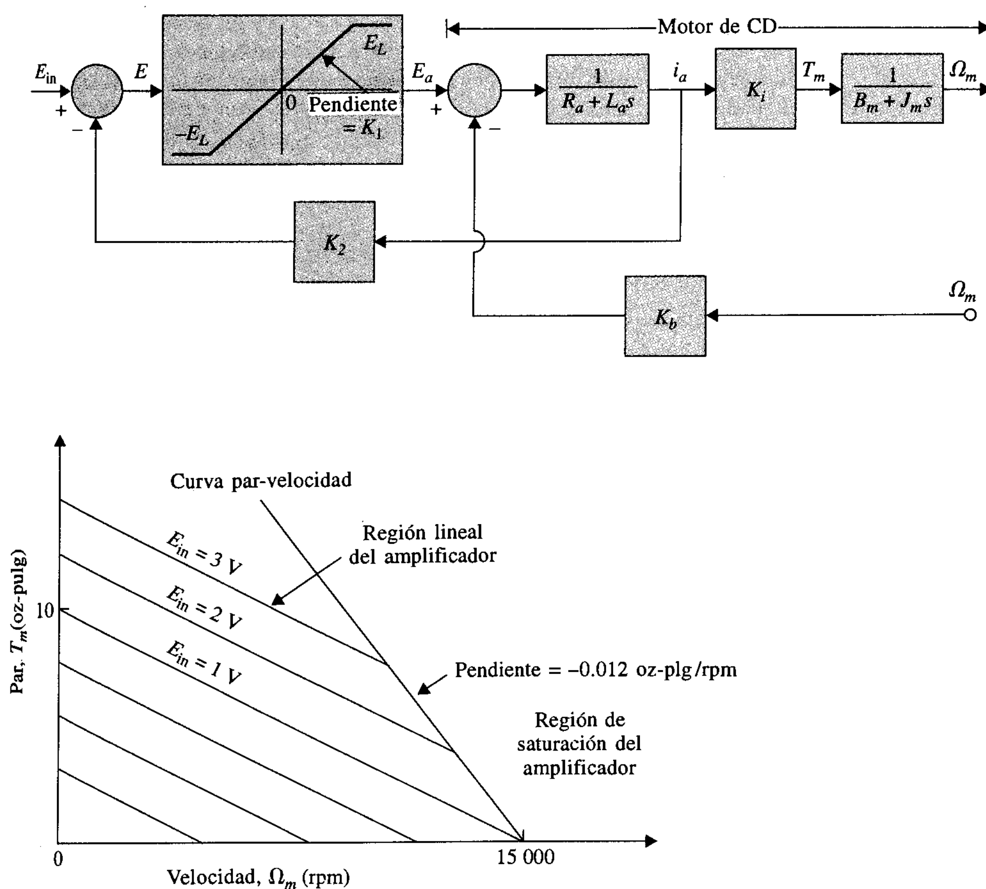


Figura 4P-15

saturada en $E_L = 100$ V. ¿Cuál es el efecto de la ganancia de realimentación de corriente K_2 sobre la curva par-velocidad? Observe que en el estado estable, todos los términos que están multiplicados por s en el diagrama de bloques son cero. Cuando el amplificador está saturado, su voltaje de salida es E_L volts, el voltaje de entrada E_{in} ya no importa, y la ganancia de realimentación de corriente K_2 tampoco es efectiva. La entrada efectiva del sistema es E_L.

(b) De la curva par-velocidad dada, encuentre lo siguiente.

(i) Para el motor:

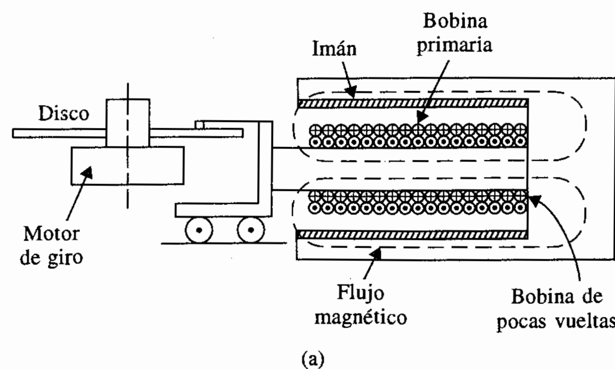
Constante del par K_i (oz-plg/A)
Constante de la fuerza contraelectromotriz K_b (V/rpm)
Resistencia de la armadura R_a (Ω)

(ii) Para el amplificador:

Ganancia directa del amplificador K_1 (V/V)
Ganancia de realimentación de corriente K_2 (V/V)

▲ Motor lineal

4-16. El diagrama esquemático de un motor lineal, que se emplea como un actuador lineal en un sistema de memoria en disco, se muestra en la Fig. 4P-16(a). El motor lineal consta de un imán permanente cilíndrico y una bobina. Cuando la corriente se envía a través de la bobina, el campo magnético del imán permanente interactúa con la corriente que lleva el conductor, causando que la bobina se mueva en forma lineal. La bobina del motor lineal de la Fig. 4P-16(a) consta de una bobina primaria y una bobina de pocas vueltas. Esta última está instalada con el propósito de reducir en forma efectiva la constante eléctrica del dispositivo. La Fig. 4P-16(b) muestra el circuito equivalente de las bobinas. Se definen los siguientes parámetros y variables: $e_a(t)$ es el voltaje aplicado a la bobina, $i_a(t)$ es la corriente de la bobina primaria, $i_s(t)$ es



(a)

(b)

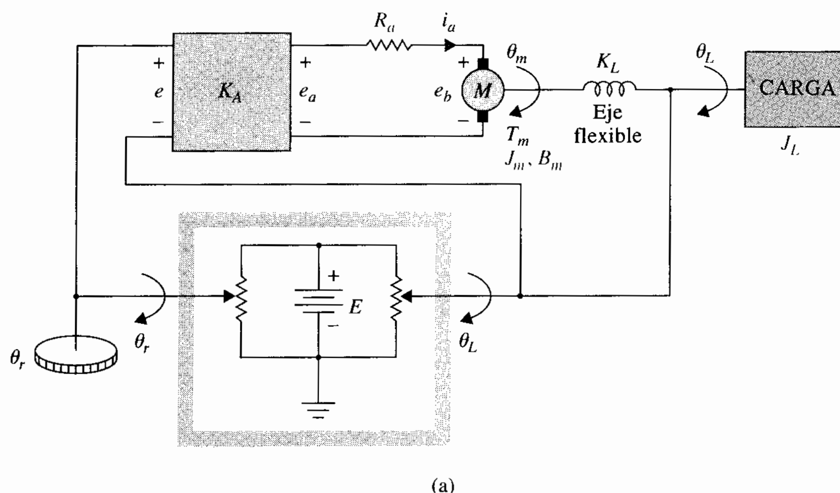
Figura 4P-16

la corriente en la bobina de pocas vueltas, R_a es la resistencia de la bobina primaria, L_a es la inductancia de la bobina primaria, L_{as} es la inductancia mutua entre las bobinas primaria y la de pocas vueltas, $v(t)$ es la velocidad de la bobina, $y(t)$ es el desplazamiento de la bobina, $f(t) = K_i v(t)$ es la fuerza de la bobina, K_i es la constante de la fuerza, K_b es la constante de la fuerza contraelectromotriz, $e_b(t) = K_b v(t)$ es la fuerza contraelectromotriz, M_T la masa total de la bobina y de la carga, y B_T es el coeficiente de fricción viscosa de la bobina y de la carga.

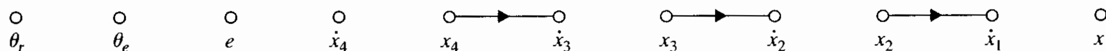
(a) Escriba las ecuaciones diferenciales del sistema.
(b) Dibuje un diagrama de bloques del sistema con $E_a(s)$, $I_a(s)$, $I_s(s)$, $V(s)$, y $Y(s)$ como variables.
(c) Obtenga la función de transferencia $Y(s)/E_a(s)$.

▲ Sistema de control de un motor de cd

4-17. Un sistema de control de posición de un motor de cd se muestra en la Fig. 4P-17(a). Se definen los siguientes parámetros y variables: e es el voltaje de error, e_r es la entrada de referencia, θ_L es la posición de carga, K_A es la ganancia del amplificador, e_a es el voltaje de entrada al motor, e_b es la fuerza contraelectromotriz, i_a es la corriente del motor, T_m es el par del motor, J_m es el momento de inercia del motor = 0.03 oz-plg-s², B_m es el coeficiente de fricción viscosa del motor = 10 oz-plg-s, K_L es la constante del resorte torsional = 50 000 oz-plg/rad, J_L es la inercia de la carga = 0.05 oz-plg-s², K_i es la constante del par del motor = 21 oz-plg/A, K_b es la constante de fuerza contraelectromotriz = 15.5 V/1000 rpm, K_s es la ga-



(a)



(b)

Figura 4P-17

nancia del detector de error = $E/2\pi$, E es el voltaje aplicado al detector de error = 2π volts, R_a es la resistencia del motor = 1.15 Ω, y $\theta_e = \theta_r - \theta_L$.

(a) Escriba las ecuaciones del sistema empleando las siguientes variables de estado: $x = \theta_L$, $x = d\theta_L/dt = \omega_L$, $x = \theta$, y $x = d\theta_m/dt = \omega_m$.

(b) Dibuje un diagrama de estado empleando los nodos mostrados en la Fig. 4P-17(b).

(c) Obtenga la función de transferencia de trayectoria directa $G(s) = \Theta_L(s)/\Theta_e(s)$ cuando la trayectoria de realimentación exterior desde θ_L está abierta. Encuentre los polos de $G(s)$.

(d) Obtenga la función de transferencia en lazo cerrado $M(s) = \Theta_L(s)\Theta_e(s)$. Encuentre los polos de $M(s)$ cuando K_A = 1.2738, y 5476. Localice estos polos en el plano s, y comente sobre el significado de estos valores de K_A.

▲ Control de temperatura de un sistema de flujo de aire

4-18. La Fig. 4P-18(a) muestra la configuración del control de temperatura de un sistema de flujo de aire. El recipiente de agua caliente provee el agua que fluye al intercambiador de calor para calentar el aire. El detector de temperatura mide la temperatura del aire T_{AO} y la envía para ser comparada con la temperatura de referencia T_r. El error de temperatura T_e se envía al controlador, el cual tiene la función de transferencia $G_c(s)$. La salida del controlador, $u(t)$, que es una señal eléctrica, se convierte en una señal neumática mediante un transductor. La salida del actuador controla el flujo de agua a través de la válvula de tres vías. La Fig. 4P-18(b) muestra el diagrama de bloques del sistema.

Se definen los siguientes parámetros y variables: dM_W es el flujo del fluido calefactor $= K_M u$, K_M = 0.054 kg/s/V, T_W es la temperatura del agua $= K_R dM_W$, K_R = 65°C/kg/s, y T_{AO} es la temperatura del aire de salida.

La ecuación de transferencia de calor entre el agua y el aire es:

$$\tau_c \frac{dT_{AO}}{dt} = T_w - T_{AO} \qquad \tau_c = 10 \text{ s.}$$

La ecuación del detector de temperatura es:

$$\tau_s \frac{dT_s}{dt} = T_{AO} - T_s \qquad \tau_s = 2 \text{ s.}$$

(a) Dibuje un diagrama de bloques que incluya todas la funciones de transferencia del sistema.

(b) Obtenga la función de transferencia $T_{AO}(s)/T_r(s)$ cuando $G_c(s) = 1$.



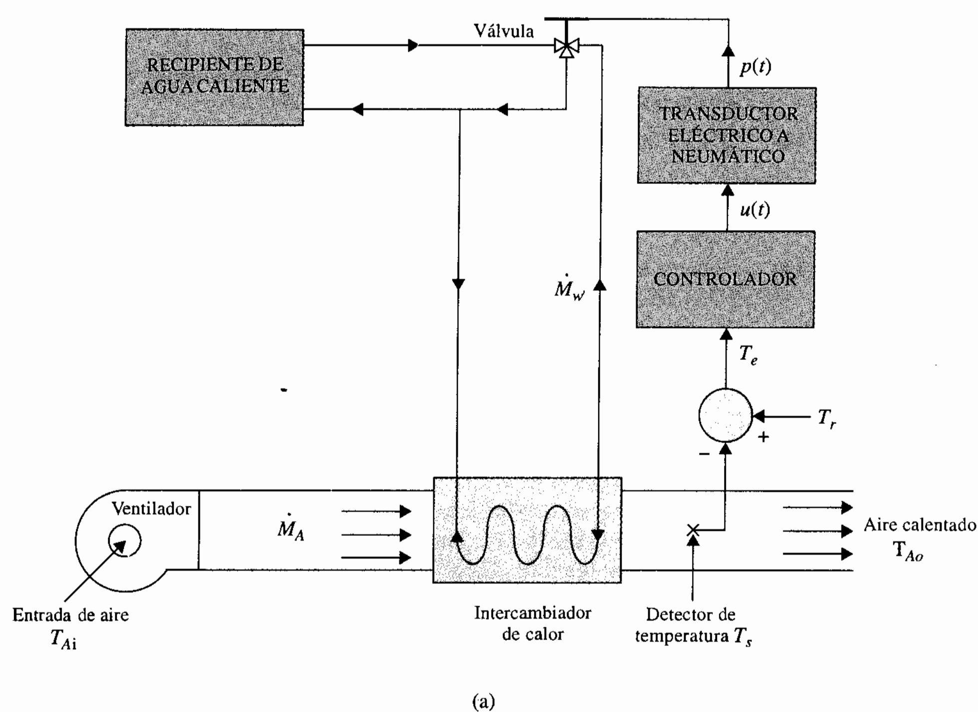
▲ Sistema de control de la velocidad en ralentí

4-19. El objetivo de este problema es desarrollar un modelo analítico del motor de un automóvil para el sistema de control de velocidad en ralentí que se muestra en la Fig. 1-2. La entrada al sistema es la posición del acelerador que controla el flujo de aire dentro del múltiple (véase la Fig. 4P-19). El par del motor se desarrolla a partir de la presión en el tubo múltiple debido a la admisión de aire y a la admisión de la mezcla aire-combustible dentro del cilindro. Las variables del motor son las siguientes:

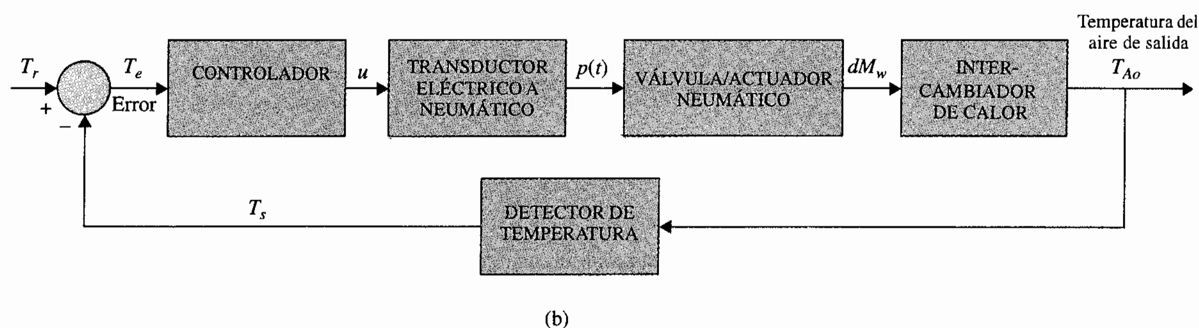
$q_i(t)$ = cantidad de flujo de aire a través del acelerador dentro del múltiple

$dq_i(t)/dt$ = flujo de aire a través del acelerador dentro del múltiple

$q_m(t)$ = promedio de la masa de aire dentro del múltiple



(a)



(b)

Figura 4P-18

$q_o(t)$ = cantidad de aire que abandona el múltiple de entrada a través de la válvula de admisión

$dq_o(t)/dt$ = flujo de aire que abandona el múltiple de entrada a través de la válvula de admisión

$T(t)$ = par del motor

T_d = par de perturbación debido al funcionamiento de accesorios del automóvil = constante

$\omega(t)$ = velocidad del motor

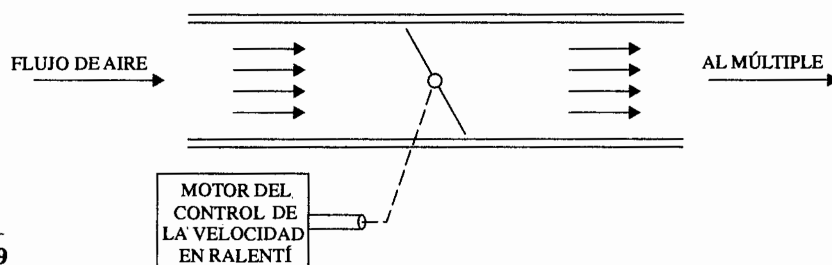


Figura 4P-19

$\alpha(t)$ = posición del acelerador
τ_D = retraso en el motor
J_e = inercia del motor

Se dan las siguientes suposiciones y relaciones matemáticas entre las variables del motor:

1. El flujo de aire dentro del múltiple es linealmente dependiente de la posición del acelerador:

$$\frac{dq_i(t)}{dt} = K_1\alpha(t) \qquad K_1 = \text{constante proporcional}$$

2. El flujo de aire que deja el múltiple depende linealmente de la masa de aire en el múltiple y de la velocidad del motor:

$$\frac{dq_o(t)}{dt} = K_2 q_m(t) + K_3\omega(t) \qquad K_2, K_3 = \text{constantes}$$

3. Un retraso puro de τ_D segundos existe entre el cambio en la masa de aire en el múltiple y el par del motor:

$$T(t) = K_4 q_m(t - \tau_D) \qquad K_4 = \text{constante}$$

4. El arrastre del motor se modela como un par de fricción viscosa $B\omega(t)$, en donde B es el coeficiente de fricción viscosa.
5. El promedio de masa de aire $q_m(t)$ se determina de:

$$q_m(t) = \int \left[\frac{dq_i(t)}{dt} - \frac{dq_o(t)}{dt}\right] dt$$

6. La ecuación que describe a los componentes mecánicos es:

$$T(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t) + T_d$$

(a) Dibuje un diagrama de bloques funcional del sistema con $\alpha(t)$ como entrada, $\omega(t)$ como salida y T_d como la entrada de perturbación. Muestre la función de transferencia de cada bloque.

(b) Encuentre la función de transferencia $\Omega(s)/\alpha(s)$ del sistema.

(c) Encuentre la ecuación característica y muestre que no es racional con coeficientes constantes.

(d) Aproxime el retardo del motor por:

$$e^{-\tau_D s} \cong \frac{1 - \tau_D s/2}{1 + \tau_D s/2}$$

y repita las partes (b) y (c).

▲ Control de anillo de fase cerrada

4-20. Los anillos de fase cerrada (Phase locked loop) son sistemas de control que se emplean para el control de velocidad de motores en forma precisa. Los elementos básicos de un sistema PLL incorporan un motor de cd como se muestra en la Fig. 4P-20(a). Un tren de pulsos de entrada representa la frecuencia de referencia o velocidad de salida deseada. El codificador digital produce pulsos digitales que representan la velocidad del motor. El detector de fase compara la velocidad del motor y la frecuencia de referencia y envía un voltaje de error al filtro (controlador) que gobierna la respuesta dinámica del sistema. La ganancia del detector de fase = K_p, la ganancia del codificador = K_e, la ganancia del contador = $1/N$, y la constante del par del motor de cd = K_i. Suponga para el motor inductancia cero y fricción cero.

(a) Obtenga la función de transferencia $E_c(s)/E(s)$ del filtro mostrada en la Fig. 4P-20(b). Suponga que el filtro ve una impedancia infinita en la salida e impedancia cero en la entrada.

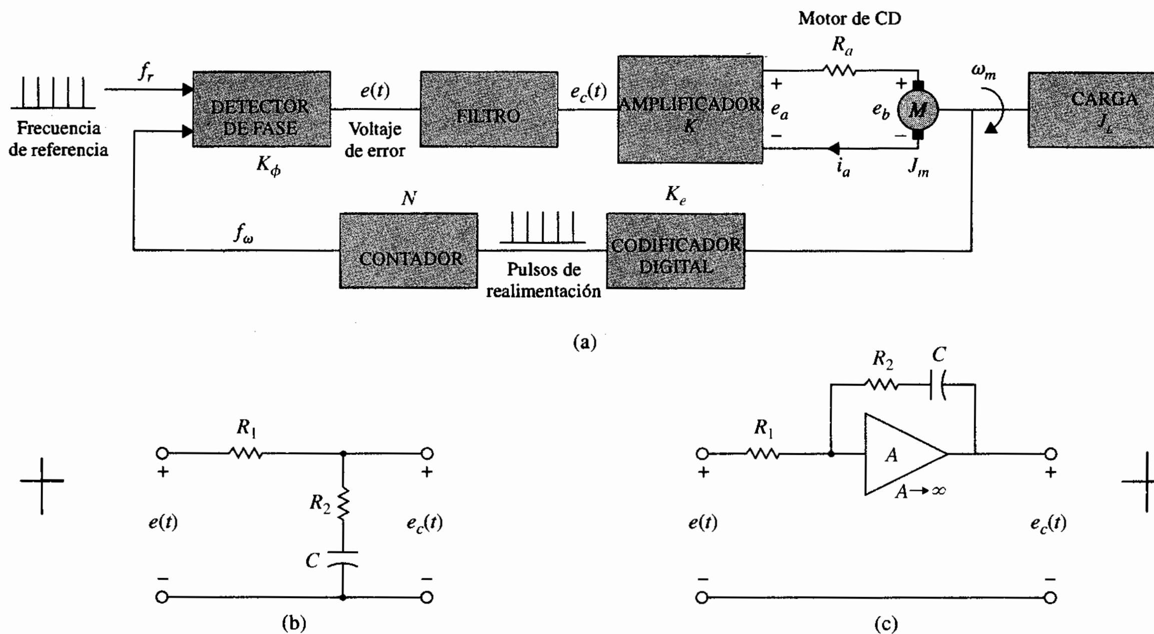


Figura 4P-20

(b) Dibuje un diagrama de bloques funcional del sistema con ganancias y funciones de transferencia en los bloques.

(c) Obtenga la función de transferencia de la trayectoria directa $\Omega_m(s)/E(s)$ cuando la trayectoria de realimentación está abierta.

(d) Encuentre la función de transferencia en lazo cerrado $\Omega_m(s)/F_r(s)$.

(e) Repita las partes (a), (c) y (d) para el filtro que se muestra en la Fig. 4P-20(c).

(f) El codificador digital tiene una salida de 36 pulsos por revolución. La frecuencia de referencia f_r está fija en 120 pulsos/segundo. Encuentre K_e en pulsos/rad. La idea de emplear el contador N es que con f_r fija, se pueden alcanzar varias velocidades de salida deseadas al cambiar el valor de N. Encuentre N si la velocidad deseada de salida es 200 rpm. Encuentre N si la velocidad de salida deseada es 1800 rpm.

▲ Control de brazo de robot

4-21. El modelo linealizado de un sistema de brazo de robot manejado por un motor de cd se muestra en la Fig. 4P-21. Los parámetros y variables del sistemas se definen como sigue:

MOTOR DE CD

▲ T_m = par del motor = $K_i i_a$
▲ K_i = constante del par
▲ i_a = corriente de armadura del motor
▲ J_m = inercia del motor
▲ B_m = coeficiente de fricción viscosa del motor
▲ θ_m = desplazamiento del eje del motor

BRAZO DE ROBOT

▲ J_L = inercia del brazo
▲ T_L = par de perturbación sobre el brazo
▲ θ_L = desplazamiento del brazo
▲ K = constante de resorte torsional
▲ B = coeficiente de fricción motor viscosa del eje entre el motor y el brazo
▲ B_L = coeficiente de fricción viscosa del eje del brazo del robot

(a) Escriba las ecuaciones diferenciales para el sistema con $i_a(t)$ y $T_L(t)$ como entrada y $\theta_m(t)$ y $\theta_L(t)$ como salidas.

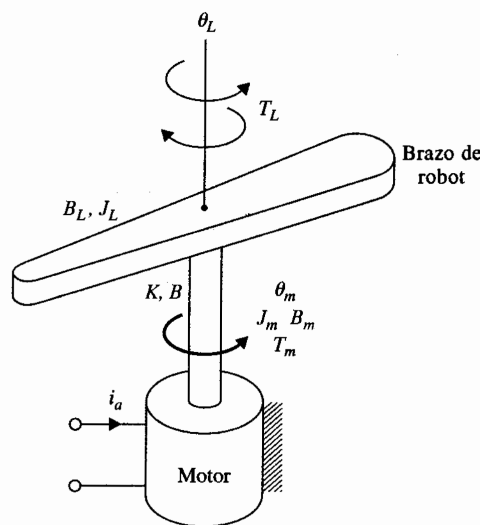


Figura 4P-21

(b) Dibuje el gráfico de flujo de señal empleando $i_a(s)$, $T_L(s)$, $\Theta_m(s)$, y $\Theta_L(s)$ como las variables de los nodos.

(c) Exprese las relaciones de función de transferencia como:

$$\begin{bmatrix} \Theta_m(s) \\ \Theta_L(s) \end{bmatrix} = \mathbf{G}(s) \begin{bmatrix} I_a(s) \\ -T_L(s) \end{bmatrix}$$

Encuentre $\mathbf{G}(s)$.

▲ Sistema de control de tren eléctrico

4-22. Las siguientes ecuaciones diferenciales describen el movimiento de un tren eléctrico en un sistema de tracción:

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$
$$\frac{dv(t)}{dt} = -k(v) - g(x) + f(t)$$

en donde:

$x(t)$ = desplazamiento lineal del tren
$v(t)$ = velocidad lineal del tren
$k(v)$ = fuerza de resistencia sobre el tren [función impar de v, con las propiedades de $k(0) = 0$ y $dk(v)/dv = 0$]
$g(x)$ = fuerza de gravedad para un riel sin inclinación o debida a la curvatura del riel
$f(t)$ = fuerza de tracción

El motor eléctrico que provee la fuerza de tracción está descrita por las siguientes ecuaciones:

$$e(t) = K_b\phi(t)v(t) + R_a i_a(t)$$
$$f(t) = K_i\phi(t)i_a(t)$$

en donde $e(t)$ es el voltaje aplicado, $i_a(t)$ es la corriente de armadura, $i_f(t)$ es la corriente de campo, R_a es la resistencia de armadura, $\phi(t)$ es el flujo magnético de un campo excitado en forma separada = $K_f i_f(t)$, y K_i es la constante de fuerza.

(a) Considere que el motor es un motor serie de cd con los embobinados de la armadura y el campo conectados en serie, de forma que $i_a(t) = i_f(t)$, $g(x) = 0$, $k(v) = Bv(t)$, y $R_a = 0$. Muestre que el sistema está descrito por las siguientes ecuaciones de estado no lineales:

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$
$$\frac{dv(t)}{dt} = -Bv(t) + \frac{K_i}{K_b K_f v^2(t)}e^2(t)$$

(b) Considere que para las condiciones establecidas en el inciso (a), $i_a(t)$ es la entrada del sistema [en lugar de $e(t)$]. Obtenga las ecuaciones de estado del sistema.

▲ Sist balanc escob

(c) Considere las mismas condiciones que en la parte (a), pero con $\phi(t)$ como la entrada. Obtenga las ecuaciones de estado.

Sistema de balanceo de una escoba

4-23. La Fig. 4P-23(a) muestra el sistema conocido por todos de "balanceo de la escoba". El objetivo del sistema de control es mantener la escoba en la posición vertical hacia arriba mediante una fuerza $u(t)$ aplicada al carro mostrado. En aplicaciones prácticas, el sistema es análogo al problema de control en una dimensión del balanceo de un monociclo o un misil inmediatamente después de su lanzamiento. El diagrama de cuerpo libre del sistema se muestra en la Fig. 4P-23(b), en donde:

f_x = fuerza en la base de la escoba en la dirección horizontal
f_y = fuerza en la base de la escoba en la direccióm vertical
M_b = masa de la escoba
g = aceleración de la gravedad
M_c = masa del carro
J_b = momento de inercia de la escoba alrededor del centro de gravedad CG = $M_b L^2/3$

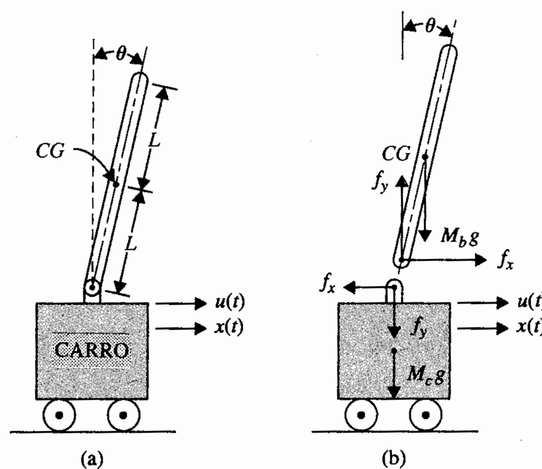
(a) Escriba las ecuaciones de fuerza en las direcciones x y y en el punto pivote de la escoba. Escriba las ecuaciones del par alrededor del centro de gravedad (CG) de la escoba. Escriba las ecuaciones de fuerza del carro en la dirección horizontal.

(b) Exprese las ecuaciones obtenidas en la parte (a) como ecuaciones de estado al asignar las variables de estado como $x_1 = \theta$, $x_2 = d\theta/dt$, $x_3 = x$, y $x_4 = dx/dt$. Simplifique estas ecuaciones para θ al hacer las aproximaciones: seno $\theta \cong \theta$ y cos $\theta \cong 1$.

(c) Obtenga un modelo en ecuaciones de estado linealizado en pequeña señal para el sistema de la forma:

$$\frac{d\,\Delta\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}^*\,\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^*\,\Delta\mathbf{r}(t)$$

en el punto de equilibrio $x_{01}(t) = 1$, $x_{02}(t) = 0$, $x_{03}(t) = 0$, y $x_{04}(t) = 0$.



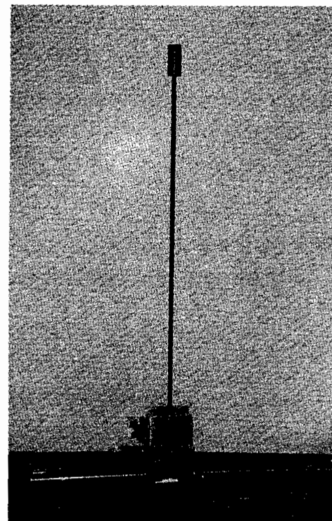


Figura 4P-23

▲ Sistema de control de suspensión de una esfera

4-24. La Fig. 4P-24 muestra el diagrama de un sistema de control de suspensión de una esfera. La esfera de acero está suspendida en el aire mediante una fuerza electromagnética generada por un electroimán. El objetivo del control es mantener la esfera de metal suspendida en un punto de equilibrio nominal al controlar la corriente en el imán con el voltaje $e(t)$. La aplicación práctica de este sistema es la levitación magnética de trenes o de cojinetes magnéticos en sistemas de control de alta precisión.

La resistencia de la bobina es R, y la inductancia es $L(y) = L/y(t)$, en donde L es una constante. El voltaje aplicado $e(t)$ es una constante con amplitud E.

(a) Sea E_{eq} el valor nominal de E. Encuentre los valores nominales de $y(t)$ y $dy(t)/dt$ en el equilibrio.

(b) Defina las variables de estado como $x_1(t) = i(t)$, $x_2(t) = y(t)$, y $x_3(t) = dy(t)/dt$. Encuentre las ecuaciones de estado no lineales en la forma:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, e)$$

(c) Linealice las ecuaciones de estado alrededor del punto de equilibrio y exprese las ecuaciones de estado linealizadas como:

$$\frac{d\,\Delta\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\,\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\Delta e(t)$$

La fuerza generada por el electroimán alrededor del punto de equilibrio es $Ki^2(t)/y(t)$, en donde K es una constante de proporcionalidad y la fuerza de gravedad sobre la bola de acero es Mg.

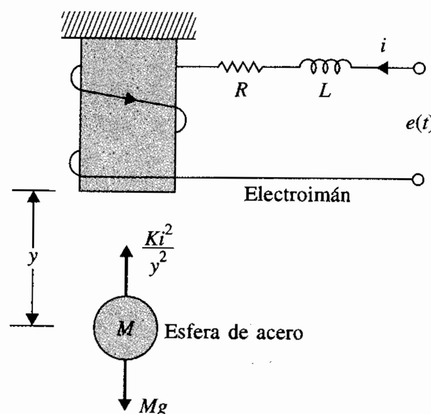


Figura 4P-24

▲ Sistema de control de suspensión de una esfera

4-25. La Fig. 4P-25(a) muestra el diagrama de un sistema de suspensión de una esfera. La esfera de acero está suspendida en el aire mediante la fuerza electromagnética generada por un electroimán. El objetivo del control es mantener la bola de metal suspendida en una posición nominal mediante el control de la corriente del electroimán. Cuando el sistema está en el punto de

▲ (pro de

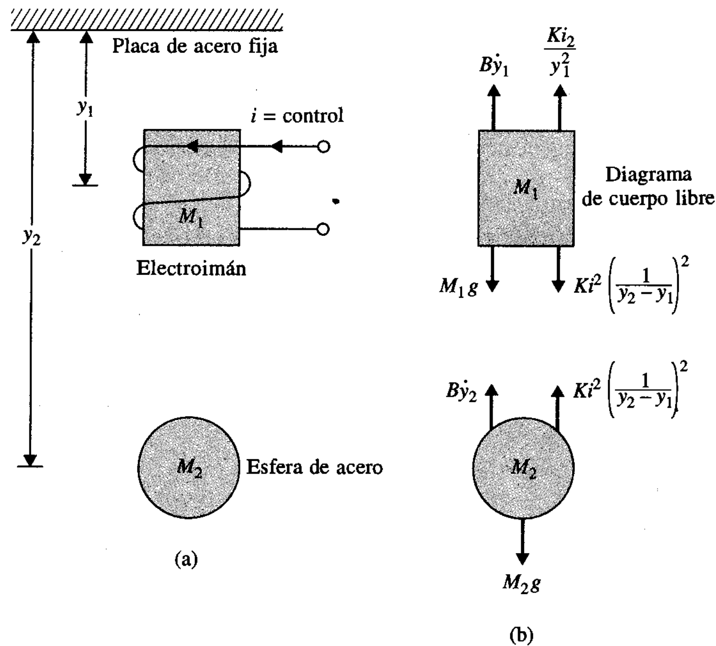


Figura 4P-25

equilibrio estable, cualquier perturbación de la posición de la bola de su posición de equilibrio flotante causará que el control regrese a la bola al punto de equilibrio. El diagrama de cuerpo libre del sistema se muestra en la Fig. 4P-25(b), en donde:

M_1 = masa del electroimán = 2.0
M_2 = masa de la esfera de acero = 1.0
B = coeficiente de fricción viscosa del aire = 0.1
K = constante de proporcionalidad del electroimán = 1.0
g = aceleración de la gravedad = 32.2

Suponga que todas las unidades son coherentes. Los valores del estado de equilibrio de la variable, $i(t)$, $y_1(t)$, y $y_2(t)$ son I, Y_1, y Y_2, respectivamente. Las variables de estado se definen como $x_1(t) = y_1(t)$, $x_2(t) = dy_1(t)/dt$, $x_3(t) = y_2(t)$, y $x_4(t) = dy_2(t)/dt$.

(a) Dado $Y_1 = 1$, encuentre I y Y_2.
(b) Escriba las ecuaciones de estado no lineales del sistema en la forma $d\mathbf{x}(t)/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}, i)$.
(c) Encuentre las ecuaciones de estado del sistema linealizado alrededor del estado de equilibrio I, Y_1, y Y_2 en la forma:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}^* \, \Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^* \, \Delta i(t)$$

▲ Control de un proceso de laminado de acero

4-26. El diagrama de un proceso de laminado de acero se muestra en la Fig. 4P-26. La placa de acero se alimenta a través de rodillos a una velocidad constante de V pies/s. La distancia entre los rodillos y el punto donde se mide el grosor es de d pies. El desplazamiento angular del motor, $\theta_m(t)$, se convierte a desplazamiento lineal $y(t)$ mediante una combinación de caja de

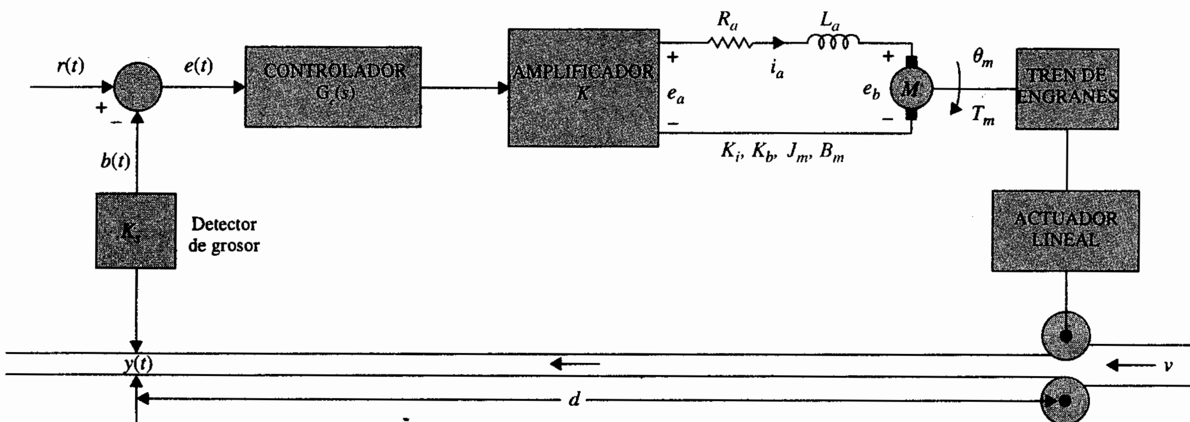


Figura 4P-26

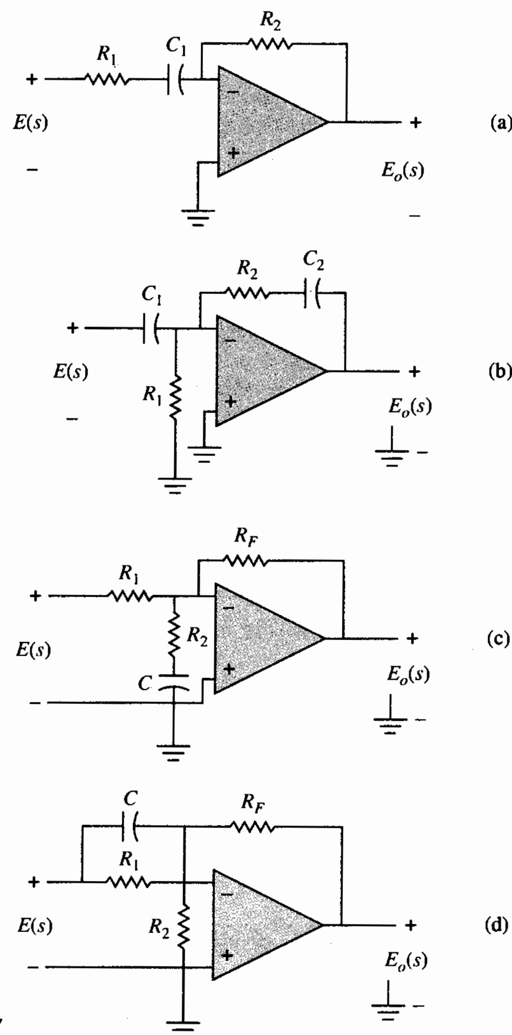


Figura 4P-27

▲ Cir amplif operac

engranes y un actuador lineal; $y(t) = n\theta_m(t)$, en donde n es una constante positiva en pies/rad. La inercia equivalente de la carga que se refleja en el eje del motor es J_L.

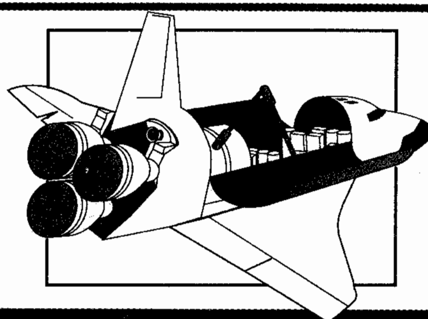
(a) Dibuje un diagrama de bloques funcional para el sistema.

(b) Obtenga la función de transferencia de la trayectoria directa $Y(s)/E(s)$ y la función de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/R(s)$.

▲ Circuitos de amplificador operacional

4-27. Encuentre las funciones de transferencia $E_o(s)/E(s)$ para los circuitos mostrados en la Fig. 4P-27.

5 Análisis en variables de estado



PALABRAS CLAVE Y TEMAS

- ▲ Variables de estado
- ▲ Diagrama de estado
- ▲ Matriz de transición de estado
- ▲ Ecuación de transición de estado
- ▲ Ecuación característica
- ▲ Valores característicos
- ▲ Vectores característicos
- ▲ Transformaciones de similitud
- ▲ Descomposición
- ▲ Controlabilidad
- ▲ Observabilidad

5-1 Introducción

En el Cap. 2 se presentaron los conceptos y la definición de las variables de estado y de las ecuaciones de estado, junto con varios ejemplos ilustrativos de cómo seleccionar las variables de estado y cómo escribir las ecuaciones de estado para sistemas dinámicos lineales y no lineales. En el Cap. 3, el método de la gráfica de flujo de señal se extendió al modelado de las ecuaciones de estado, dando como resultado el **diagrama de estado.** En contraste con el enfoque de la función de transferencia para el análisis y diseño de sistemas de control lineales, el método de las variables de estado se visualiza como moderno, ya que es la fuerza

fundamental del control óptimo. La característica básica de la formulación en variables de estado, es que los sistemas lineales y no lineales, los sistemas invariantes y variantes con el tiempo, y los sistemas de una variable y multivariable se pueden modelar en una forma unificada. Por otro lado, las funciones de transferencia se definen solamente para sistemas lineales e invariantes con el tiempo.

El objetivo de este capítulo es introducir los métodos básicos de las variables de estado y de las ecuaciones de estado, de tal forma que el lector pueda obtener un conocimiento del tema para estudios futuros cuando se utilice el enfoque en el espacio de estado para el diseño de sistemas de control moderno y óptimo. Específicamente, se presenta la solución en forma compacta de ecuaciones de estado lineales e invariantes con el tiempo. Se presentan varias transformaciones que se pueden utilizar para facilitar el análisis y diseño de sistemas de control lineal en el dominio de las variables de estado. Se establece la relación entre el enfoque convencional de la función de transferencia y el enfoque de las variables de estado, de tal forma que el analista sea capaz de investigar un problema con varios métodos alternativos. Finalmente, se definen la controlabilidad y la observabilidad de sistemas lineales y se investigan sus aplicaciones.

5-2 Representación matricial de las ecuaciones de estado

Las n ecuaciones de estado de un sistema dinámico de n-ésimo orden se representan como:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_p(t), w_1(t), w_2(t), \ldots, w_v(t)] \tag{5-1}$$

en donde $i = 1, 2, \ldots, n$. La i-ésima variable de estado se representa por $x_i(t)$; $r_j(t)$ denota la j-ésima entrada para $j = 1, 2, \ldots, p$; y $w_k(t)$ denota la k-ésima entrada de perturbación, con $k = 1, 2, \ldots, v$.

Sean las variables $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_q(t)$ las q variables de salida del sistema. En general, las variables de salida son funciones de las variables de estado y de las variables de entrada. Las **ecuaciones de salida** se pueden expresar como:

$$y_j(t) = g_j[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_p(t), w_1(t), w_2(t), \ldots, w_v(t)] \tag{5-2}$$

en donde $j = 1, 2, \ldots, q$.

El conjunto de las n ecuaciones de estado de la ecuación (5-1) y las q ecuaciones de salida de la ecuación (5-2) forman las **ecuaciones dinámicas.**

Por facilidad de expresión y manipulación, es conveniente representar las ecuaciones dinámicas en forma matricial. Se definen los siguientes vectores:

Vector de estado

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (n \times 1) \tag{5-3}$$

Vector de entrada

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix} \quad (p \times 1) \tag{5-4}$$

Vector de salida

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix} \quad (q \times 1) \tag{5-5}$$

Vector de perturbación

$$\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \vdots \\ w_v(t) \end{bmatrix} \quad (v \times 1) \tag{5-6}$$

Mediante la utilización de estos vectores, las n ecuaciones de estado de la ecuación (5-1) se pueden escribir como:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t)] \tag{5-7}$$

en donde **f** denota una matriz columna de $n \times 1$ que contiene las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ como elementos. En forma similar, las q ecuaciones de salida de la ecuación (5-2) se convierten en:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t)] \tag{5-8}$$

en donde **g** denota una matriz columna de $q \times 1$ que contiene las funciones $g_1, g_2, \ldots, g_q$ como elementos.

Para un sistema lineal invariante en el tiempo, las ecuaciones dinámicas se escriben como:

Ecuaciones de estado

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) + \mathbf{Ew}(t) \tag{5-9}$$

Ecuaciones de salida

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t) + \mathbf{Hw}(t) \tag{5-10}$$

en donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (n \times n) \tag{5-11}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \quad (n \times p) \tag{5-12}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \quad (q \times n) \tag{5-13}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qp} \end{bmatrix} \quad (q \times p) \tag{5-14}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1v} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nv} \end{bmatrix} \quad (n \times v) \tag{5-15}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1v} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{q1} & h_{q2} & \cdots & h_{qn} \end{bmatrix} \quad (q \times v) \tag{5-16}$$

5-3 Matriz de transición de estado

Una vez que las ecuaciones de estado de un sistema lineal e invariante con el tiempo están expresadas en la forma de la ecuación (5-9), el siguiente paso con frecuencia involucra resolver estas ecuaciones, dado el vector de estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$, el vector de entrada $\mathbf{u}(t)$, y el vector de perturbación $\mathbf{w}(t)$, para $t \geq t_0$. El primer término en el segundo miembro de la ecuación (5-9) se conoce como la parte homogénea de la ecuación de estado, y los dos últimos representan las funciones de excitación $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{w}(t)$.

La **matriz de transición de estado** se define como una matriz que satisface la ecuación de estado lineal homogénea:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{5-17}$$

Sea $\boldsymbol{\phi}(t)$ una matriz de $n \times n$ que representa la matriz de transición de estado; entonces debe satisfacer la ecuación:

$$\frac{d\boldsymbol{\phi}(t)}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\phi}(t) \tag{5-18}$$

Aún más, sea $\mathbf{x}(0)$ el estado inicial en $t = 0$; entonces $\boldsymbol{\phi}(t)$ también se define mediante la ecuación matricial:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)\mathbf{x}(0) \tag{5-19}$$

la cual es la solución de la ecuación de estado homogénea para $t \geq 0$.

Una manera de determinar $\boldsymbol{\phi}(t)$ es tomar la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (5-17); se tiene:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) \tag{5-20}$$

Al resolver la ecuación (5-20) para $\mathbf{X}(s)$, se obtiene:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) \qquad (5\text{-}21)$$

en donde se supone que la matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ es no singular. Tomando la transformada inversa de Laplace en ambos miembros de la ecuación (5-21), da:

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}(0) \qquad t \geq 0 \qquad (5\text{-}22)$$

Al comparar la ecuación (5-19) con la ecuación (5-22), la matriz de transición de estado se identifica como:

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \qquad (5\text{-}23)$$

Una forma alterna de resolver la ecuación de estado homogénea es suponer una solución, como en el método clásico de solución de ecuaciones diferenciales lineales. Si la solución de la ecuación (5-17) es:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \qquad (5\text{-}24)$$

para $t \geq 0$, donde $e^{\mathbf{A}t}$ representa la siguiente serie de potencias de la matriz $\mathbf{A}t$, y

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \cdots \qquad (5\text{-}25)$$

Es fácil demostrar que la ecuación (5-24) es una solución de la ecuación de estado homogénea, ya que de la ecuación (5-25):

$$\frac{de^{\mathbf{A}t}}{dt} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} \qquad (5\text{-}26)$$

Por tanto, además de la ecuación (5-23), se obtuvo otra expresión para la matriz de transición de estado:

$$\boldsymbol{\phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \cdots \qquad (5\text{-}27)$$

La ecuación (5-27) también se puede obtener directamente de la ecuación (5-23). Esto se deja como un ejercicio para el lector (problema 5-2).

5-3-1 Significado de la matriz de transición de estado

Debido a que la matriz de transición de estado satisface la ecuación de estado homogénea, representa la **respuesta libre** del sistema. En otras palabras, gobierna la respuesta que es debida a las condiciones iniciales solamente. De las ecuaciones (5-23) y (5-27), la matriz de transición de estado depende solamente de la matriz **A**, por lo que en ocasiones se conoce como la **matriz de transición de estado de A.** Como el nombre lo indica, la matriz de transición de estado $\phi(t)$ define por completo la transición de estado desde el tiempo inicial $t=0$ a cualquier tiempo t cuando las entradas son cero.

5-3-2 Propiedades de la matriz de transición de estado

La matriz de transición de estado $\phi(t)$ posee las siguientes propiedades:

1. $\phi(0) = \mathbf{I}$ (matriz de identidad) (5-28)

▲ ***Prueba*** La ecuación (5-28) sigue directamente de la ecuación (5-27) al hacer que $t=0$.

2. $\phi^{-1}(t) = \phi(-t)$ (5-29)

▲ ***Prueba*** Posmultiplicando ambos miembros de la ecuación (5-27) por $e^{-\mathbf{A}t}$, se obtiene:

$$\phi(t)e^{-\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t} = \mathbf{I} \tag{5-30}$$

Entonces, premultiplicando ambos miembros de la ecuación (5-30) por $\phi^{-1}(t)$, se obtiene:

$$e^{-\mathbf{A}t} = \phi^{-1}(t) \tag{5-31}$$

Por lo que:

$$\phi(-t) = \phi^{-1}(t) = e^{-\mathbf{A}t} \tag{5-32}$$

Un resultado interesante de esta propiedad de $\phi(t)$ es que la ecuación (5-24) se puede arreglar como:

$$\mathbf{x}(0) = \phi(-t)\mathbf{x}(t) \tag{5-33}$$

lo que significa que el proceso de transición de estado se puede considerar como bilateral en tiempo. Esto es, la transición en tiempo se puede dar en cualquier dirección.

3. $\phi(t_2 - t_1)\phi(t_1 - t_0) = \phi(t_2 - t_0)$ para cualquier t_0, t_1, t_2 (5-34)

▲ ***Prueba***

$$\begin{aligned}\phi(t_2 - t_1)\phi(t_1 - t_0) &= e^{\mathbf{A}(t_2-t_1)}e^{\mathbf{A}(t_1-t_0)}\\ &= e^{\mathbf{A}(t_2-t_0)} = \phi(t_2 - t_0)\end{aligned} \tag{5-35}$$

Esta propiedad de la matriz de transición de estado es importante, ya que implica que un proceso de transición de estados se puede dividir en un número de transiciones secuenciales. La Fig. 5-1 ilustra que la transición de $t = t_0$ a $t = t_2$ es igual a la transición de t_0 a t_1, y después de t_1 a t_2. En general, por supuesto, el proceso de transición de estado se puede dividir en cualquier número de partes.

4. $[\phi(t)]^k = \phi(kt)$ para k = entero positivo (5-36)

▲ ***Prueba***

$$\begin{aligned}[\phi(t)]^k &= e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}t}\cdots e^{\mathbf{A}t} \quad \text{(términos } k\text{)}\\ &= e^{k\mathbf{A}t} = \phi(kt)\end{aligned} \tag{5-37}$$

5-4 Ecuación de transición de estado

La ecuación de transición de estado *se define como la solución de una ecuación de estado lineal homogénea.* La ecuación de estado lineal invariante con el tiempo:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{w}(t) \tag{5-38}$$

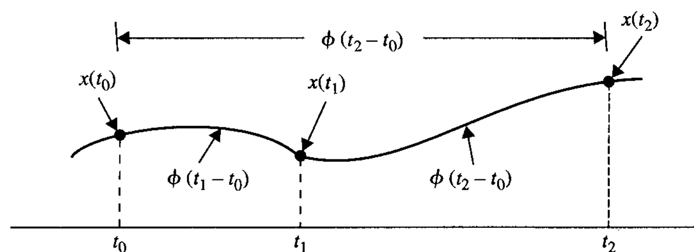


Figura 5-1 Propiedad de la matriz de transición de estado.

se puede resolver utilizando ya sea el método clásico de solución de ecuaciones diferenciales lineales, o el método de la transformada de Laplace. La solución de la transformada de Laplace se presenta a continuación.

Al tomar la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (5-38), se tiene:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BU}(s) + \mathbf{EW}(s) \tag{5-39}$$

en donde $\mathbf{x}(0)$ denota el vector de estado inicial evaluado en $t = 0$. Al resolver la ecuación (5-39) para $\mathbf{X}(s)$ se obtiene:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[\mathbf{BU}(s) + \mathbf{EW}(s)] \tag{5-40}$$

La ecuación de transición de estado de la ecuación (5-38) se obtiene tomando la transformada inversa de Laplace en ambos miembros de la ecuación (5-40):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathscr{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}(0) + \mathscr{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[\mathbf{BU}(s) + \mathbf{EW}(s)]\} \\ &= \boldsymbol{\phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\phi}(t-\tau)[\mathbf{Bu}(\tau) + \mathbf{Ew}(\tau)]\,d\tau \qquad t \geq 0\end{aligned} \tag{5-41}$$

La ecuación de transición de estado de la ecuación (5-41) es útil solamente cuando el tiempo inicial se define en $t = 0$. En el estudio de sistemas de control, especialmente en sistemas de control en tiempo discreto, casi siempre se desea descomponer un proceso de transición de estado en una secuencia de transiciones, de tal forma que se pueda escoger un tiempo inicial más flexible. Suponga que el tiempo inicial está representado por t_0 y que el estado inicial correspondiente por $\mathbf{x}(t_0)$, y suponga que la entrada $\mathbf{u}(t)$ y la perturbación $\mathbf{w}(t)$ se aplican en $t \geq 0$. Se empieza con la ecuación (5-41) al hacer que $t = t_0$, y resolviendo para $\mathbf{x}(0)$, se obtiene:

$$\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\phi}(-t_0)\mathbf{x}(t_0) - \boldsymbol{\phi}(-t_0)\int_0^{t_0} \boldsymbol{\phi}(t_0-\tau)[\mathbf{Bu}(\tau) + \mathbf{Ew}(\tau)]\,d\tau \tag{5-42}$$

en donde la propiedad de $\boldsymbol{\phi}(t)$ de la ecuación (5-29) ha sido aplicada.

Al sustituir la ecuación (5-42) en la ecuación (5-41) da:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) = {} & \boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{\phi}(-t_0)\mathbf{x}(t_0) - \boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{\phi}(-t_0)\int_0^{t_0} \boldsymbol{\phi}(t_0-\tau)[\mathbf{Bu}(\tau) + \mathbf{Ew}(\tau)]\,d\tau \\ & + \int_0^t \boldsymbol{\phi}(t-\tau)[\mathbf{Bu}(\tau) + \mathbf{Ew}(\tau)]\,d\tau\end{aligned} \tag{5-43}$$

Ahora, al utilizar la propiedad de la ecuación (5-34) y al combinar las dos últimas integrales, la ecuación (5-43) se convierte en:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\phi}(t-\tau)[\mathbf{Bu}(\tau) + \mathbf{Ew}(\tau)]\,d\tau \qquad t \geq t_0 \tag{5-44}$$

Es claro que la ecuación (5-44) retrocede a la ecuación (5-41) cuando $t_0 = 0$.

Ejemp
5-1

Una vez que se determina la ecuación de transición de estado, el vector de salida se puede expresar como una función del estado inicial y del vector de entrada simplemente al sustituir $\mathbf{x}(t)$ de la ecuación (5-44) en la ecuación (5-10). Por lo que el vector de salida es:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\boldsymbol{\phi}(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{C}\boldsymbol{\phi}(t-\tau)[\mathbf{Bu}(\tau) + \mathbf{Ew}(\tau)]\,d\tau + \mathbf{Du}(t) + \mathbf{Hw}(t) \qquad t \geq t_0 \tag{5-45}$$

Los siguientes ejemplos ilustran la forma de determinar la matriz y la ecuación de transición de estado.

Ejemplo 5-1

Considere la ecuación de estado:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{5-46}$$

El problema es determinar la matriz de transición de estado $\boldsymbol{\phi}(t)$ y el vector de estado $\mathbf{x}(t)$ para $t \geq 0$ en donde la entrada es $u(t) = 1$ para $t \geq 0$. Los coeficientes de las matrices se identifican como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = 0 \tag{5-47}$$

Por lo tanto:

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} \tag{5-48}$$

La matriz inversa de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ es:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \tag{5-49}$$

La matriz de transición de estado de $\mathbf{A}$ se encuentra tomando la transformada inversa de Laplace de la ecuación (5-49), por lo que:

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \mathscr{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \tag{5-50}$$

La ecuación de transición de estado para $t \geq 0$ se obtiene sustituyendo la ecuación (5-50), **B** y $u(t)$ en la ecuación (5-41). Se tiene:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0)$$
$$= \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \qquad (5\text{-}51)$$

o

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) + \begin{bmatrix} 0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \qquad t \geq 0 \qquad (5\text{-}52)$$

Como una alternativa, el segundo término de la ecuación de transición de estado se puede obtener tomando la transformada inversa de Laplace de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)$. Por lo que se obtiene:

$$\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\mathbf{B}U(s) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 3s + 2}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{s}\right)$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 3s + 2}\begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \qquad t \geq 0 \qquad (5\text{-}53)$$

▲

5-4-1 Ecuación de transición de estado a determinada del diagrama de estado

Las ecuaciones (5-40) y (5-41) muestran que el método de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones de estado requiere obtener la matriz inversa de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Ahora se mostrará que el diagrama de estado descrito en el Cap. 3 y la fórmula de ganancia de la SFG se pueden emplear para resolver la ecuación de transición de estado en el dominio de Laplace de la ecuación (5-40). Sea el tiempo inicial t_0; entonces la ecuación (5-40) se escribe como:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(t_0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{E}\mathbf{W}(s)] \qquad t \geq t_0 \qquad (5\text{-}54)$$

La última ecuación se puede escribir directamente a partir del diagrama de estado utilizando la fórmula de ganancia con $X_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, como los nodos de entrada. El siguiente ejemplo ilustra el método del diagrama de estado para encontrar las ecuaciones de transición de estado para el sistema descrito en el ejemplo 5-1.

Ejemplo 5-2

El diagrama de estado para el sistema descrito en la ecuación (5-46) se muestra en la Fig. 5-2 con t_0 como el tiempo inicial. Las salidas de los integradores se asignan como las variables de estado. Al aplicar la fórmula de ganancia al diagrama de estado de la Fig. 5-2, con $X_1(s)$ y $X_2(s)$ como nodos de salida, y $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$ y $U(s)$ como nodos de entrada, se tiene:

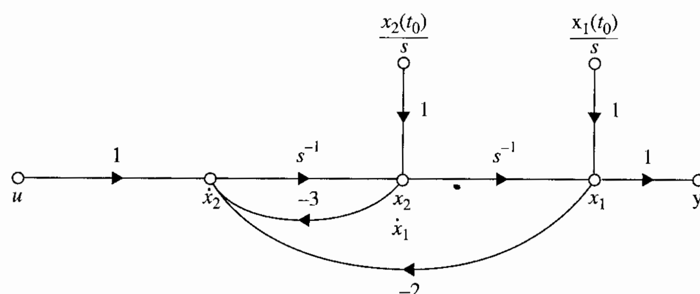


Figura 5-2 Diagrama de estado para la ecuación (5-46).

$$X_1(s) = \frac{s^{-1}(1 + 3s^{-1})}{\Delta} x_1(t_0) + \frac{s^{-2}}{\Delta} x_2(t_0) + \frac{s^{-2}}{\Delta} U(s) \tag{5-55}$$

$$X_2(s) = \frac{-2s^{-2}}{\Delta} x_1(t_0) + \frac{s^{-1}}{\Delta} x_2(t_0) + \frac{s^{-1}}{\Delta} U(s) \tag{5-56}$$

en donde:

$$\Delta = 1 + 3s^{-1} + 2s^{-2} \tag{5-57}$$

Después de simplificar, las ecuaciones (5-55) y (5-56) se presentan en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} U(s) \tag{5-58}$$

La ecuación de transición de estado para $t \geq t_0$ se obtiene tomando la transformada inversa de Laplace en ambos miembros de la ecuación (5-58).

Considere que la entrada $u(t)$ es una función de escalón unitario aplicada en $t = t_0$. Entonces se identifican las siguientes relaciones de la transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = u_s(t - t_0) \qquad t \geq t_0 \tag{5-59}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+a}\right) = e^{-a(t-t_0)} u_s(t - t_0) \qquad t \geq t_0 \tag{5-60}$$

Ya que el tiempo inicial se define como t_0, las expresiones de la transformada de Laplace aquí no tienen el factor de retardo $e^{-t_0 s}$. La transformada inversa de Laplace de la ecuación (5-58) es:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-(t-t_0)} - e^{-2(t-t_0)} & e^{-(t-t_0)} - e^{-2(t-t_0)} \\ -2e^{-(t-t_0)} + 2e^{-2(t-t_0)} & -e^{(t-t_0)} + 2e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5u_s(t-t_0) - e^{-(t-t_0)} + 0.5e^{-2(t-t_0)} \\ e^{-(t-t_0)} - e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix} \quad t \geq t_0 \tag{5-61}$$

El lector deberá comparar este resultado con el de la ecuación (5-52), que se obtiene para $t \geq 0$. ▲

Ejemplo 5-3

En este ejemplo se ilustra la utilización del método de la transición de estado a un sistema con entradas discontinuas. En la Fig. 5-3 se muestra un circuito *RL*. La historia del circuito está especificada completamente por la corriente inicial en la inductancia, $i(0)$ en $t = 0$. Considere que en $t = 0$, el voltaje mostrado en la Fig. 5-4 se aplica al circuito. La ecuación de estado del circuito para $t > 0$ es:

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{L}e_{\text{in}}(t) \tag{5-62}$$

Al comparar la última ecuación con la ecuación (5-9), los coeficientes escalares de la ecuación de estado se identifican como:

$$A = -\frac{R}{L} \qquad B = \frac{1}{L} \qquad E = 0 \tag{5-63}$$

La matriz de transición de estado es:

$$\phi(t) = e^{-At} = e^{-Rt/L} \tag{5-64}$$

El enfoque convencional para la solución de $i(t)$ para $t \geq 0$ consiste en expresar el voltaje de entrada como:

$$e(t) = E_{\text{in}}u_s(t) + E_{\text{in}}u_s(t - t_1) \tag{5-65}$$

en donde $u_s(t)$ es la función de escalón unitario. La transformada de Laplace de $e(t)$ es:

$$E_{\text{in}}(s) = \frac{E_{\text{in}}}{s}(1 + e^{-t_1 s}) \tag{5-66}$$

Entonces:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) = \frac{E_{\text{in}}}{Ls(s + R/L)}(1 + e^{-t_1 s}) \tag{5-67}$$

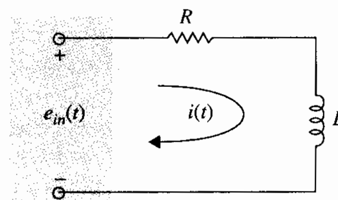


Figura 5-3 Circuito *RL*.

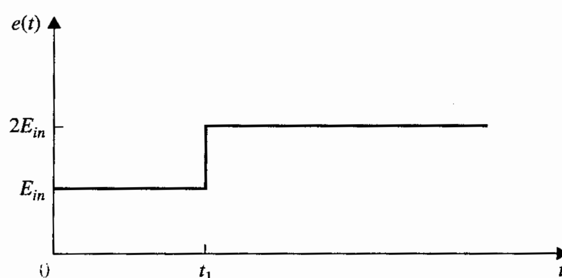


Figura 5-4 Forma de onda del voltaje de entrada para el circuito de la Fig. 5-3.

Al sustituir la ecuación (5-67) en la ecuación (5-41), la ecuación de transición de estado, la corriente para $t \geq 0$ se obtiene como:

$$i(t) = e^{-Rt/L}i(0)u_s(t) + \frac{E_{in}}{R}(1 - e^{-Rt/L})u_s(t) + \frac{E_{in}}{R}(1 - e^{-R(t-t_1)/L})u_s(t - t_1) \qquad (5\text{-}68)$$

Al utilizar el enfoque de transición de estado, el periodo de transición se puede dividir en dos partes: $t = 0$ a $t = t_1$, y $t = t_1$ a $t = \infty$. Primero, para el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq t_1$, la entrada es:

$$e(t) = E_{in}u_s(t) \qquad 0 \leq t < t_1 \qquad (5\text{-}69)$$

Entonces:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) = \frac{E_{in}}{Ls(s + R/L)} = \frac{E_{in}}{Rs[1 + (L/R)s]} \qquad (5\text{-}70)$$

Por lo que la ecuación de transición de estado para el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq t_1$ es:

$$i(t) = \left[e^{-Rt/L}i(0) + \frac{E_{in}}{R}(1 - e^{-Rt/L})\right]u_s(t) \qquad (5\text{-}71)$$

Al sustituir $t = t_1$ en la ecuación (5-71), se obtiene:

$$i(t_1) = e^{-Rt_1/L}i(0) + \frac{E_{in}}{R}(1 - e^{-Rt_1/L}) \qquad (5\text{-}72)$$

El valor de $i(t)$ en $t = t_1$ se utiliza ahora como el estado inicial para el siguiente periodo de transición de $t_1 \leq t < \infty$. La amplitud de la entrada para el intervalo es $2E_{in}$. La ecuación de tránsición de estado para el segundo periodo de transición es:

$$i(t) = e^{-R(t-t_1)/L}i(t_1) + \frac{2E_{in}}{R}(1 - e^{-R(t-t_1)/L}) \qquad t \geq t_1 \qquad (5\text{-}73)$$

en donde $i(t_1)$ está dada por la ecuación (5-72).

Este ejemplo ilustra dos maneras posibles de resolver un problema de transición de estado. En el primer enfoque, la transición se trata como un proceso continuo, mientras que en el segundo, el periodo

de transición se divide en partes en las que la entrada se puede presentar más fácilmente. Aun cuando el primer enfoque requiere solamente de una operación, el segundo método implica resultados relativamente simples para la ecuación de transición de estado, y con frecuencia presenta ventajas computacionales. Observe que en el segundo método, el estado en $t = t_1$ se emplea como el estado inicial para el siguiente periodo de transición, que comienza en t_1. ▲

5-5 Relación entre las ecuaciones de estado y las ecuaciones diferenciales de orden superior

En las secciones anteriores se definieron las ecuaciones de estado y sus soluciones para sistemas lineales e invariante con el tiempo. Aunque normalmente es posible escribir las ecuaciones de estado directamente del diagrama esquemático del sistema, en la práctica, el sistema se puede describir mediante una ecuación diferencial de orden superior o función de transferencia. Se vuelve necesario investigar cómo se pueden escribir las ecuaciones de estado directamente a partir de una ecuación diferencial de orden superior o de una función de transferencia. En el Cap. 2, se ilustró cómo se definen, en forma intuitiva, las variables de estado de una ecuación diferencial de n-ésimo orden de la ecuación (2-6) en la ecuación (2-12). Los resultados son las n ecuaciones de estado de la ecuación (2-13).

Las ecuaciones de estado se escriben en forma matricial como:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \tag{5-74}$$

en donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (n \times n) \tag{5-75}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (n \times 1) \tag{5-76}$$

Observe que los dos últimos renglones de **A** contienen los valores negativos de los coeficientes de la parte homogénea de la ecuación diferencial en orden ascendente, excepto para el coeficiente del término de mayor orden, el cual es la unidad. **B** es la matriz columna con el último renglón igual a 1, y el resto de los elementos son cero. Las ecuaciones de estado en la ecuación (5-74) con **A** y **B** dadas en las ecuaciones (5-75) y (5-76) se conocen como la **forma canónica en variables de fase (FCVF),** o la **forma canónica controlable (FCC).**

La ecuación de salida del sistema se escribe como:

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = x_1(t) \tag{5-77}$$

en donde:

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \tag{5-78}$$

Anteriormente se demostró que las variables de estado de un sistema dado no son únicas. En general, se busca la forma más conveniente de asignar las variables de estado, siempre y cuando se satisfaga la definición de las variables de estado. Desafortunadamente, no existe un modo intuitivo de definir las variables de estado para la generalidad de las ecuaciones diferenciales de n-ésimo orden dadas en la ecuación (3-3), que difieren de la ecuación (2-6) porque tienen derivadas de la entrada en el lado derecho de la ecuación. Sin embargo, en la Sec. 5-9, se muestra que escribiendo primeramente la función de transferencia y dibujando luego el diagrama de estado del sistema, mediante descomposición de la función de transferencia, las variables de estado y las ecuaciones de estado de cualquier sistema se pueden encontrar muy fácilmente. El siguiente ejemplo tiene el propósito de revisar el método descrito en las ecuaciones (2 -12) y (2-13) y siguientes.

émplo 4

Considere la ecuación diferencial:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 5\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t) \tag{5-79}$$

Rearreglando la última ecuación de tal forma que la derivada de mayor orden se iguale al resto de los términos, se tiene:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} = -5\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) + u(t) \tag{5-80}$$

Las variables de estado se definen como:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \frac{dy(t)}{dt} \\ x_3(t) &= \frac{d^2y(t)}{dt^2} \end{aligned} \tag{5-81}$$

Entonces, las ecuaciones de estado se representan mediante la ecuación matricial:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \tag{5-82}$$

en donde $\mathbf{x}(t)$ es el vector de estado de 2 × 1, $u(t)$ es la entrada escalar, y:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5-83}$$

La ecuación de salida es:

$$y(t) = x_1(t) = [1 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x}(t) \tag{5-84}$$

▲

5-6 Relación entre las ecuaciones de estado y las funciones de transferencia

Se han presentado los métodos para modelar un sistema lineal e invariante con el tiempo mediante funciones de transferencia y ecuaciones dinámicas. Es interesante investigar la relación entre estas dos representaciones.

En la ecuación (3-5) la función de transferencia de un sistema lineal con una entrada y una salida se define en términos de los coeficientes de la ecuación diferencial del sistema. En forma similar, la ecuación (3-11) proporciona la relación de la matriz de funciones de transferencia para un sistema multivariable que tiene p entradas y q salidas. Ahora se investiga la relación de la matriz de funciones de transferencia utilizando la notación de la ecuación dinámica.

Considere que un sistema lineal invariante en el tiempo se describe por ecuaciones dinámicas:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{w}(t) \tag{5-85}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}\mathbf{w}(t) \tag{5-86}$$

en donde:

$\mathbf{x}(t)$ = vector de estado *de* $n \times 1$ $\quad$ $\mathbf{y}(t)$ = vector de salida de $q \times 1$
$\mathbf{u}(t)$ = vector de entrada de $p \times 1$ $\quad$ $\mathbf{w}(t)$ = vector de perturbación de $v \times 1$

y **A**, **B**, **C**, **D**, **E** y **H** son coeficientes matrices de dimensiones apropiadas.

Tomando la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación (5-85) y resolviendo para $\mathbf{X}(s)$, se tiene:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{E}\mathbf{W}(s)] \tag{5-87}$$

La transformada de Laplace de la ecuación (5-86) es:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{CX}(s) + \mathbf{DU}(s) + \mathbf{HW}(s) \tag{5-88}$$

Al sustituir la ecuación (5-87) en la ecuación (5-88) se tiene:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})[\mathbf{BU}(s) + \mathbf{EW}(s)] + \mathbf{DU}(s) + \mathbf{HW}(s) \tag{5-89}$$

Ya que la definición de la función de transferencia requiere que las condiciones iniciales sean puestas a cero, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, por lo que la ecuación (5-89) se convierte en:

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s) + [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{E} + \mathbf{H}]\mathbf{W}(s) \tag{5-90}$$

Se definen:

$$\mathbf{G}_r(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{5-91}$$
$$\mathbf{G}_w(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E} + \mathbf{H} \tag{5-92}$$

en donde $\mathbf{G}_r(s)$ es una matriz de funciones de transferencia de $q \times p$ entre $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ cuando $\mathbf{w}(t) = \mathbf{0}$, y $\mathbf{G}_\upsilon(s)$ es una matriz de funciones de transferencia de $q \times v$ entre $\mathbf{w}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ cuando $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$.

Entonces, la ecuación (5-90) se convierte en:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_r(s)\mathbf{U}(s) + \mathbf{G}_w(s)\mathbf{W}(s) \tag{5-93}$$

Ejemplo 5-5

Considere que un sistema multivariable se describe mediante las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2y_1(t)}{dt^2} + 4\frac{dy_1(t)}{dt} - 3y_2(t) = u_1(t) + 2w(t) \tag{5-94}$$

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + \frac{dy_2(t)}{dt} + y_1(t) + 2y_2(t) = u_2(t) \tag{5-95}$$

Las variables de estado del sistema se asignan como:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y_1(t) \\ x_2(t) &= \frac{dy_1(t)}{dt} \\ x_3(t) &= y_2(t) \end{aligned} \tag{5-96}$$

Estas variables de estado se definen por mera inspección de las dos ecuaciones diferenciales, ya que no existe ninguna razón en particular para estas definiciones, que aquella que sea la más conveniente.

Ahora, igualando el primer término de cada una de las ecuaciones (5-94) y (5-95) al resto de los términos, y utilizando las relaciones de las variables de estado de la ecuación (5-96), se llega a las siguientes ecuaciones de estado y ecuaciones de salida en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \frac{dx_3(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} w(t) \tag{5-97}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \tag{5-98}$$

Para determinar la matriz de funciones de transferencia del sistema empleando el enfoque de las variables de estado, se sustituyen las matrices **A, B, C, D** y **E** en la ecuación (5-90). Primero, se forma la matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+4 & -3 \\ 1 & 1 & s+2 \end{bmatrix} \tag{5-99}$$

El determinante de $(s\mathbf{I} \quad \mathbf{A})$ es:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^3 + 6s^2 + 11s + 3 \tag{5-100}$$

Por lo que:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \begin{bmatrix} s^2 + 6s + 11 & s+2 & 3 \\ -3 & s(s+2) & 3s \\ -(s+4) & -(s+1) & s(s+4) \end{bmatrix} \tag{5-101}$$

La matriz de funciones de transferencia entre $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ es:

$$\mathbf{G}_r(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} \begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ -(s+1) & s(s+4) \end{bmatrix} \tag{5-102}$$

y aquélla entre $\mathbf{w}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ es:

$$\mathbf{G}_w(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E} = \frac{1}{s^3 + 6s + 11s + 3} \begin{bmatrix} 2(s+2) \\ -2(s+1) \end{bmatrix} \tag{5-103}$$

Utilizando el enfoque convencional, se toma la transformada de Laplace en ambos miembros de las ecuaciones (5-94) y (5-95) suponiendo condiciones iniciales cero. Las ecuaciones transformadas resultantes se escriben en forma de vector matricial como:

$$\begin{bmatrix} s(s+4) & -3 \\ s+1 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} W(s) \quad (5\text{-}104)$$

Despejando para $\mathbf{Y}(s)$ de la ecuación (5-104), se obtiene:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_r(s)\mathbf{U}(s) + \mathbf{G}_w(s)W(s) \quad (5\text{-}105)$$

en donde:

$$\mathbf{G}_r(s) = \begin{bmatrix} s(s+4) & -3 \\ s+1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (5\text{-}106)$$

$$\mathbf{G}_w(s) = \begin{bmatrix} s(s+4) & -3 \\ s+1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5\text{-}107)$$

que dará los mismos resultados de las ecuaciones (5-102) y (5-103), respectivamente, cuando se realizan las inversas de las matrices. ▲

5-7 Ecuación característica, valores y vectores característicos

La ecuación característica juega un papel importante en el estudio de sistemas lineales. Se puede definir con respecto a la ecuación diferencial, a la función de transferencia, o a las ecuaciones de estado.

Ecuación característica a partir de la ecuación diferencial

Considere que un sistema lineal e invariante con el tiempo se describe mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ + b_m\frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \quad (5\text{-}108)$$

en donde $n > m$. Al definir el operador s como:

$$s^k = \frac{d^k}{dt^k} \qquad k = 1, 2, \ldots, n \quad (5\text{-}109)$$

La ecuación (5-108) se escribe:

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)y(t) = (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)u(t) \quad (5\text{-}110)$$

La **ecuación característica** del sistema se define como:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (5\text{-}111)$$

la cual se obtiene igualando a cero la parte homogénea de la ecuación (5-110).

Ejemplo 5-6

Considere la ecuación diferencial de la ecuación (5-79). La ecuación característica se obtiene mediante inspección.

$$s^3 + 5s^2 + s + 2 = 0 \quad (5\text{-}112)$$

▲

▲ La ecuación característica se obtiene al igualar el denominador de la función de transferencia a cero.

Ecuación característica a partir de la función de transferencia

La función de transferencia del sistema descrito por la ecuación (5-108) es:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (5\text{-}113)$$

La ecuación característica se obtiene al igualar el polinomio del denominador de la función de transferencia a cero.

Ejemplo 5-7

La función de transferencia del sistema descrito por la ecuación diferencial de la ecuación (5-79) es:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + 5s^2 + s + 2} \quad (5\text{-}114)$$

La misma ecuación característica de la ecuación (5-112) se obtiene igualando a cero el polinomio del denominador de la ecuación (5-114). ▲

Ecuación característica a partir de las ecuaciones de estado

Desde el punto de vista de la variable de estado, la ecuación (5-91) se puede escribir como:

$$\mathbf{G}_r(s) = \mathbf{C}\frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{C}[\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})]\mathbf{B} + |s\mathbf{I} - \mathbf{A}|\mathbf{D}}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \quad (5\text{-}115)$$

Igualando el denominador de la matriz de funciones de transferencia $\mathbf{G}_r(s)$ a cero, se obtiene la ecuación característica como:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \tag{5-116}$$

que es una forma alternativa de la ecuación característica y debe dar la ecuación (5-111). *Una propiedad importante de la ecuación característica es que si los coeficientes de* **A** *son reales, los coeficientes de* $|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|$ *son también reales.*

Ejemplo 5-8

La matriz **A** para las ecuaciones de estado de la ecuación diferencial de la ecuación (5-79) está dada en la ecuación (5-83). La ecuación característica de **A** es:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 2 & 1 & s+5 \end{vmatrix} = s^3 + 5s^2 + s + 2 = 0 \tag{5-117}$$

▲

▲ Los valores característicos de **A** son también las raíces de la ecuación característica.

5-7-1 Valores característicos

Las raíces de la ecuación característica a menudo se refieren como los valores característicos de la matriz **A.** Algunas propiedades importantes de los valores característicos se dan como sigue:

1. Si los coeficientes de **A** son todos reales, sus valores característicos son, ya sea reales o pares complejos conjugados.
2. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores característicos de **A**, entonces :

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{5-118}$$

   Esto es, la traza de **A** es la suma de todos los valores característicos de **A**.
3. Si λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, es un valor característico de **A**, también es un valor característico de **A'**.
4. Si **A** es no singular, con valores característicos λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $1/\lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, son los valores característicos de $\mathbf{A}^{-1}$.

Ejemplo 5-9

Los valores característicos o las raíces de la ecuación característica de la matriz **A** en la ecuación (5-83) se obtienen al resolver la ecuación (5-117). Los resultados son:

$$s = -0.06047 + j0.63738 \qquad s = -0.06047 - j0.63738 \qquad s = -4.87906 \tag{5-119}$$

▲

5-7-2 Vectores característicos

Los vectores característcos son útiles en muchos temas en el control moderno, uno de los cuales está en la transformación de similitud que será estudiada en la sección siguiente. *Cualquier vector* $\mathbf{p}_i$ *distinto de cero que satisface la ecuación matricial*:

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_i = \mathbf{0} \tag{5-120}$$

en donde λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *denota el i-ésimo valor característico de* **A**, *se conoce como el* **vector característico** *de* **A** *asociado con el valor característico* λ_i. Si **A** tiene valores característicos distintos, los vectores característicos se pueden resolver directamente de la ecuación (5-120).

Ejemplo 5-10

Considere que la ecuación de estado de la ecuación (5-38) tiene las matrices de coeficientes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{5-121}$$

La ecuación característica de **A** es:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^2 - 1 \tag{5-122}$$

Los valores característicos son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. Si los vectores característicos se escriben como:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} \tag{5-123}$$

Sustituyendo $\lambda_1 = 1$ y $\mathbf{p}_1$ en la ecuación (5-120), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5-124}$$

Por lo que $p_{21} = 0$ y p_{11} es arbitrario, que en este caso se puede poner igual a 1.

En forma similar, para $\lambda_2 = -1$, la ecuación (5-120) se convierte en:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5-125}$$

lo que lleva a:

$$-2p_{12} + p_{22} = 0 \tag{5-126}$$

La ecuación (5-126) tiene dos valores desconocidos, lo que significa que se pueden establecer en forma arbitraria. Si $p_{12} = 1$; entonces $p_{22} = 2$. Los vectores característicos son:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{5-127}$$

▲

Vectores característicos generalizados

Debe señalarse que si **A** tiene valores característicos de orden múltiple y no es simétrica, no todos los **vectores característicos** se pueden encontrar utilizando la ecuación (5-120). Suponiendo que entre los n valores característicos de **A**, q ($< n$) son distintos. Los vectores característicos que corresponden a los q valores característicos distintos se pueden determinar de la forma usual de:

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_i = \mathbf{0} \tag{5-128}$$

en donde λ_i denota el i-ésimo valor característico distintivo, $i = 1, 2, \ldots, q$. Entre los restantes valores característicos de mayor orden, suponga que λ_j es de m-ésimo orden ($m \leq n - q$); los vectores característicos correspondientes, llamados **vectores característicos generalizados,** se pueden determinar de las m ecuaciones vectoriales siguientes:

$$\begin{aligned}
(\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_{n-q+1} &= \mathbf{0} \\
(\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_{n-q+2} &= -\mathbf{p}_{n-q+1} \\
(\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_{n-q+3} &= -\mathbf{p}_{n-q+2} \\
&\vdots \\
(\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_{n-q+m} &= -\mathbf{p}_{n-q+m-1}
\end{aligned} \tag{5-129}$$

Ejemplo 5-11

Dada la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{5-130}$$

Los valores característicos de **A** son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Por lo que **A** tiene un valor característico de segundo orden en 1. El vector característico que está asociado con $\lambda_1 = 2$, se determina empleando la ecuación (5-128). Por lo que:

$$(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{5-131}$$

Debido a que existen solo dos ecuaciones independientes en la ecuación (5-131), en forma arbitraria se establece que $p_{11} = 2$, y se tiene $p_{21} = -1$ y $p_{31} = -2$. Por lo que:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{5-132}$$

Para los vectores característicos generalizados que están asociados con el valor característico de segundo orden, se sustituye $\lambda_2 = 1$ en la primera ecuación de la ecuación (5-129). Se tiene:

$$(\lambda_2\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{5-133}$$

Al hacer que $p_{12} = 1$ en forma arbitraria, se tiene $p_{22} = -\frac{3}{7}$ y $p_{32} = -\frac{5}{7}$. Por lo que:

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{bmatrix} \tag{5-134}$$

Sustituyendo $\lambda_3 = 1$ en la segunda ecuación de la ecuación (5-129), se tiene:

$$(\lambda_3\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = -\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{7} \\ \frac{5}{7} \end{bmatrix} \tag{5-135}$$

Al hacer que p_{13} sea igual a 1 en forma arbitraria, se tiene el vector característico generalizado:

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{22}{49} \\ -\frac{46}{49} \end{bmatrix} \tag{5-136}$$

▲

5-8 Transformaciones de similitud

Dadas las ecuaciones dinámicas de un sistema SISO en la forma:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \tag{5-137}$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) \tag{5-138}$$

en donde $\mathbf{x}(t)$ es el vector de estado de $n \times 1$, $u(t)$ y $y(t)$ son la entrada y salida escalares, respectivamente. Cuando se realiza el análisis y diseño en el dominio de estado, con frecuencia, es ventajoso transformar estas ecuaciones en formas particulares. Por ejemplo, como se mostrará posteriormente, la forma canónica controlable (FCC) tiene muchas propiedades interesantes que la hacen conveniente para pruebas de controlabilidad y el diseño mediante la realimentación del estado.

Considere que las ecuaciones dinámicas de las ecuaciones (5-137) y (5-138) son transformadas en otro grupo de ecuaciones de la misma dimensión mediante la siguiente transformación:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\overline{\mathbf{x}}(t) \tag{5-139}$$

en donde $\mathbf{P}$ es una matriz no singular de $n \times n$, por lo que:

$$\overline{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t) \tag{5-140}$$

Las ecuaciones dinámicas transformadas se escriben como:

$$\frac{d\overline{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}}(t) + \overline{\mathbf{B}}u(t) \tag{5-141}$$

$$\overline{y}(t) = \overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{x}}(t) + \overline{\mathbf{D}}u(t) \tag{5-142}$$

Tomando la derivada de ambos miembros de la ecuación (5-140) con respecto a t, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{\mathbf{x}}(t)}{dt} &= \mathbf{P}^{-1}\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}u(t) \\ &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\overline{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}u(t)\end{aligned} \tag{5-143}$$

Al comparar la ecuación (5-143) con la ecuación (5-141), se tiene:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \tag{5-144}$$

y

$$\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} \tag{5-145}$$

Utilizando la ecuación (5-139), la ecuación (5-142) se escribe:

$$\overline{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{x}(t) + \overline{\mathbf{D}}u(t) \tag{5-146}$$

Al comparar la ecuación (5-146) con la ecuación (5-138), se observa que:

$$\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{CP} \qquad \overline{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \tag{5-147}$$

La transformación descrita anteriormente se conoce como una **transformación de similitud,** ya que en el sistema transformado las propiedades como la ecuación característica, los vectores característicos, los valores característicos, y la función de transferencia se conservan en la transformación. A continuación se describirán las transformaciones de la forma canónica controlable (FCC), de la forma canónica observable (FCO), y de la forma canónica diagonal (FCD). Las ecuaciones de transformación se dan sin prueba.

5-8-1 Propiedades invariantes de las transformaciones de similitud

Una de las propiedades importantes de las transformaciones de similitud es que la ecuación característica, los valores característicos, los vectores característicos, y las funciones de transferencia son invariantes bajo dichas transformaciones.

Ecuación característica, valores característicos, vectores característicos

La ecuación característica del sistema descrito por la ecuación (5-141) es $|s\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}}| = 0$ y se escribe como:

$$|s\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}}| = |s\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}| = |s\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}| \tag{5-148}$$

Ya que el determinante del producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices, la ecuación (5-148) se convierte en:

$$|s\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}}| = |\mathbf{P}^{-1}|\,|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|\,|\mathbf{P}| = |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| \tag{5-149}$$

Por lo que la ecuación característica se mantiene, lo que lleva naturalmente a los mismos valores característicos y vectores característicos.

Matriz de función de transferencia

De la ecuación (5-91), la matriz de función de transferencia del sistema de las ecuaciones (5-141) y (5-142) es:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{G}}(s) &= \overline{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}})^{-1}\overline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{D}} \\ &= \mathbf{CP}(s\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\end{aligned} \tag{5-150}$$

que se simplifica a:

$$\overline{\mathbf{G}}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{G}(s) \tag{5-151}$$

5-8-2 Forma canónica controlable

Considere las ecuaciones dinámicas dadas en las ecuaciones (5-137) y (5-138). La ecuación característica de **A** es:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{5-152}$$

Las ecuaciones dinámicas en las ecuaciones (5-137) y (5-138) se transforman a la forma canónica controlable (FCC) a partir de la forma de las ecuaciones (5-141) y (5-142) mediante la transformación de la ecuación (5-139), con:

▲ Para transformar **A** y **B** a la FCC, la matriz **S** debe ser no singular.

$$\mathbf{P} = \mathbf{SM} \tag{5-153}$$

en donde:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \tag{5-154}$$

y:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5-155}$$

Entonces:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5\text{-}156)$$

$$\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5\text{-}157)$$

Las matrices $\overline{\mathbf{C}}$ y $\overline{\mathbf{D}}$ están dadas por la ecuación (5-147) y no siguen ningún patrón en particular. La transformación FCC requiere que $\mathbf{P}^{-1}$ exista, lo que implica que la matriz **S** debe tener inversa, ya que la inversa de **M** siempre existe debido a que su determinante es $(-1)^{n-1}$, el cual no es cero. La matriz **S** de $n \times n$ en la ecuación (5-154) se define más adelante como **matriz de controlabilidad.**

Ejemplo 5-12

Considere que las matrices de coeficientes de las ecuaciones de estado de la ecuación (5-137) son:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5\text{-}158)$$

Las ecuaciones de estado se transforman a la FCC.

La ecuación característica de **A** es:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s-1 & -2 & -1 \\ 0 & s-1 & -3 \\ -1 & -1 & s-1 \end{vmatrix} = s^3 - 3s^2 - s - 3 = 0 \quad (5\text{-}159)$$

Por lo que los coeficientes de la ecuación característica se definen como $a_0 = -3$, $a_1 = -1$, y $a_2 = -3$. De la ecuación (5-155):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}160)$$

La matriz de controlabilidad es:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}161)$$

Se puede demostrar que **S** es no singular, por lo que el sistema se puede transformar en la FCC. Al sustituir **S** y **M** en la ecuación (5-153), se tiene:

$$\mathbf{P} = \mathbf{SM} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}162)$$

Por lo que, de las ecuaciones (5-156) y (5-157), el modelo de la FCC está dado por:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}163)$$

que se deben determinar una vez que se conocen los coeficientes de la ecuación característica. Sin embargo, el ejercicio anterior es para demostrar cómo se obtiene la matriz **P** de la transformación de la FCC. ▲

Soluciones por computadora

La manipulación de matrices es, probablemente, la más tediosa de todas las tareas matemáticas. Los archivos M de **MATLAB** y **CSAD** están listos para ser utilizados para las manipulaciones matriciales mencionadas. De hecho, la función **tr2ccf(A,B)** regresa la matriz de transformación **P**, una vez que se introducen las matrices de la ecuación de estado **A** y **B**. El siguiente ejemplo provee los resultados para el sistema en el ejemplo 5-12, empleando **tr2ccf** de **CSAD** con **MATLAB**.

```
≫A=[1 2 1; 0 1 3; 1 1 1]

A=
        1  2  1

        0  1  3

        1  1  1
```

```
>B=[1; 1; 1]

B=
        1

        0

        1

>P=tr2ccf(A, B) <CR>

P=
        3.0000  -1.0000  1.0000

       -0.0000   3.0000  0.0000

        0.0000  -1.0000  1.0000
```

5-8-3 Forma canónica observable

Una forma dual de la transformación de la FCC es la **forma canónica observable** (FCO). El sistema descrito por las ecuaciones (5-137) y (5-138) se transforma a la FCO mediante la transformación:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}\overline{\mathbf{x}}(t) \tag{5-164}$$

Las ecuaciones transformadas son como las dadas en las ecuaciones (5-141) y (5-142). Por lo que:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} \qquad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B} \qquad \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{Q} \qquad \overline{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \tag{5-165}$$

en donde:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{5-166}$$

$$\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{Q} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \tag{5-167}$$

Ejem
5-13

Los elementos de las matrices $\overline{\mathbf{B}}$ y $\overline{\mathbf{D}}$ no están restringidos a ninguna forma. Observe que $\overline{\mathbf{A}}$ y $\overline{\mathbf{C}}$ son las transpuestas de $\overline{\mathbf{A}}$ y $\overline{\mathbf{B}}$ de las ecuaciones (5-156) y (5-157), respectivamente.

La matriz **Q** de la transformación FCO está dada por:

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{MV})^{-1} \tag{5-168}$$

en donde **M** está dada en la ecuación (5-155), y:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (n \times n) \tag{5-169}$$

La matriz **V** a menudo se define como la **matriz de observabilidad,** y $\mathbf{V}^{-1}$ debe existir para que la transformación FCO sea posible.

Ejemplo 5-13

Considere que los coeficientes matrices del sistema descrito por las ecuaciones (5-137) y (5-138) son:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1 \quad 0] \quad \mathbf{D} = \mathbf{0} \tag{5-170}$$

Ya que la matriz **A** es idéntica a aquella del sistema en el ejemplo 5-12, la matriz **M** es la misma que en la ecuación (5-160). La matriz de observabilidad es:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 10 \end{bmatrix} \tag{5-171}$$

Se puede demostrar que **V** es no singular, por lo que el sistema se puede transformar a la FCO. Sustituyendo **V** y **M** en la ecuación (5-168), se tiene la matriz de transformación FCO:

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{MV})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3333 & -0.1667 & 0.3333 \\ -0.3333 & 0.1667 & 0.6667 \\ 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 \end{bmatrix} \tag{5-172}$$

De la ecuación (5-165) el modelo FCO del sistema se describe mediante:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{Q} = [0 \quad 0 \quad 1] \qquad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5-173}$$

Por lo que $\overline{\mathbf{A}}$ y $\overline{\mathbf{C}}$ están en la FCO dada en las ecuaciones (5-166) y (5-167), respectivamente, y $\overline{\mathbf{B}}$ no tiene ninguna forma en particular. ▲

Soluciones por computadora

La función **tr2ocf** de **CSAD** encuentra la transformación de la matriz **Q** para la transformación FCO a partir de las matrices **A** y **C.** Los siguientes resultados se obtienen utilizando **CSAD/MATLAB.**

```
≫A=[1 2 1; 0 1 3; 1 1 1]

A=
      1  2  1

      0  1  3

      1  1  1

≫C=[1 1 0]

C=
      1  1  0

≫Q=tr2ocf(A, C)

Q=
     0.3333  -0.1667  0.3333

    -0.3333   0.1667  0.6667

     0.1667   0.1667  0.1667
```

5-8-4 Forma canónica diagonal

Dadas las ecuaciones dinámicas (5-137) y (5-138), si **A** tiene valores característicos *distintos*, existe una transformación no singular.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}(t) \tag{5-174}$$

que transforma estas ecuaciones a las ecuaciones dinámicas de las ecuaciones (5-141) y (5-142), en donde:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \qquad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \qquad \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T} \qquad \overline{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \tag{5-175}$$

La matriz $\overline{\mathbf{A}}$ es una matriz diagonal:

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (n \times n) \tag{5-176}$$

en donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los n valores característicos distintos de **A.** Las matrices de coeficientes $\overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{C}}$, y $\overline{\mathbf{D}}$ están dadas en la ecuación (5-175) y no siguen ningún formato en particular.

Es aparente que una de las ventajas de la forma canónica diagonal (FCD) es que las ecuaciones de estado transformadas están *desacopladas* una de la otra y por tanto se pueden resolver en forma individual.

A continuación se demuestra que la matriz **T** de transformación FCD se puede formar mediante el empleo de los vectores propios de **A** como sus columnas; esto es:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_3 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n] \tag{5-177}$$

en donde $\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, denota el vector característico asociado con el valor característico λ_i. Esto se prueba mediante el empleo de la ecuación (5-120), que se escribe como:

$$\lambda_i \mathbf{p}_i = \mathbf{A}\mathbf{p}_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{5-178}$$

Ahora se forma la matriz de $n \times n$:

$$\begin{aligned} [\lambda_1\mathbf{p}_1 \quad \lambda_2\mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\mathbf{p}_n] &= [\mathbf{A}\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A}\mathbf{p}_n] \\ &= \mathbf{A}[\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n] \end{aligned} \tag{5-179}$$

La ecuación (5-179) se escribe como:

$$[\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n]\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}[\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n] \tag{5-180}$$

en donde $\overline{\mathbf{A}}$ es como la dada en la ecuación (5-176). Por lo que si:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n] \tag{5-181}$$

La ecuación (5-180) se escribe:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \tag{5-182}$$

Si la matriz **A** está en la FCC y **A** tiene valores característicos distintos, la matriz de transformación FCD es la matriz Vandermonde:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \tag{5-183}$$

en donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, son los valores característicos de **A.** Esto se puede probar al sustituir **A** de la FCC de la ecuación (5-75) en la ecuación (5-120). El resultado es que el i-ésimo vector característico $\mathbf{p}_i$ es igual a la columna i-ésima de **T** en la ecuación (5-183).

Ejemplo 5-14

Considere la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \tag{5-184}$$

la cual tiene los valores característicos $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, y $\lambda_3 = -3$. Ya que **A** está en la FCC, para transformarla en la FCD la matriz de transformación puede ser la matriz Vandermonde de la ecuación (5-183). Por lo que:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \tag{5-185}$$

Por lo que la FCD de **A** se escribe:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \tag{5-186}$$

▲

Soluciones por computadora

La función **tr2dcf** de **CSAD** encuentra la matriz de transformación **T** dada la matriz **A** del sistema. Para demostrar esto, se introduce la matriz en la ecuación (5-184) en **CSAD.**

```
>>A=[0 1 0; 0 0 1; -6 -11 -6]

A =
      0    1     0

      0    0     1

     -6  -11    -6

>>T=tr2df(A) <CR>

T =
    -0.5774   0.2182   -0.1048

     0.5774  -0.4364    0.3145

    -0.5774   0.8729   -0.9435
```

Observe que la matriz de transformación **T** calculada por la computadora es diferente a la dada en la ecuación (5-185). Sin embargo, se puede demostrar que las columnas correspondientes de las dos matrices son linealmente dependientes. Esto demuestra que los vectores característicos no son únicos.

5-8-5 Forma canónica de Jordan

En general, cuando la matriz **A** tiene valores característicos de orden múltiple, a menos que la matriz sea simétrica con elementos reales, no se puede transformar en una matriz diagonal. Sin embargo, existe una transformación de similitud en la forma de la ecuación (5-182) tal que $\overline{\mathbf{A}}$ es casi diagonal. La matriz $\overline{\mathbf{A}}$ se conoce como **forma canónica de Jordan (FCJ).** Una FCJ típica se muestra a continuación:

$$\overline{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{ccc|c|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{array}\right] \qquad (5\text{-}187)$$

en donde se supone que **A** tiene un valor característico de tercer orden λ_1, y valores característicos distintos λ_2 y λ_3

En general la FCJ tiene las siguientes propiedades:

1. Los elementos en la diagonal principal son los valores característicos.
2. Todos los elementos abajo de la diagonal principal son cero.
3. Algunos de los elementos inmediatamente arriba de los valores característicos de orden múltiple sobre la diagonal principal son números unos, como se ilustra en la ecuación (5-187).
4. Los números unos, junto con los valores característicos, forman bloques típicos llamados **bloques de Jordan.** Como se muestra en la ecuación (5-187), los bloques de Jordan están encerrados por líneas punteadas.
5. Cuando la matriz no simétrica **A** tiene valores característicos de orden múltiple, sus vectores característicos no son linealmente independientes. Para una **A** de $n \times n$, existen solamente r ($r < n$) vectores característicos linealmente independientes.
6. El número de bloques de Jordan es igual al número r de vectores característicos linealmente independientes. Existe un solo vector característico linealmente independiente asociado con cada bloque de Jordan.
7. El número de unos arriba de la diagonal principal es igual a $n - r$.

Para realizar la transformación FCJ, la matriz de transformación **T** *se forma otra vez empleando los vectores característicos y los vectores característicos generalizados como sus columnas.*

Ejemplo 5-15

Considere la matriz dada en la ecuación (5-130). Se ha demostrado que la matriz tiene los valores característicos 2; 1 y 1. Por lo que la matriz de transformación FCD se puede formar empleando el vector característico y el vector característico generalizado dados en las ecuaciones (5-132), (5-134) y (5-136), respectivamente. Esto es:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -\frac{3}{7} & -\frac{22}{49} \\ -2 & -\frac{5}{7} & -\frac{46}{49} \end{bmatrix} \tag{5-188}$$

Por lo que la FCD es:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{5-189}$$

Observe que en este caso existen dos bloques de Jordan y hay un elemento 1 arriba de la diagonal principal. ▲

5-9

5-9 Descomposición de funciones de transferencia

Hasta este instante, se han presentado varios métodos de caracterización de un sistema lineal. Será útil resumir brevemente y conjuntar los pensamientos en este punto antes de proseguir con los temas principales de la descomposición de las funciones de transferencia cubiertos en esta sección. Se ha demostrado que el punto inicial del modelado de un sistema lineal puede ser la ecuación diferencial del sistema, la función de transferencia o las ecuaciones dinámicas. Se ha demostrado que todos estos métodos están íntimamente relacionados. Aún más, el diagrama de estado, definido en el Cap. 3, muestra ser una herramienta útil que no sólo puede guiarnos a las soluciones de las ecuaciones de estado, sino que también sirve como un vehículo de transformación de una forma de descripción a otras. El diagrama de bloques de la Fig. 5-5 muestra la relación entre las diferentes formas de describir un sistema lineal. El diagrama de bloques muestra que empezando, por ejemplo, con la ecuación diferencial de un sistema, se puede obtener la solución mediante el uso del método de la función de transferencia o el método de la ecuación de estado. El diagrama de bloques también muestra que la mayoría de las relaciones son bilaterales, de tal forma que existe una gran flexibilidad entre los métodos.

Un tema permanece para estudio, el cual involucra la construcción del diagrama de estado de la función de transferencia entre la entrada y la salida. El proceso de ir desde la función de transferencia al diagrama de estado se conoce como **descomposición.** En general, existen tres métodos básicos de descomposición de las funciones de transferencia: **descomposición directa, descomposición en cascada** y **descomposición en paralelo.** Cada una de las cuales tiene sus méritos característicos y se aplican para algún propósito en particular.

5-9-1 Descomposición directa

La descomposición directa se aplica a una función de transferencia entrada-salida que no está en forma factorizada. Considere que la función de transferencia de un sistema SISO de

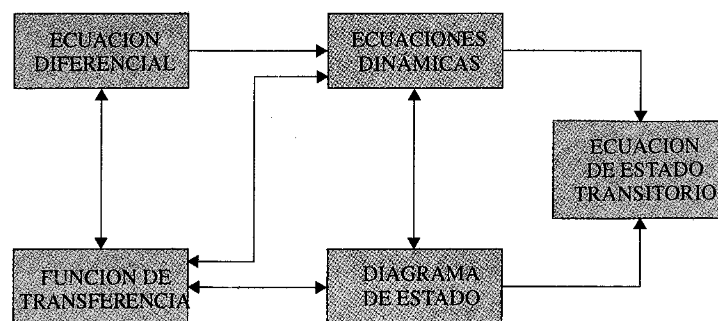


Figura 5-5 Diagrama de bloques que muestra las relaciones entre varios métodos para describir sistemas lineales.

n-ésimo orden entre la entrada $U(s)$ y la salida $Y(s)$ es:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{b-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{5-190}$$

en donde se supone que el grado del denominador es por lo menos uno mayor que el del numerador. Se demostrará que la descomposición directa se puede conducir en por lo menos dos formas, una que lleva a un diagrama de estado que corresponde a la FCC, y la otra a la FCO.

Descomposición directa a la FCC

El objetivo es construir un diagrama de estado a partir de la función de transferencia de la ecuación (5-190). A continuación se detallan los pasos:

1. Exprese la función de transferencia en potencias negativas de s. Esto se hace mediante la multiplicación del numerador y el denominador de la función de transferencia por s^{-n}.
2. Multiplique el numerador y el denominador de la función de transferencia por una variable auxiliar $X(s)$. Mediante la realización de estos dos últimos pasos, la ecuación (5-190) se convierte en:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{-1} + b_{n-2}s^{-2} + \cdots + b_1 s^{-n+1} + b_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1}s^{-1} + \cdots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n}} \frac{X(s)}{X(s)} \tag{5-191}$$

3. Los numeradores y denominadores en ambos miembros de la ecuación (5-191) son igualados con su correspondiente. Los resultados son:

$$Y(s) = (b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s^{-n+1} + b_0 s^{-n})X(s) \tag{5-192}$$

$$U(s) = (1 + a_{n-1}s^{-1} + \cdots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n})X(s) \tag{5-193}$$

4. Para construir un diagrama de estado empleando las dos ecuaciones en las ecuaciones (5-192) y (5-193), primero deben estar en la relación de causa y efecto apropiada. Es claro que la ecuación (5-192), satisface este prerrequisito. Sin embargo, la ecuación (5-193) tiene la entrada en el primer miembro de la ecuación y debe rearreglarse. La ecuación (5-193) se rearregla como:

$$X(s) = U(s) - (a_{n-1}s^{-1} + a_{n-2}s^{-2} + \cdots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n})X(s) \tag{5-194}$$

El diagrama de estado se dibuja como se muestra en la Fig. 5-6, utilizando las ecuaciones (5-192) y (5-194). Por simplicidad, en el diagrama no se dibujan los estados

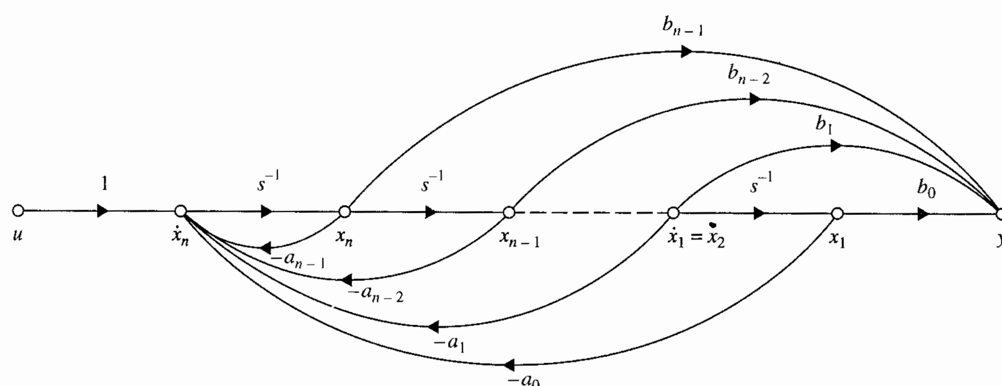


Figura 5-6 Diagrama de estado en la FCC de la función de transferencia de la ecuación (5-190) mediante descomposición directa.

iniciales. $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ se definen como las salidas de los integradores y arregladas en orden de derecha a izquierda sobre el diagrama de estado. Las ecuaciones de estado se obtienen al aplicar la fórmula de ganancia de la SFG a la Fig. 5-6 con las derivadas de las variables de estado como las salidas y las variables de estado y $u(t)$ como las entradas, y sin considerar las ramas del integrador. La ecuación de salida se determina aplicando la fórmula de ganancia entre las variables de estado, la entrada y la salida $y(t)$. Las ecuaciones dinámicas se escriben como:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \tag{5-195}$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Du(t) \tag{5-196}$$

en donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5-197}$$

$$\mathbf{C} = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-2} \quad b_{n-1}] \qquad D = 0 \tag{5-198}$$

Aparentemente, **A** y **B** en la ecuación (5-197) están en la forma canónica controlable.

Descomposición directa a la FCO

Al multiplicar el numerador y el denominador de la ecuación (5-190) por s^{-n}, la ecuación se expande como:

$$\begin{aligned}(1 + a_{n-1}s^{-1} + \cdots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n})Y(s) \\ = (b_{n-1}s^{-1} + b_{n-2}s^{-2} + \cdots + b_1 s^{-n+1} + b_0 s^{-n})U(s)\end{aligned} \quad (5\text{-}199)$$

o

$$\begin{aligned}Y(s) = -(a_{n-1}s^{-1} + \cdots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n})Y(s) \\ + (b_{n-1}s^{-1} + b_{n-2}s^{-2} + \cdots + b_1 s^{-n+1} + b_0 s^{-n})U(s)\end{aligned} \quad (5\text{-}200)$$

La Fig. 5-7 muestra el diagrama de estado de la ecuación (5-200). Las salidas de los integradores se designan como las variables de estado. Sin embargo, a pesar de la forma habitual, las variables de estado se asignan en *orden descendente* de derecha a izquierda. Aplicando la fórmula de ganancia de la SFG al diagrama de estado, las ecuaciones dinámicas se escriben como las ecuaciones (5-195) y (5-196), con:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5\text{-}201)$$

y

$$\mathbf{C} = [0 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0 \;\; 1] \qquad D = 0 \quad (5\text{-}202)$$

Las matrices **A** y **C** están en la forma canónica observable.

Debe señalarse que dadas las ecuaciones dinámicas de un sistema, la función de transferencia entrada-salida es única. Sin embargo, dada la función de transferencia, el modelo de estado no es único, como se muestra en la FCC, la FCO y la FCD, y muchas otras posibilidades. De hecho, aún para cada una de estas formas canónicas, por ejemplo, la FCC, aunque define las matrices **A** y **B**, los elementos de **C** y **D** pueden ser diferentes, dependiendo de cómo se dibuje el diagrama de estado, o mejor dicho, por cómo se descomponga la función de transferencia. En otras palabras, con referencia a la Fig. 5-6, mientras que las ramas de

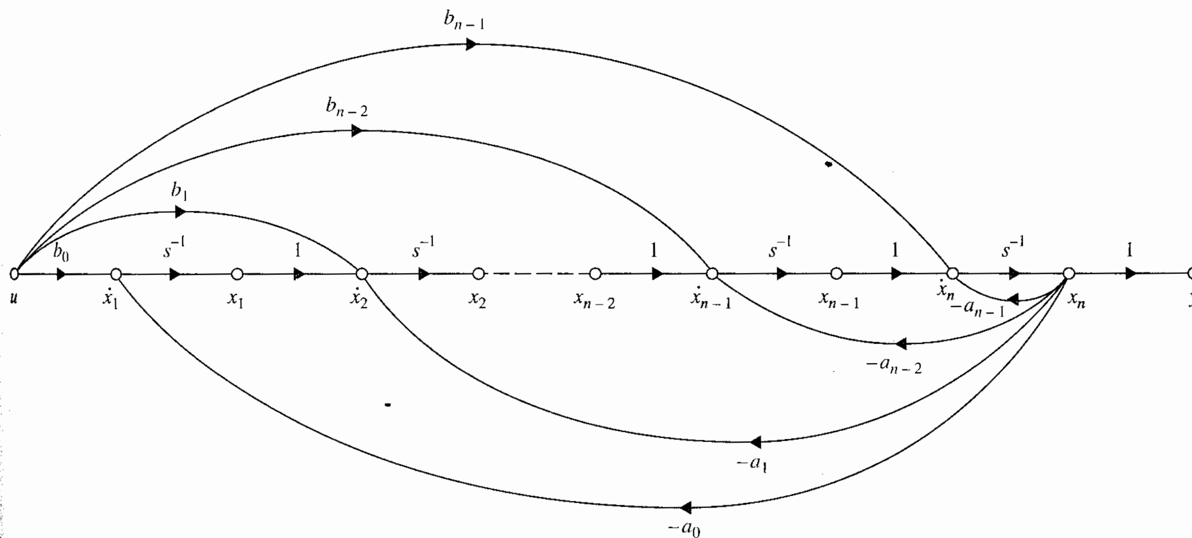


Figura 5-7 Diagrama de estado en la FCO de la función de transferencia de la ecuación (5-190) mediante descomposición directa.

realimentación están fijas, las ramas de las trayectorias directas que contienen los coeficientes del numerador de la función de transferencia se pueden manipular para cambiar el contenido de **C**.

Ejemplo 5-16

Considere la siguiente función de transferencia entrada-salida:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + s + 5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 4} \tag{5-203}$$

La FCC del diagrama de estado del sistema se muestra en la Fig. 5-8, la cual se dibuja a partir de las siguientes ecuaciones:

$$Y(s) = (2s^{-1} + s^{-2} + 5s^{-3})X(s) \tag{5-204}$$

$$X(s) = U(s) - (6s^{-1} + 11s^{-2} + 4s^{-3})X(s) \tag{5-205}$$

Las ecuaciones dinámicas del sistema en la FCC son:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{5-206}$$

$$y(t) = [5 \quad 1 \quad 2]\mathbf{x}(t) \tag{5-207}$$

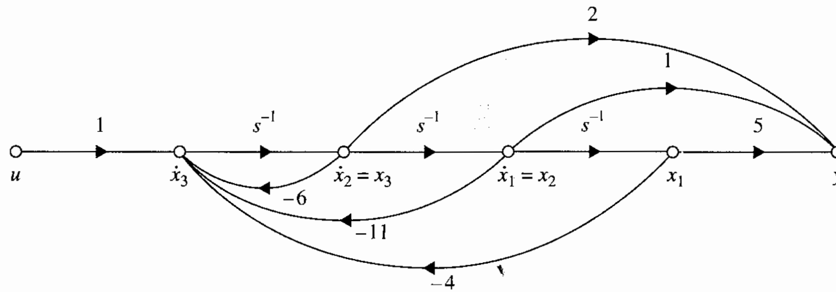


Figura 5-8 Diagrama de estado en la FCC de la función de transferencia de la ecuación (5-203).

Para la FCO, la ecuación (5-203) se expande a:

$$Y(s) = (2s^{-1} + s^{-2} + 5s^{-3})U(s) - (6s^{-1} + 11s^{-2} + 4s^{-3})Y(s) \tag{5-208}$$

lo cual lleva al diagrama de estado de la FCO que se muestra en la Fig. 5-9. Las ecuaciones dinámicas de la FCO se escriben como:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} u(t) \tag{5-209}$$

$$y(t) = [0 \quad 0 \quad 1]\mathbf{x}(t) \tag{5-210}$$

▲

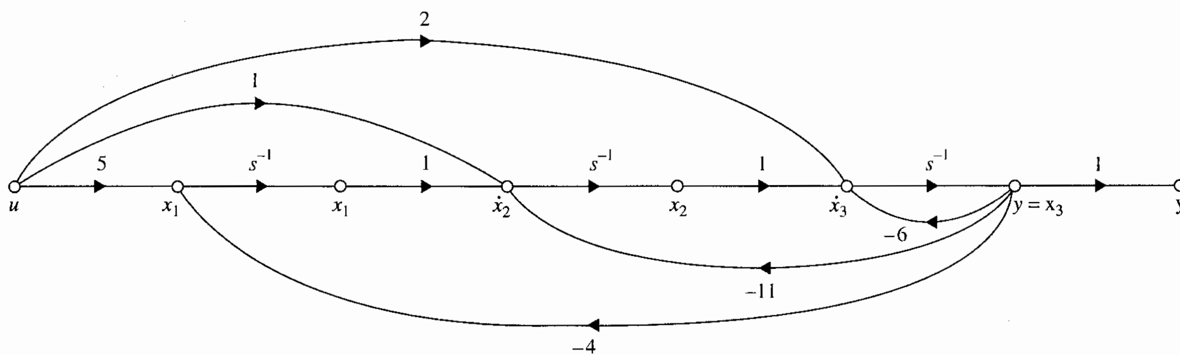


Figura 5-9 Diagrama de estado en la FCO de la función de transferencia de la ecuación (5-203).

Soluciones por computadora

Las herramientas del **CSAD/MATLAB** tienen funciones que se pueden utilizar para calcular la FCC y la FCO a partir de las funciones de transferencia. La instrucción de **CSAD [A, B, C, D]=tf2ccf(N,D)** proporciona las matrices **A, B, C** y **D** en la FCC una vez que se introducen el polinomio numerador N y el polinomio denominador D de la función de transferencia. En forma similar, la instrucción **[A, B, C, D]=tf2ocf(N,D)** da la FCO. La función **svstuff** del **CSAD** tiene la opción **Transformation,** que realiza la transformación a la FCC, a la FCO o a la FCD a partir de la dinámica del sistema, ya sea en forma de variable de estado o en función de transferencia.

5-9-2 Descomposición en cascada

La compensación en cascada se refiere a que las funciones de transferencia que se escriben como productos de componentes simples de primero o segundo orden. Considere la siguiente función de transferencia, la cual es el producto de dos funciones de transferencia de primer orden:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = K\left(\frac{s+b_1}{s+a_1}\right)\left(\frac{s+b_2}{s+a_2}\right) \tag{5-211}$$

en donde a_1, a_2, b_1, y b_2 son constantes reales. Cada una de las funciones de transferencia de primer orden se descompone mediante descomposición directa, y los dos diagramas de estado están conectados en cascada, como se muestra en la Fig. 5-10. Las ecuaciones de estado se obtienen al considerar a las derivadas de las variables de estado como salidas, las variables de estado y $u(t)$ como entradas, y al aplicar la fórmula de ganancia SFG al diagrama de estado en la Fig. 5-10. Las ramas del integrador se desprecian cuando se aplica la fórmula de ganancia. Los resultados son:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & b_2 - a_2 \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \\ K \end{bmatrix} u(t) \tag{5-212}$$

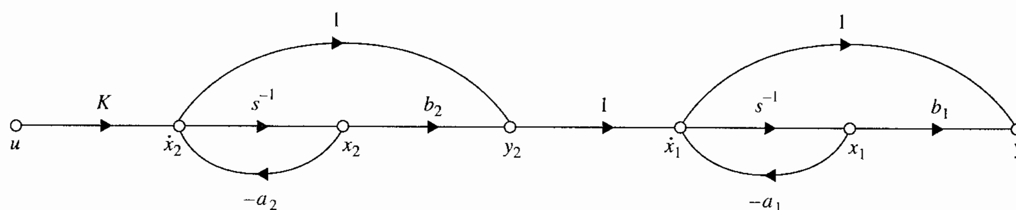


Figura 5-10 Diagrama de estado de la función de transferencia de la ecuación (5-211) mediante descomposición en cascada.

La ecuación de salida se obtiene al considerar a las variables de estado y a $u(t)$ como las entradas y a $y(t)$ como la salida, y al aplicar la fórmula de ganancia a la Fig. 5-10. Por lo que:

$$y(t) = [b_1 - a_1 \quad b_2 - a_2]\mathbf{x}(t) + Ku(t) \tag{5-213}$$

Cuando la función de transferencia tiene polos o ceros complejos, los factores individuales relacionados con estos polos o ceros deben estar en la forma de segundo orden. Como un ejemplo, considere la función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \left(\frac{s+5}{s+2}\right)\left(\frac{s+1.5}{s^2+3s+4}\right) \tag{5-214}$$

en donde los polos del segundo término son complejos. En la Fig. 5-11 se muestra el diagrama de estado del sistema con dos subsistemas conectados en cascada. Las ecuaciones dinámicas del sistema son:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{5-215}$$

$$y(t) = [1.5 \quad 1 \quad 0]\mathbf{x}(t) \tag{5-216}$$

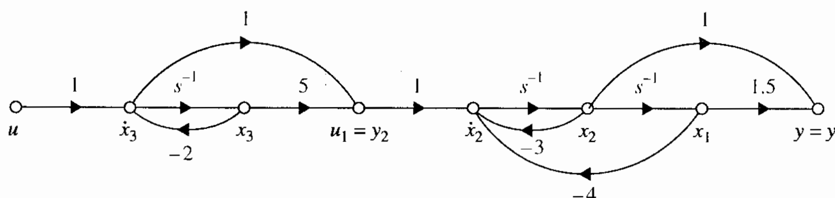


Figura 5-11 Diagrama de estado de la función de transferencia de la ecuación (5-214) mediante descomposición en cascada.

Soluciones por computadora

La función **svseries** de las herramientas de **CSAD** se puede emplear para encontrar las ecuaciones dinámicas de dos sistemas conectados en cascada. Para más de dos sistemas conectados en cascada, sencillamente se ejecuta **svseries** repetidamente.

Se aplica **svseries** para encontrar las ecuaciones dinámicas del sistema en la ecuación (5-214) como dos sistemas conectados en cascada. Se designa la porción de segundo orden de la función de transferencia como los del sistema 1 y los de la porción de primer orden como el sistema 2. A partir de la Fig. 5-11 se escriben las ecuaciones dinámicas de los dos sistemas individuales, y los coeficientes matrices son:

$$\text{Sistema 1:} \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_1 = [1.5 \quad 1] \quad \mathbf{D}_1 = 0 \tag{5-217}$$

$$\text{Sistema 2:} \quad a_2 = -2 \quad b_2 = 1 \quad c_2 = 3 \quad d_2 = 1 \tag{5-218}$$

Para ejecutar la función **svseries** se introduce la siguiente información en el prompt de **CSAD:**

```
>>a1=[0 1; -4 -3] <CR>
>>b1=[0; 1] <CR>
>>c1=[1.5 1] <CR>
>>d1=0 <CR>
>>a2=-2 <CR>
>>b2=1 <CR>
>>c2=3 <CR>
>>d2=1 <CR>
>>[a,b,c,d]=svseries(a1,b1,c1,d1,a2,b2,c2,d2) <CR>
```

La instrucción **svseries** regresará los mismos resultados que los dados en las ecuaciones (5-215) y (5-216).

5-9-3 Descomposición en paralelo

Cuando el denominador de la función de transferencia está en forma factorizada, la función de transferencia se puede expandir en fracciones parciales. El diagrama de estado resultante consistirá de sistemas simples de primero o segundo orden conectados en paralelo, lo que conlleva a las ecuaciones de estado en la FCD o en la FCJ, la última para el caso con valores característicos de orden múltiple.

Considere que el sistema de segundo orden está representado por la función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Q(s)}{(s + a_1)(s + a_2)} \tag{5-219}$$

en donde $Q(s)$ es un polinomio de orden menor a 2, y a_1 y a_2 son reales y diferentes. Aun cuando analíticamente a_1 y a_2 pueden ser complejas, en forma realista, los números complejos son difíciles de trabajar en una computadora. La ecuación (5-219) se expande en fracciones parciales como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_1}{s + a_1} + \frac{K_2}{s + a_2} \tag{5-220}$$

en donde K_1 y K_2 son constantes reales.

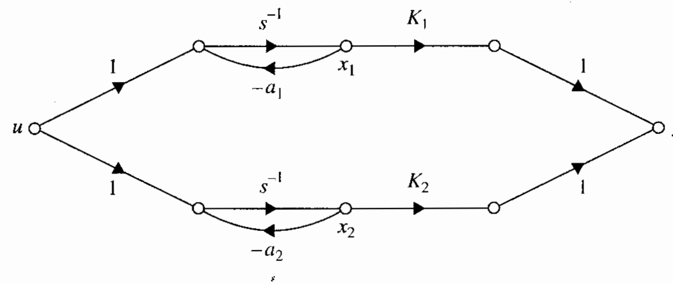


Figura 5-12 Diagrama de estado de la función de transferencia de la ecuación (5-219) mediante descomposición en paralelo.

El diagrama de estado del sistema se dibuja mediante la combinación en paralelo de los diagramas de estado de cada uno de los términos de primer orden en la ecuación (5-220), como se muestra en la Fig. 5-12. Las ecuaciones dinámicas del sistema son:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{5-221}$$

$$y(t) = [K_1 \quad K_2]\mathbf{x}(t) \tag{5-222}$$

Por lo que las ecuaciones de estado está en la FCD.

La conclusión es que para funciones de transferencia con polos diferentes, la descomposición en paralelo llevará a las ecuaciones de estado a la FCD. Para las funciones de transferencia con valores característicos de orden múltiple, la descomposición en paralelo de un diagrama de estado con un número mínimo de integradores llevará a las ecuaciones de estado en la FCJ. El siguiente ejemplo clarificará este punto.

Ejemplo 5-17

Considere la siguiente función de transferencia y su expansión en fracciones parciales:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + 6s + 5}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \tag{5-223}$$

Observe que la función de transferencia es de tercer orden, y aunque el orden total de los términos en el segundo miembro de la ecuación (5-223) es cuatro, sólo tres integradores se deben utilizar en el diagrama de estado, como se muestra en la Fig. 5-13. El número mínimo de tres integradores se utiliza, con un integrador compartido por dos canales. Las ecuaciones de estado del sistema se escriben directamente de la Fig. 5-13.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad (5\text{-}224)$$

que se reconoce como la FCJ. ▲

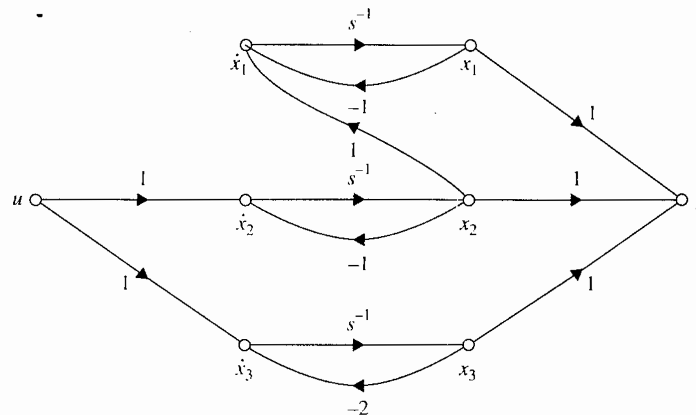


Figura 5-13 Diagrama de estado de la función de transferencia de la ecuación (5-223) mediante descomposición en paralelo.

Soluciones por computadora

La función **svparall** de las herramientas de **CSAD** se puede emplear para encontrar las ecuaciones dinámicas de dos sistemas con valores característicos diferentes conectados en paralelo. Este procedimiento es similar al de la función **svseries,** por lo que no se presenta en este caso.

5-10 Controlabilidad de sistemas lineales

Los conceptos de **controlabilidad** y **observabilidad** presentados primero por Kalman [3] juegan un papel importante en los aspectos teórico y práctico, del control moderno. Las condiciones sobre controlabilidad y observabilidad gobiernan la existencia de una solución de un problema de control óptimo. Esto parece ser la diferencia básica entre la teoría de control óptimo y la teoría clásica de control. En esta última, las técnicas de diseño son dominadas por métodos de prueba y error, por lo que dado un conjunto de especificaciones de diseño, el diseñador desconoce en el inicio si existe solución. Por otro lado, la teoría de control óptimo,

para la mayor parte de los problemas, cuenta con criterios para determinar desde el inicio si la solución de diseño existe o no para los parámetros del sistema y los objetivos del diseño.

Se mostrará que la condición de controlabilidad de un sistema está íntimamente relacionada con la existencia de soluciones de la realimentación de estado con el propósito de ubicar los valores característicos del sistema en forma arbitraria. El concepto de observabilidad se relaciona con la condición de observación o estimación de las variables de estado a partir de las variables de salida, los cuales son generalmente medibles.

Una forma de ilustrar la motivación para la investigación de la controlabilidad y observabilidad se puede realizar al hacer referencia al diagrama de bloques que se muestra en la Fig. 5-14. La Fig. 5-14(a) muestra un sistema con la dinámica del proceso descrito por:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(\mathbf{t}) \tag{5-225}$$

El sistema en lazo cerrado se forma al realimentartar las variables de estado a través de la matriz constante de ganancia de realimentación **K,** Por lo que, de la Fig. 5-14:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{Kx}(\mathrm{t}) + \mathbf{r}(t) \tag{5-226}$$

en donde **K** es la matriz de realimentación de $p \times n$ con elementos constantes. El sistema en lazo cerrado se describe mediante:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) + \mathbf{Br}(t) \tag{5-227}$$

Este problema también se conoce como **diseño por ubicación de polos** mediante la realimentación del estado. En este caso, el objetivo del diseño es encontrar la matriz de realimentación **K,** tal que los valores característicos de (**A** – **BG**), o del sistema en lazo cerra-

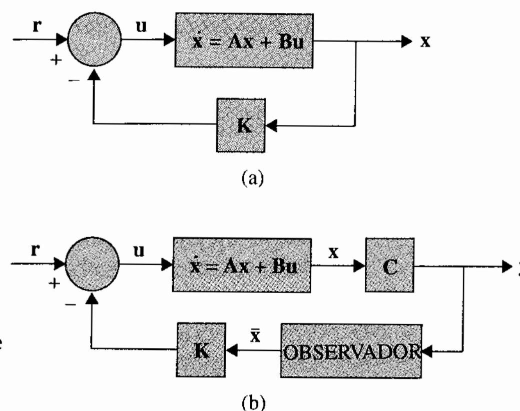


Figura 5-14 (a) Sistema de control con realimentación del estado. (b) Sistema de control con observador y realimentación del estado.

do, tengan ciertos valores prescritos. La palabra "polo" en este caso se refiere a los polos de la función de transferencia en lazo cerrado, que son los mismos que los valores característicos de (**A** – **BG**).

Posteriormente se demostrará que la existencia de la solución al diseño por ubicación de polos con valores de polos asignados en forma arbitraria, a través de la realimentación del estado, está basada directamente en la controlabilidad de los estados del sistema. El resultado es que *si el sistema de la ecuación (5-225) es controlable, existe una matriz de realimentación constante* **K** *que permite que los valores característicos de* (**A** – **BG**) *sean asignados en forma arbitraria.*

Una vez que se ha diseñado el sistema en lazo cerrado, se debe tratar con el problema práctico de implantar la realimentación de las variables de estado. Existen dos problemas prácticos en la implantación del control por realimentación del estado. Uno es que el número de variables de estado puede ser excesivo, por lo que el costo de detectar cada una de estas variables de estado para realimentación puede resultar prohibitivo. El otro problema es que no todas las variables de estado están físicamente accesibles. Por lo tanto, podría ser necesario diseñar y construir un **observador** que estime el vector de estado a partir del vector de salida $\mathbf{y}(t)$. La Fig. 5-14(b) muestra el diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado con un observador. El vector de estado observado $\overline{\mathbf{x}}(t)$ se utiliza para generar el control $\mathbf{u}(t)$ a través de la matriz de realimentación **K.** *La condición de que tal observador pueda ser diseñado para el sistema se conoce como observabilidad del sistema.*

5-10-1 Concepto general de controlabilidad

El concepto de controlabilidad se puede enunciar con referencia al diagrama de bloques de la Fig. 5-15. *Se dice que el proceso es* ***completamente controlable*** *si cada variable de estado del proceso se puede controlar para llegar a un cierto objetivo en un tiempo finito, a través de algún control no restringido* $\mathbf{u}(t)$. En forma intuitiva, es sencillo entender que si una de las variables de estado es independiente del control $\mathbf{u}(t)$, no habría forma de dirigir esta variable de estado en particular al estado deseado en un tiempo finito por medio de un esfuerzo del control. Por tanto, se dice que este estado en particular es no controlable, y que el sistema no es completamente controlable, o simplemente es no controlable, mientras exista por lo menos un estado no controlable.

Como un ejemplo sencillo de un sistema no controlable, la Fig. 5-16 ilustra el diagrama de estado de un sistema lineal con dos variables de estado. Debido a que el control $u(t)$ afecta solamente al estado $x_1(t)$, el estado $x_2(t)$ es no controlable. En otras palabras, sería imposible llevar a $x_2(t)$ de un estado inicial $x_2(t_0)$ a un estado deseado $x_2(t_f)$ en un intervalo de tiempo finito $t_f - t_0$ mediante el control $u(t)$. Por tanto, se dice que el sistema no es completamente controlable.

El concepto de controlabilidad mencionado anteriormente se refiere a los estados y se conoce como **controlabilidad del estado.** La controlabilidad también se puede definir para las salidas del sistema, de tal forma que existe una diferencia entre la controlabilidad del estado y la controlabilidad de la salida.

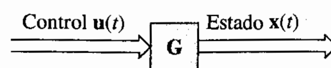


Figura 5-15 Sistema lineal e invariante con el tiempo.

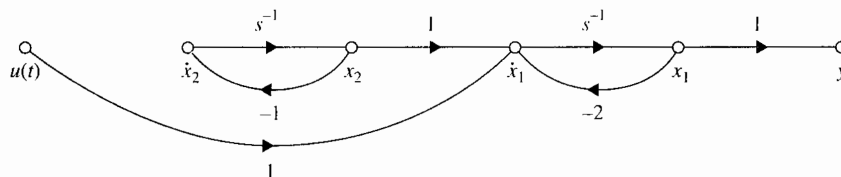


Figura 5-16 Diagrama de estado del sistema que es de estado no controlable.

5-10-2 Definición de controlabilidad del estado

Considere que un sistema lineal e invariante con el tiempo se describe mediante las siguientes ecuaciones dinámicas:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \tag{5-228}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t) \tag{5-229}$$

en donde $\mathbf{x}(t)$ es el vector de estado de $n \times 1$, $\mathbf{u}(t)$ es el vector de entrada de $\mathbf{r} \times 1$, y el vector de salida $\mathbf{y}(t)$ es de $\mathbf{p} \times 1$. **A, B, C** y **D** son los coeficientes de las dimensiones apropiadas.

Se dice que el estado $\mathbf{x}(t)$ *es controlable en* $t = t_0$ *si existe una entrada continua por intervalos* $\mathbf{u}(t)$ *que moverá al estado a cualquier estado final* $\mathbf{x}(t_f)$ *en un tiempo finito* $(t_f - t_0) \geq 0$. *Si cada estado* $\mathbf{x}(t_0)$ *del sistema es controlable en un intervalo de tiempo finito, se dice que es un sistema de estado completamente controlable o simplemente controlable.*

El siguiente teorema demuestra que la condición de controlabilidad depende de los coeficientes matrices del sistema, **A** y **B.** El teorema también proporciona un método de prueba para la controlabilidad del estado.

▲ **Teorema 5-1**

Para que el sistema descrito por la ecuación de estado de la ecuación (5-228) sea de **estado completamente controlable,** es necesario y suficiente que la siguiente **matriz de controlabilidad** de $n \times nr$ tenga rango n:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \tag{5-230}$$

Ya que las matrices **A** y **B** están involucradas, algunas veces se dice que el par [**A, B**] es controlable, lo que implica que **S** es de rango n.

La prueba para este teorema se da en cualquier libro de texto estándar de sistemas de control óptimo [3]. La idea es iniciar con la ecuación de transición estados de la ecuación (5-44) y entonces proceder a mostrar que la ecuación (5-230) debe cumplirse para que todos los estados sean accesibles mediante la entrada.

Aunque el criterio de la controlabilidad del estado dado en el Teorema 5-1 es bastante directo, no es muy sencillo emplearlo en forma manual para sistemas de orden superior y/o sistemas con muchas entradas. Si **S** no es cuadrada, se puede formar la matriz **SS'**, que es de $n \times n$; entonces si **SS'** es no singular, **S** tiene rango n.

5-10-3 Pruebas alternas para controlabilidad

Existen otros métodos alternos para probar la controlabilidad, y algunos de éstos pueden ser más convenientes para aplicarse que la condición de la ecuación (5-230).

▲ Teorema 5-2

Para un sistema SISO descrito por la ecuación de estado de la ecuación (5-228), el par [**A, B**] es completamente controlable si **A** y **B** están en la FCC o son transformables a la FCC mediante una transformación de similitud.

La prueba de este teorema es directa, ya que como se especificó en la Sec. 5-8 la transformación FCC requiere que la matriz de controlabilidad **S** sea no singular. Debido a que la transformación FCC en la Sec. 5-8 se definió únicamente para sistemas SISO, el teorema sólo se aplica para este tipo de sistemas.

▲ Teorema 5-3

Para un sistema descrito por la ecuación de estado de la ecuación (5-228), si **A** está en la FCD o FCJ, el par [**A, B**] es completamente controlable si todos los elementos en los renglones de **B** que corresponden al último renglón de cada bloque de Jordan no son cero.

La prueba de este teorema se logra directamente de la definición de controlabilidad. Se supone que **A** es diagonal y que tiene valores característicos distintos. Entonces el par [**A, B**] es controlable si **B** no tiene algún renglón con todos los elementos cero. La razón es que si **A** es diagonal, todos los estados están desacoplados, y si cualquier renglón de **B** contiene todos los elementos en cero, el estado correspondiente no podría ser afectado por ninguna de las entradas, y el estado sería no controlable.

Para un sistema en la FCJ con las matrices **A** y **B** ilustradas abajo, para la controlabilidad, sólo los elementos en el renglón **B** que corresponden al último renglón del bloque de Jordan deben ser diferentes de cero. Los elementos en los otros renglones de **B** no necesitan ser diferentes de cero, ya que los estados correspondientes están todavía acoplados a través de los unos en los bloques de Jordan de **A**:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right] \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} \tag{5-231}$$

Por tanto, la condición de controlabilidad para **A** y **B** de la ecuación (5-231), es que $b_{31} \neq 0$, $b_{32} \neq 0$, $b_{41} \neq 0$ y $b_{42} \neq 0$.

Ejemplo 5-18

Las siguientes matrices son para un sistema con dos valores característicos idénticos, pero la matriz A es diagonal:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \tag{5-232}$$

El sistema es no controlable, debido a que las dos ecuaciones de estado son dependientes; esto es, no sería posible controlar los estados en forma independiente mediante la entrada. Se demuestra fácilmente que en este caso **S** = **[B AB]** es singular. ▲

Ejemplo 5-19

Considere el sistema mostrado en la Fig. 5-16, que con anterioridad se expuso como no controlable. Investigue el mismo sistema empleando la condición de la ecuación (5-230). Las ecuaciones de estado del sistema están escritas en la forma de la ecuación (5-228) con:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5-233}$$

Por lo que, de la ecuación (5-230), la matriz de controlabilidad es:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5-234}$$

que es singular, y el sistema es no controlable. ▲

Ejemplo 5-20

Considere que un sistema de tercer orden tiene las matrices de coeficientes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5-235}$$

La matriz de controlabilidad es:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \tag{5-236}$$

que es singular. Por lo que el sistema es no controlable.

Los valores característicos de **A** son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 1$. La FCJ de **A** y **B** se obtiene con la transformación $\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\,\overline{\mathbf{x}}(t)$, en donde:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{5-237}$$

Entonces:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5-238}$$

Ya que el último renglón de $\overline{\mathbf{B}}$, que corresponde al bloque de Jordan para el valor característico λ_3, es cero, la variable de estado transformada $\overline{x}_3(t)$ es no controlable. De la matriz de transformación **T** en la ecuación (5-237), $x_2 = \overline{x}$ que significa que x_2 es no controlable en el sistema original. ▲

Soluciones por computadora

La función **svdesign** en las herramientas de **CSAD** tiene una opción que regresa la condición de controlabilidad de un sistema SISO, una vez que se introducen los parámetros de las ecuaciones dinámicas o de la función de transferencia.

5-11 Observabilidad de sistemas lineales

El concepto de observabilidad se explicó en la Sec. 5-10. Esencialmente, *un sistema es completamente observable si cada variable de estado del sistema afecta alguna de las salidas.* En otras palabras, con frecuencia es deseable obtener información sobre las variables de estado de las mediciones de las salidas y las entradas. Si cualquiera de los estados no se puede observar a partir de las mediciones de las salidas, se dice que el estado es no observable, y el sistema no es completamente observable, o simplemente no observable. La Fig. 5-17 muestra el diagrama de estado de un sistema lineal en donde el estado x_2 no está conectado en alguna forma a la salida $y(t)$. Una vez que se ha medido $y(t)$, se puede observar el estado $x_1(t)$, ya que

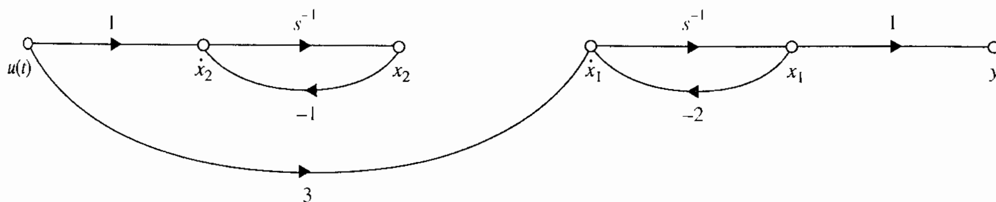


Figura 5-17 Diagrama de estado de un sistema que es no observable.

$x_1(t) = y(t)$. Sin embargo, el estado x_2 no puede ser observado de la información en $y(t)$. Por lo que el sistema es no observable.

5-11-1 Definición de observabilidad

Dado un sistema lineal e invariante con el tiempo que se describe mediante las ecuaciones dinámicas de las ecuaciones (5-228) y (5-229), se dice que el estado $\mathbf{x}(t_0)$ *es observable si dada cualquier entrada* $u(t)$*, existe un tiempo finito* $t_f \geq t_0$ *tal que del conocimiento de* $\mathbf{u}(t)$ *para* $t_0 \leq t < t_f$*, las matrices* **A, B, C** y **D**; *y la salida* $\mathbf{y}(t)$ *para* $t_0 \leq t < t_f$ *son suficientes para determinar* $\mathbf{x}(t_0)$. *Si cada estado del sistema es observable para un* t_f *finito, se dice que el sistema es completamente observable, o simplemente observable.*

El siguiente teorema demuestra que la condición de observabilidad depende de las matrices del sistema **A** y **C.** El teorema también proporciona un método para probar la observabilidad.

▲ **Teorema 5-4**

Para que el sistema descrito por las ecuaciones (5-228) y (5-229) sea completamente observable, es necesario y suficiente que la siguiente **matriz de observabilidad** de $n \times np$ tenga un rango n:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{5-239}$$

La condición también se conoce como que el par [**A, C**] es observable. En particular, si el sistema tiene sólo una salida, **C** es una matriz renglón de $1 \times n$; **V** es una matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces el sistema es completamente observable si **V** es no singular.

La prueba de este teorema no se proporciona. Dicha prueba se basa en el principio de que la ecuación (5-239) debe ser satisfecha para que $\mathbf{x}(t_0)$ pueda ser determinada únicamente de la salida $\mathbf{y}(t)$.

5-11-2 Pruebas alternas sobre observabilidad

Como con la controlabilidad, existen otros métodos alternos para probar la observabilidad. Éstos se describen a continuación.

▲ **Teorema 5-5**

Para un sistema SISO descrito por las ecuaciones dinámicas de las ecuaciones (5-228) y (5-229), el par [**A, C**] es completamente observable si **A** y **C** están en la FCO o son transformables a la FCO mediante una transformación de similitud.

La prueba de este teorema es directa, ya que se estableció en la Sec. 5-8 que la transformación FCO requiere que la matriz de observabilidad **V** sea no singular.

▲ Teorema 5-6

Para un sistema descrito por las ecuaciones dinámicas de las ecuaciones (5-228) y (5-229), si **A** está en la FCD o FCJ, el par [**A, C**] es completamente observable si todos los elementos en las columnas de **C** que corresponden al primer renglón de cada bloque de Jordan son diferentes de cero.

Observe que este teorema es un dual de la prueba de controlabilidad dada en el Teorema 5-3. Si el sistema tiene valores característicos distintos, **A** es diagonal; entonces la condición de observabilidad es que ninguna de las columnas de **C** pueda contener todos ceros.

Ejemplo 5-21

Considere el sistema que se muestra en la Fig. 5-17, el cual se definió anteriormente como no observable. Las ecuaciones dinámicas del sistema están expresadas en la forma de las ecuaciones (5-228) y (5-229), con:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0] \tag{5-240}$$

Por lo que la matriz de observabilidad es:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \tag{5-241}$$

la cual es singular. Por lo que el par [**A, C**] es no controlable. De hecho, ya que **A** es de FCD y la segunda columna de **C** es cero, esto significa que el estado $x_2(t)$ es no observable, como se concluye de la Fig. 5-17. ▲

Soluciones por computadora

La función **svdesign** en las herramientas de **CSAD** tiene una opción que regresa la condición de observabilidad de un sistema SISO una vez que se introducen los parámetros de las ecuaciones dinámicas o de la función de transferencia.

5-12 Relación entre controlabilidad, observabilidad y funciones de transferencia

En el análisis clásico de sistemas de control, las funciones de transferencia se utilizan para modelar sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Aún cuando la controlabilidad y la observabilidad son conceptos y herramientas de la teoría de control moderna, se debe mostrar que están estrechamente relacionadas con las propiedades de las funciones de transferencia.

▲ Teorema 5-7

Si la función de transferencia entrada-salida de un sistema lineal tiene cancelación de polos y ceros, el sistema será, o no controlable o no observable, o ambos, dependiendo de cómo se definan las variables de estado. Por otra parte, si la función de transferencia entrada-salida no tiene cancelación de polos y ceros, el sistema siempre se puede representar mediante las ecuaciones dinámicas como un sistema totalmente controlable y observable.

No se da la prueba para este teorema. La importancia de este teorema es que si un sistema lineal se modela mediante la función de transferencia que no tiene cancelación de polos y ceros, se asegura que es un sistema controlable y observable, no importando cómo se obtenga el modelo en variables de estado. Se ampliará este punto con referencia al siguiente sistema SISO.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \qquad D = 0 \tag{5-242}$$

Ya que **A** es una matriz diagonal, las condiciones de controlabilidad y observabilidad de los cuatro estados se determinan mediante inspección. Éstas son:

x_1: controlable y observable (C y O)
x_2: controlable, pero no observable (C pero NO)
x_3: no controlable pero observable (NC pero O)
x_4: no controlable y no observable (NC y NO)

El diagrama de bloques del sistema de la Fig. 5-18 muestra la descomposición de la FCD del sistema. Claramente, la función de transferencia del sistema controlable y observable debe ser:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1} \tag{5-243}$$

mientras que la función de transferencia que corresponde a la dinámica descrita en la ecuación (5-242) es:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{(s+2)(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} \tag{5-244}$$

que tiene tres cancelaciones de polos y ceros. Este ejemplo simple ilustra que la función de transferencia de "orden mínimo" sin cancelación de polos y ceros es el único componente que corresponde a un sistema que es controlable y observable.

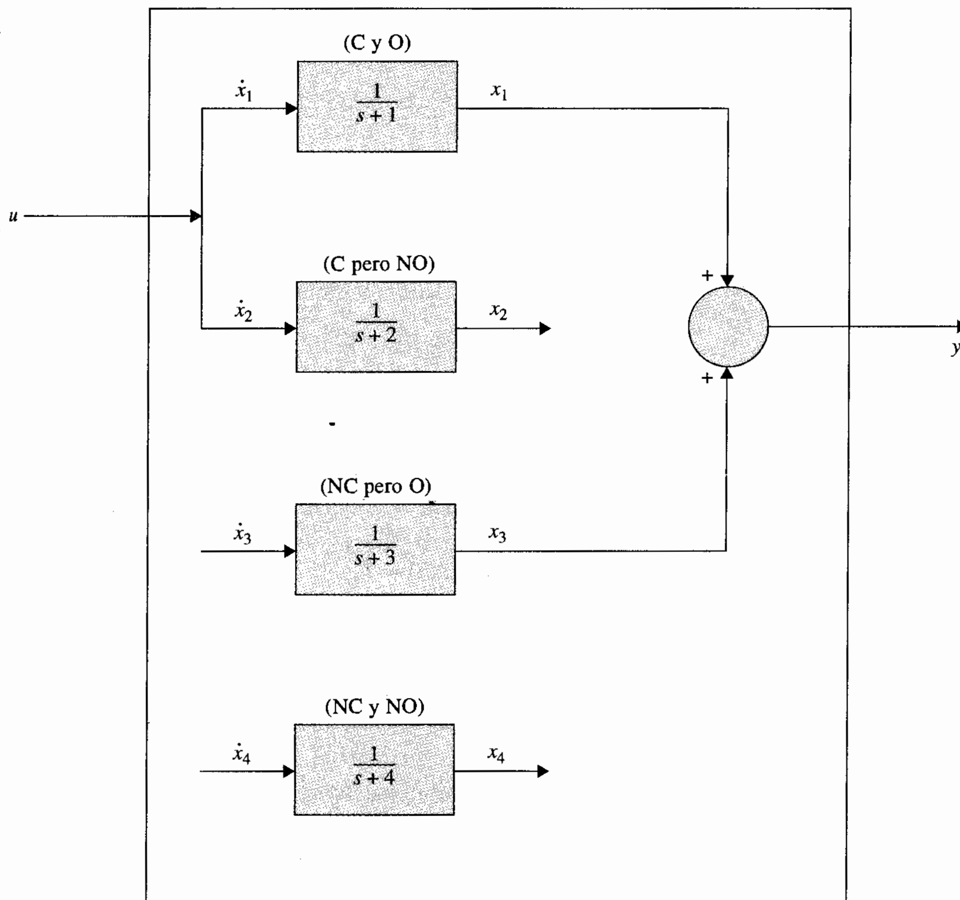


Figura 5-18 Diagrama de bloques que muestra los componentes controlable, no controlable, observable y no observable del sistema descrito en la ecuación (5-242).

Ejemplo 5-22

Considere la función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} \tag{5-245}$$

que es una forma reducida de la ecuación (5-244). La ecuación (5-245) se descompone en la FCC y en la FCO como sigue (la función **svdesign** de las herramientas de **CSAD** se puede emplear para estas operaciones):

$$CCF: \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1] \tag{5-246}$$

Ya que la transformación FCC se puede efectuar, el par [**A, B**] de la FCC es controlable. La matriz de observabilidad es:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad (5\text{-}247)$$

que es singular, y el par [**A, C**] de la FCC es no observable.

$$FCO: \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1] \quad (5\text{-}248)$$

Ya que la transformación FCO se puede realizar, el par [**A, C**] de la FCO es observable. Sin embargo, la matriz de controlabilidad es:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (5\text{-}249)$$

que es singular, y el par [**A, B**] de la FCO es no controlable.

La conclusión a la que se llega de este ejemplo es que dado un sistema modelado mediante una función de transferencia, las condiciones de controlabilidad y observabilidad del sistema dependen de cómo se definan las variables de estado. ▲

5-13 Teoremas invariantes sobre controlabilidad y observabilidad

Ahora se investigarán los efectos de las transformaciones de similitud sobre la controlabilidad y la observabilidad. También se investigarán los efectos de la realimentación del estado sobre la controlabilidad y la observabilidad.

▲ **Teorema 5-8.** *Teorema invariante sobre transformaciones de similitud*

Considere el sistema descrito por las ecuaciones dinámicas de las ecuaciones (5-228) y (5-229). La transformación de similitud $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\overline{\mathbf{x}}(t)$, en donde **P** es no singular, transforma las ecuaciones dinámicas a:

$$\frac{d\overline{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}}(t) + \overline{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \quad (5\text{-}250)$$

$$\overline{\mathbf{y}}(t) = \overline{\mathbf{C}}\mathbf{x}(t) + \overline{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t) \quad (5\text{-}251)$$

en donde:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} \qquad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} \quad (5\text{-}252)$$

La controlabilidad de $[\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}]$ y la observabilidad de $[\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{C}}]$ no se afectan por la transformación.

En otras palabras, la controlabilidad y la observabilidad se conservan a través de transformaciones de similitud. El teorema se comprueba fácilmente al mostrar que los rangos de $\overline{\mathbf{S}}$ y $\mathbf{S}$, y los rangos de $\overline{\mathbf{V}}$ y $\mathbf{V}$ son idénticos, en donde $\overline{\mathbf{S}}$ y $\overline{\mathbf{V}}$ son las matrices de controlabilidad y observabilidad, respectivamente, del sistema transformado.

▲ **Teorema 5-9.** *Teorema sobre controlabilidad de sistemas en lazo cerrado con realimentación del estado*

Si el sistema en lazo abierto:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \qquad (5\text{-}253)$$

es completamente controlable, el sistema en lazo cerrado obtenido a través de realimentación del estado:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t) \qquad (5\text{-}254)$$

por lo que las ecuaciones de estado se convierten en:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{r}(t) \qquad (5\text{-}255)$$

es también completamente controlable. Por otra parte, si **[A, B]** es no controlable, no existe **K** que haga que el par **[A – BK, B]** sea controlable. En otras palabras, si un sistema en lazo abierto es no controlable, no puede convertirse en controlable a través de la realimentación del estado.

▲ ***Prueba*** La controlabilidad de [**A, B**] implica que existe un control $\mathbf{u}(t)$ en el intervalo de tiempo $[t_0, t_f]$ de tal forma que el estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ se mueve al estado final $\mathbf{x}(t_f)$ en el intervalo de tiempo finito $t_f - t_0$. La ecuación (5-254) se puede escribir como:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) \qquad (5\text{-}256)$$

que es el control del sistema en lazo cerrado. Por tanto, si existe $\mathbf{u}(t)$ que pueda mover a $\mathbf{x}(t_0)$ a cualquier $\mathbf{x}(t_f)$ en un tiempo finito, no se podrá encontrar una entrada $\mathbf{r}(t)$ que realice lo mismo a $\mathbf{x}(t)$, ya que de otra forma $\mathbf{u}(t)$ se puede establecer como en la ecuación (5-254) para controlar el sistema en lazo abierto.

▲ **Teorema 5-10.** *Teorema sobre observabilidad de sistemas en lazo cerrado con realimentación del estado*

Si un sistema en lazo abierto es controlable y observable, la realimentación del estado de la forma de la ecuación (5-254) puede destruir la observabilidad. En otras palabras, la observabilidad de sistemas en lazo abierto y en lazo cerrado debido a la realimentación del estado no están relacionadas.

El siguiente ejemplo ilustra la relación entre observabilidad y realimentación del estado.

Ejemplo 5-23

Sean las matrices de coeficientes de un sistema lineal:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 2] \tag{5-257}$$

Se puede mostrar que el par $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ es controlable y $[\mathbf{A}, \mathbf{D}]$ es observable. La realimentación del estado se define como:

$$u(t) = r(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t) \tag{5-258}$$

en donde:

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2] \tag{5-259}$$

Entonces el sistema en lazo cerrado se describe por la ecuación de estado:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t) \tag{5-260}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 - k_2 \\ -2 - k_1 & -3 - k_2 \end{bmatrix} \tag{5-261}$$

La matriz de observabilidad del sistema en lazo cerrado es:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -k_1 - 4 & -3k_2 - 5 \end{bmatrix} \tag{5-262}$$

El determinante de $\mathbf{V}$ es:

$$|\mathbf{V}| = 6k_1 - 3k_2 + 3 \tag{5-263}$$

Por lo que si k_1 y k_2 se seleccionan para que $|\mathbf{V}| = 0$, el sistema en lazo cerrado sería no controlable. ▲

5-14 Ecuaciones de estado de sistemas lineales en tiempo discreto

Así como para sistemas en tiempo continuo, la forma moderna de modelar un sistema en tiempo discreto es mediante ecuaciones de estado discretas. Como se explicó anteriormente, cuando se trata con sistemas en tiempo discreto, a menudo se enfrentan dos situaciones diferentes. La primera es que el sistema contiene componentes en tiempo continuo, pero las señales en ciertos puntos del sistema son discretos con respecto al tiempo, debido a operaciones de muestreo y retención. En este caso los componentes del sistema están descritos por ecuaciones diferenciales, pero debido a los datos de tiempo discreto, las ecuaciones diferenciales se convierten a discretas para producir un conjunto de ecuaciones en diferencias. La segunda situación involucra sistemas que son completamente discretos con respecto al tiempo, y la dinámica del sistema debe ser de ecuaciones en diferencias desde un principio.

5-14-1 Ecuaciones de estado discretas

Considere el sistema de control en tiempo discreto con un dispositivo de muestreo y retención, como se muestra en la Fig. 5-19. Las señales típicas que aparecen en varios puntos en el sistema se muestran en la figura. La señal de salida $y(t)$, comúnmente es una señal en tiempo

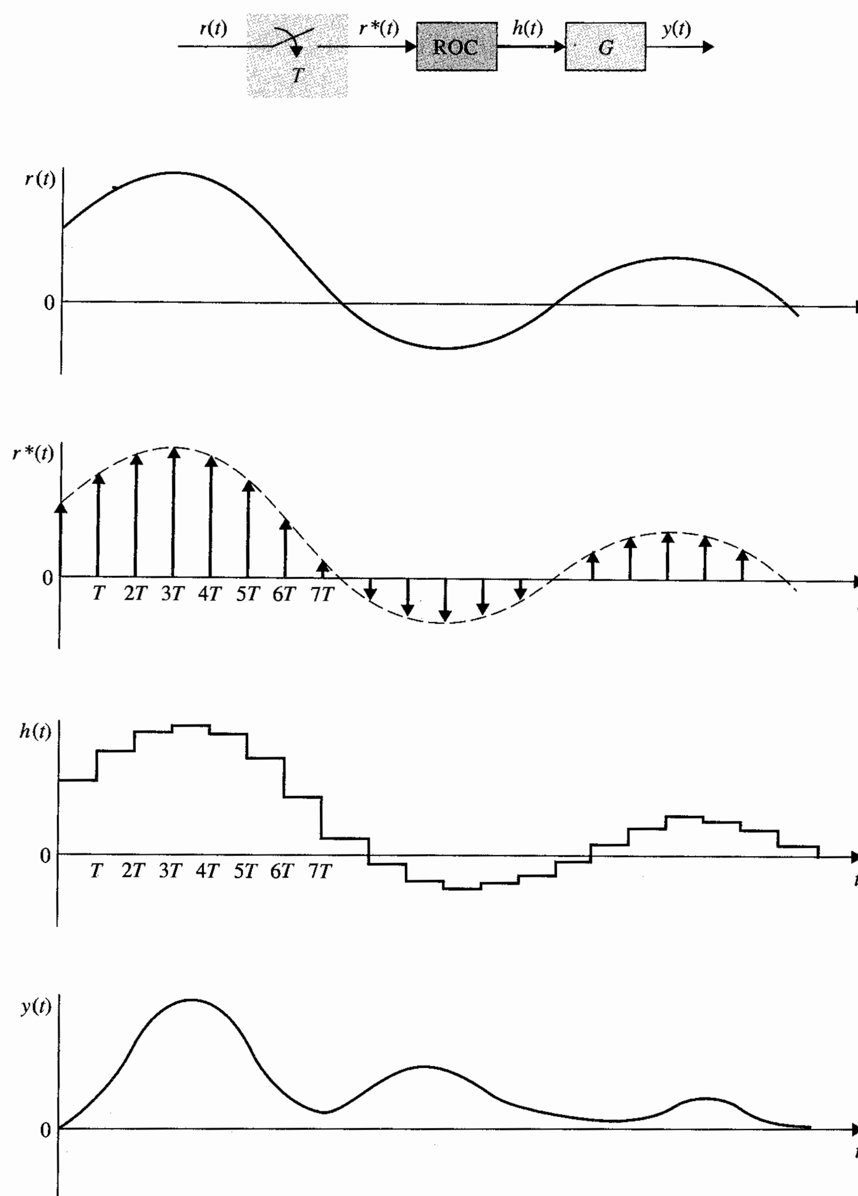


Figura 5-19 Sistema en tiempo discreto con muestreo y retención.

continuo. La salida del dispositivo de muestreo y retención, $h(t)$, es una secuencia de escalones. Por tanto, se puede escribir:

$$h(t) = h(kT) = r(kT) \tag{5-264}$$

para $kT \leq t < (k+1)T$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Ahora el proceso lineal G se describe mediante la ecuación de estado y la ecuación de salida:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}h(t) \tag{5-265}$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}h(t) \tag{5-266}$$

en donde $\mathbf{x}(t)$ es el vector de estado de $n \times n$, y $h(t)$ y $y(t)$ son la entrada y la salida escalares, respectivamente. Las matrices **A, B, C** y **D** son matrices de coeficientes. Utilizando la ecuación (5-44), la ecuación de transición de estados es:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\phi}(t - \tau)\mathbf{B}h(\tau)\, d\tau \tag{5-267}$$

para $t \geq t_0$. Si el único interés es la respuesta en los instantes de muestreo, se permite que $t = (k+1)T$ y $t_0 = kT$. Entonces la ecuación (5-267) se convierte en:

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \boldsymbol{\phi}(T)\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \boldsymbol{\phi}[(k+1)T - \tau]\mathbf{B}h(\tau)\, d\tau \tag{5-268}$$

Ya que $h(t)$ es constante por partes, como se definió en la ecuación (5-264), la entrada $h(\tau)$ en la ecuación (5-268) se puede sacar del signo de la integral. La ecuación (5-268) se escribe como:

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \boldsymbol{\phi}(T)\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \boldsymbol{\phi}[(k+1)T - \tau]\mathbf{B}\, d\tau\, h(kT) \tag{5-269}$$

o

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \boldsymbol{\phi}(T)\mathbf{x}(kT) + \boldsymbol{\theta}(T)h(kT) \tag{5-270}$$

en donde:

$$\boldsymbol{\theta}(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} \boldsymbol{\phi}[(k+1)T - \tau]\mathbf{B}\, d\tau = \int_{0}^{T} \boldsymbol{\phi}(T - \tau)\mathbf{B}\, d\tau \tag{5-271}$$

La ecuación (5-270) es de la forma de un conjunto de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden en forma matricial, y se conoce como la **ecuación matricial de estado discreta.**

5-14-2 Solución de las ecuaciones de estado discretas: ecuaciones de transición de estados discretas

Las ecuaciones de estado discretas representadas por la ecuación (5-270) se pueden resolver mediante un procedimiento simple recurrente. Al hacer que $k = 0, 1, 2, \ldots$ en forma sucesiva en la ecuación (5-270), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$k = 0: \quad \mathbf{x}(T) = \boldsymbol{\phi}(T)\mathbf{x}(0) + \boldsymbol{\theta}(T)h(0) \tag{5-272}$$

$$k = 1: \quad \mathbf{x}(2T) = \boldsymbol{\phi}(2T) = \boldsymbol{\phi}(T)\mathbf{x}(T) + \boldsymbol{\theta}(T)h(T) \tag{5-273}$$

$$k = 2: \quad \mathbf{x}(3T) = \boldsymbol{\phi}(3T) = \boldsymbol{\phi}(T)\mathbf{x}(2T) + \boldsymbol{\theta}(T)h(2T) \tag{5-274}$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$k = n-1: \quad \mathbf{x}(nT) = \boldsymbol{\phi}(T)\mathbf{x}[(n-1)T] + \theta(T)h[(n-1)T] \tag{5-275}$$

Sustituyendo la ecuación (5-272) en la ecuación (5-273), y después la ecuación (5-273) en la ecuación (5-274), y así sucesivamente, se obtiene la siguiente solución para la ecuación (5-270):

$$\mathbf{x}(nT) = \boldsymbol{\phi}^n(T)\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{\phi}^{n-i-1}(T)\boldsymbol{\theta}(T)h(iT) \tag{5-276}$$

en donde, de la ecuación (5-36), $\boldsymbol{\phi}^n(T) = [\boldsymbol{\phi}(T)]^n = \boldsymbol{\phi}(nT)$.

La ecuación (5-276) se define como la **ecuación de transición de estados discreta** del sistema en tiempo discreto. Es interesante notar que la ecuación (5-276) es análoga a su contraparte en tiempo continuo de la ecuación (5-41). La ecuación de transición de estados de la ecuación (5-267) describe el estado del sistema de la Fig. 5-19 para todos los valores de t, mientras que la ecuación de transición de estados discreta de la ecuación (5-276) describe solamente los estados en los instantes de muestreo $t = nT$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Con nT considerado como el tiempo inicial, donde n es cualquier entero positivo, la ecuación de transición de estado es:

$$\mathbf{x}[(n+N)T] = \boldsymbol{\phi}^N(T)\mathbf{x}(nT) + \sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{\phi}^{N-i-1}(T)\boldsymbol{\theta}(T)h[(n+i)T] \tag{5-277}$$

en donde N es un entero positivo.

La salida del sistema en los instantes de muestreo se obtiene al sustituir $t = nT$ y la ecuación (5-276) en la ecuación (5-266), dando por resultado:

$$\begin{aligned} y(nT) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(nT) + \mathbf{D}h(nT) \\ &= \mathbf{C}\boldsymbol{\phi}(nT)\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{\phi}[(n-i-1)T]\boldsymbol{\theta}(T)h(iT) + \mathbf{D}h(nT) \end{aligned} \tag{5-278}$$

Una ventaja significativa del método de variables de estado sobre el método de la transformada z es que puede modificarse fácilmente para describir los estados y la salida entre los instantes de muestreo. En las ecuaciones (5-267), si se considera que $t = (n + \Delta)T$, donde $0 < \Delta \leq 1$ y $t_0 = nT$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}[(n + \Delta)T] &= \boldsymbol{\phi}(\Delta T)\mathbf{x}(nT) + \int_{nT}^{(n+\Delta)T} \boldsymbol{\phi}[(n + \Delta)T - \tau]\mathbf{B}\, d\tau\, h(nT) \\ &= \boldsymbol{\phi}(\Delta T)\mathbf{x}(nT) + \theta(\Delta T)h(nT)\end{aligned} \tag{5-279}$$

Al variar el valor de Δ entre 0 y 1, la información sobre las variables de estado entre los instantes de muestreo se describe por completo en la ecuación (5-279).

Cuando un sistema lineal tiene sólo señales discretas a lo largo del sistema, su dinámica se puede describir a través de un conjunto de ecuaciones de estado discretas:

$$\mathbf{x}[(k + 1)T] = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{r}(kT) \tag{5-280}$$

y ecuaciones de salida:

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{r}(kT) \tag{5-281}$$

en donde **A, B, C** y **D** son coeficientes matrices de dimensiones apropiadas. Observe que la ecuación (5-280) básicamente es de la misma forma que la ecuación (5-270). La única diferencia en las dos situaciones es el punto inicial de la representación del sistema. En el caso de la ecuación (5-270), el punto de inicio son las ecuaciones de estado en tiempo continuo de la ecuación (5-265); $\boldsymbol{\phi}(T)$ y $\boldsymbol{\theta}(T)$ se determinan de las matrices **A** y **B** y deben satisfacer las condiciones y propiedades de la matriz de transición de estados. En el caso de la ecuación (5-280), la misma ecuación representa una descripción completa del sistema en tiempo discreto, y no existen restricciones en las matrices **A** y **B.**

La solución de la ecuación (5-280) sigue directamente de aquella de la ecuación (5-270), y es:

$$\mathbf{x}(nT) = \mathbf{A}^n\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-i-1}\mathbf{B}\mathbf{r}(iT) \tag{5-282}$$

en donde:

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{AAAA} \cdots \mathbf{A}}_{n} \tag{5-283}$$

5-15 Solución mediante la transformada z de las ecuaciones de estado discretas

En la Sec. 2-12 se ilustró la solución de una ecuación de estado discreta simple mediante el método de la transformada z. En esta sección las ecuaciones de estado discretas en forma matricial de sistemas de n-ésimo orden se resuelven mediante la transformación z. Considere las ecuaciones de estado discretas:

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{r}(kT) \qquad (5\text{-}284)$$

Tomando la transformada z en ambos miembros de la última ecuación, se obtiene:

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\mathbf{R}(z) \qquad (5\text{-}285)$$

Al resolver para $\mathbf{X}(z)$ de la última ecuación, se obtiene:

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{R}(z) \qquad (5\text{-}286)$$

Tomando la transformada z inversa en ambos miembros de la ecuación (5-286), se tiene:

$$\mathbf{x}(nT) = \mathscr{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z]\mathbf{x}(0) + \mathscr{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{R}(z)] \qquad (5\text{-}287)$$

Para realizar la operación de la transformada z inversa de la ecuación (5-287), la transformada z de $\mathbf{A}^n$ se escribe como:

$$\mathscr{Z}(\mathbf{A}^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n z^{-n} = \mathbf{I} + \mathbf{A}z^{-1} + \mathbf{A}^2 z^{-2} + \cdots \qquad (5\text{-}288)$$

Al premultiplicar previamente ambos miembros de la ecuación (5-288) por $\mathbf{A}z^{-1}$ y al restar el resultado de la ecuación (5-288), se obtiene:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}z^{-1})\mathscr{Z}(\mathbf{A}^n) = \mathbf{I} \qquad (5\text{-}289)$$

Por tanto, resolviendo para $\mathscr{Z}(\mathbf{A}^n)$ de la ecuación (5-289) resulta:

$$\mathscr{Z}(\mathbf{A}^n) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}z^{-1})^{-1} = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z \qquad (5\text{-}290)$$

o

$$\mathbf{A}^n = \mathscr{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z] \qquad (5\text{-}291)$$

La ecuación (5-291) representa una forma de encontrar $\mathbf{A}^n$ utilizando el método de la transformada z. Igualmente se puede probar que:

$$\mathscr{Z}^{-1}[z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BR}(z)] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-i-1}\mathbf{Br}(iT) \quad (5\text{-}292)$$

Ahora, se sustituyen las ecuaciones (5-291) y (5-292) por la ecuación (5-287), y $\mathbf{x}(kT)$ se convierte en:

$$\mathbf{x}(nT) = \mathbf{A}^n\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-i-1}\mathbf{Br}(iT) \quad (5\text{-}293)$$

que es idéntica a la ecuación (5-281).

5-15-1 Matriz de funciones de transferencia y la ecuación característica

Una vez que se modela un sistema en tiempo discreto mediante las ecuaciones dinámicas de las ecuaciones (5-280) y (5-281), la relación de función de transferencia del sistema se puede expresar en términos de las matrices de coeficientes. Al establecer el estado inicial $\mathbf{x}(0)$ en cero, la ecuación (5-286) se convierte en:

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BR}(z) \quad (5\text{-}294)$$

Al sustituir la ecuación (5-294) en la versión de la transformada z de la ecuación (5-281), se tiene:

$$\mathbf{Y}(z) = [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{R}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{R}(z) \quad (5\text{-}295)$$

en donde la matriz de funciones de transferencia del sistema se define como:

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (5\text{-}296)$$

o

$$\mathbf{G}(z) = \frac{\mathbf{C}[\text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} + |z\mathbf{I} - \mathbf{A}|\mathbf{D}]}{|z\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \quad (5\text{-}297)$$

La ecuación característica del sistema se define como:

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (5\text{-}298)$$

En general, un sistema lineal en tiempo discreto e invariante con el tiempo con una entrada y una salida se puede describir mediante la siguiente ecuación en diferencias con coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} &y[(k+n)T] + a_{n-1}y[(k+n-1)T] + a_{n-2}y[(k+n-2)T] \\ &\quad + \cdots + a_1 y[(k+1))T] + a_0 y(kT) \\ &\quad = b_m r[(k+m)T] + b_{m-1}r[(k+m-1)T] \\ &\quad + \cdots + b_1 r[(k+1)T] + b_0 r(kT) \qquad n \geq m \end{aligned} \tag{5-299}$$

Tomando la transformada z en ambos miembros de la ecuación (5-299) y estableciendo las condiciones iniciales a cero, la función de transferencia del sistema se escribe como:

$$\frac{Y(z)}{R(s)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \qquad n \geq m \tag{5-300}$$

La ecuación característica se obtiene al igualar el polinomio denominador de la función de transferencia a cero.

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \tag{5-301}$$

Ejemplo 5-24

Considere que un sistema en tiempo discreto se describe mediante la ecuación en diferencias:

$$y(k+2) + 5y(k+1) + 3y(k) = r(k+1) + 2r(k) \tag{5-302}$$

La función de transferencia del sistema es simplemente:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{z+2}{z^2 + 5z + 3} \tag{5-303}$$

La ecuación característica es:

$$z^2 + 5z + 3 = 0 \tag{5-304}$$

Las variables de estado del sistema se pueden definir como:

$$x_1(k) = y(k) \tag{5-305}$$
$$x_2(k) = x_1(k+1) - r(k) \tag{5-306}$$

Al sustituir las dos últimas ecuaciones en la ecuación (5-302) se obtienen las dos ecuaciones de estado como:

$$x_1(k+1) = x_2(k) + r(k) \tag{5-307}$$
$$x_2(k+1) = -3x_1(k) - 5x_2(k) - 3r(k) \tag{5-308}$$

de las cuales se tienen las matrices **A** y **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{5-309}$$

La misma ecuación característica de la ecuación (5-304) se obtiene utilizando $|z\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$. ▲

5-16 Diagramas de estado de sistemas en tiempo discreto

Cuando un sistema en tiempo discreto se describe mediante ecuaciones de estado en diferencias o discretas, se puede construir un **diagrama de estado discreto** para el sistema. Similar a las relaciones entre el diagrama de bloques de una computadora analógica y el diagrama de estado para sistemas en tiempo continuo, los elementos de un diagrama de estado discreto se asemejan a los elementos de cómputo de una computadora digital. Algunas de las operaciones de una computadora digital son la **multiplicación por una constante, suma de varias variables,** y **retardo en tiempo** o **corrimiento.** El diagrama de estado discreto se puede utilizar para determinar las funciones de transferencia, así como la implantación digital del sistema. La descripción matemática de estos elementos de cómputo digitales básicos y sus expresiones de la transformada z correspondientes, son los siguientes:

1. *Multiplicación por una constante:*

$$x_2(kT) = ax_1(kT) \tag{5-310}$$
$$X_2(z) = aX_1(z) \tag{5-311}$$

2. *Suma:*

$$x_2(kT) = x_1(kT) + x_3(kT) \tag{5-312}$$
$$X_2(z) = X_1(z) + X_3(z) \tag{5-313}$$

3. *Corrimiento o retardo en tiempo:*

$$x_2(kT) = x_1[(k+1)T] \tag{5-314}$$
$$X_2(z) = zX_1 - zx_1(0) \tag{5-315}$$

o

$$X_1(z) = z^{-1}X_2(z) + x_1(0) \tag{5-316}$$

La representación del diagrama de estado de estas operaciones se ilustra en la Fig. 5-20. El tiempo inicial $t = 0$ en las ecuaciones (5-315) y (5-316) se puede generalizar a $t = t_0$. Entonces las ecuaciones representan la transición de estados en tiempo discreto de $t \geq t_0$.

Ejemplo 5-25

Considere nuevamente la ecuación en diferencias de la ecuación (5-302), la cual es:

$$y(k + 2) + 5y(k + 1) + 3y(k) = r(k + 1) + 2r(k) \qquad (5\text{-}317)$$

Una forma de construir el diagrama de estado discreto para el sistema es utilizar las ecuaciones de estado. En este caso, las ecuaciones de estado ya están definidas en las ecuaciones (5-307) y (5-308). Mediante la utilización del mismo principio que para el diagrama de estado para sistemas en tiempo continuo, el diagrama de estado para las ecuaciones (5-307) y (5-308) se muestra en la Fig. 5-21. La unidad de retardo en tiempo z^{-1} se utiliza para relacionar $x_1(k + 1)$ o $x_2(k)$. *Las variables de estado se definen como las salidas de las unidades de retardo en el diagrama de estado.*

▲ Las variables de estado se definen como las salidas de las unidades de retardo en el diagrama de estado.

Como una alternativa, el diagrama de estado discreto se puede dibujar de la ecuación en diferencias vía la función de transferencia, utilizando los esquemas de descomposición (Fig. 5-22). La descomposición de una función de transferencia en tiempo discreto sigue básicamente el mismo procedimiento que el de una función de transferencia analógica, cubierta en la Sec. 5-9, y los detalles no se repiten.

Las ecuaciones de transición de estados del sistema se pueden obtener directamente del diagrama de estado empleando la fórmula de ganancia de la SFG. AL hacer referencia a $X_1(z)$ y $X_2(z)$ como los

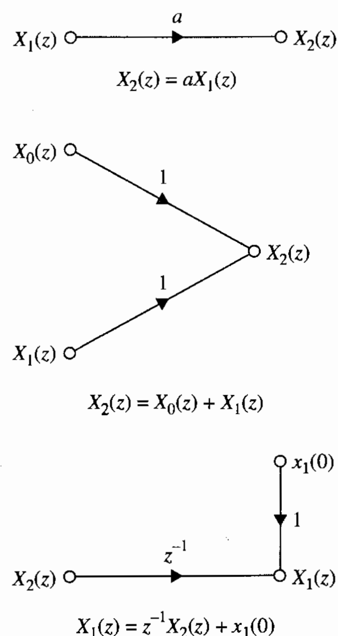


Figura 5-20 Elementos básicos de un diagrama de estado discreto.

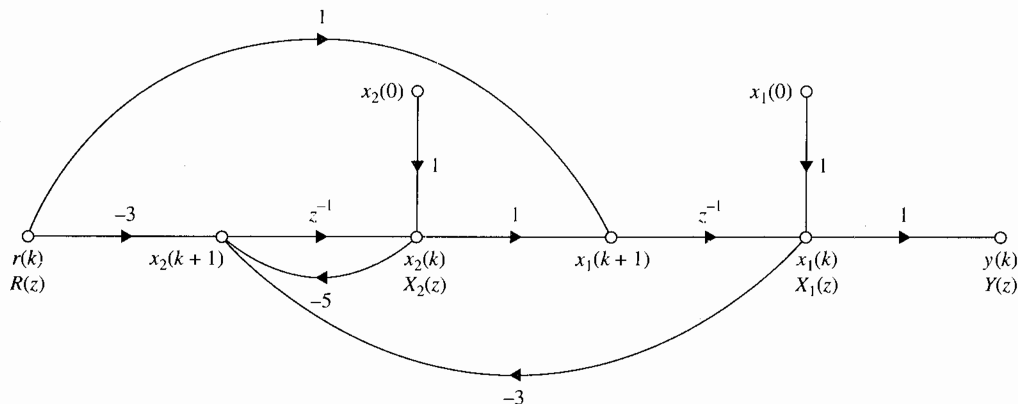


Figura 5-21 Diagrama de estado discreto del sistema descrito por la ecuación en diferencias de la ecuación (5-302) o por las ecuaciones de estado de las ecuaciones (5-307) y (5-308).

nodos de salida y $x_1(0)$, $x_2(0)$ y $R(z)$ como los nodos de entrada en la Fig. 5-21, las ecuaciones de transición de estado se escriben como:

$$\begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 1+5z^{-1} & z^{-1} \\ -3z^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} z^{-1}(1+5z^{-1})-3z^{-2} \\ -3z^{-1}-3z^{-2} \end{bmatrix} R(z) \qquad (5\text{-}318)$$

en donde:

$$\Delta = 1 + 5z^{-1} + 3z^{-2} \qquad (5\text{-}319)$$

La misma función de transferencia entre $R(z)$ y $Y(z)$ como en la ecuación (5-303) se puede obtener directamente del diagrama de estado de la Fig. 5-21, mediante la aplicación de la fórmula de ganancia de la SFG entre estos dos nodos. ▲

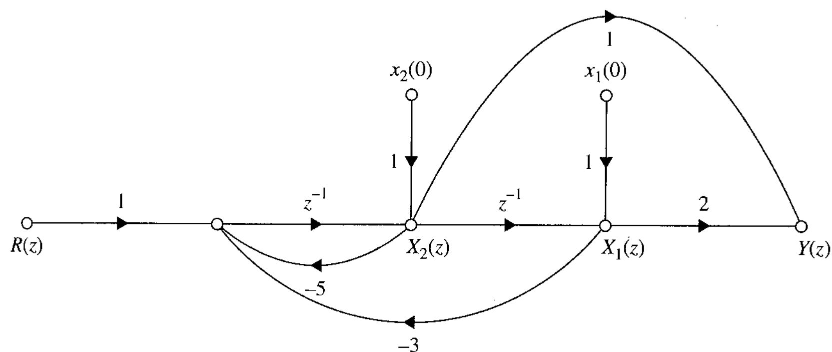
5-16-1 Diagramas de estado para sistemas de datos muestreados

Cuando un sistema en tiempo discreto tiene elementos en tiempo continuo así como en tiempo discreto, con dos tipos de elementos separados por dispositivos de muestreo y retención, se debe establecer un modelo de diagrama de estado para el dispositivo de muestreo y retención (retén de orden cero).

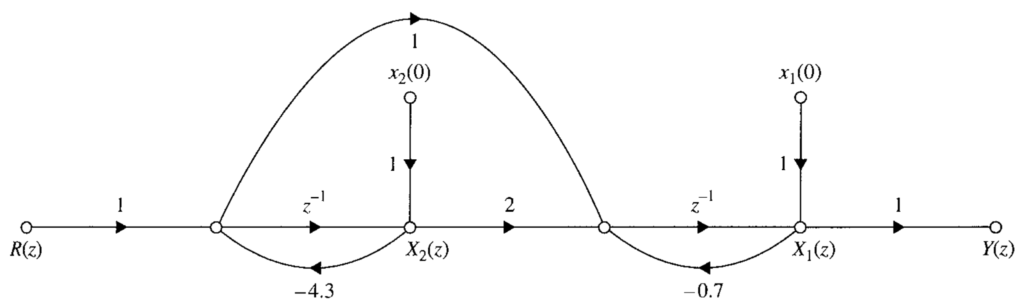
Considere que la entrada del retén de orden cero se denota por $e^*(t)$, la cual es un tren de impulsos, y la salida por $h(t)$. Ya que el retén de orden cero simplemente mantiene el esfuerzo del impulso de entrada en el instante de muestreo hasta que la siguiente entrada llega, la señal $h(t)$ es una secuencia de escalones. La relación entrada-salida en el dominio de Laplace es:

$$H(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}E^*(s) \qquad (5\text{-}320)$$

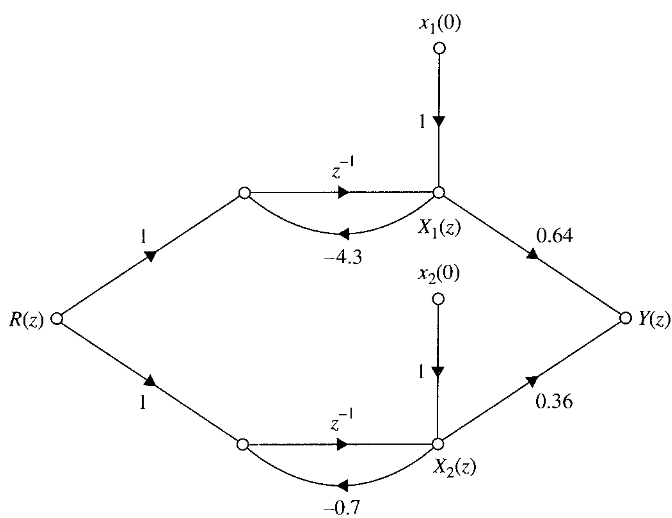
Fig
R(z)



(a) Descomposición directa



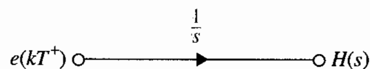
(b) Descomposición con cascada



(c) Descomposición paralela

Figura 5-22 Diagramas de estado de la función de transferencia $y(z)/R(z) = (z + 2)/(z^2 + 5z + 3)$ mediante tres métodos de descomposición.

Figura 5-23 Representación en diagrama de estado de un retén de orden cero.



En el dominio del tiempo, la relación es simplemente:

$$h(t) = e(kT^+) \tag{5-321}$$

para $kT \leq t < (k + 1)T$.

En la notación del diagrama de estado, se necesita la relación entre $H(s)$ y $e(kT^+)$. Para este propósito, se toma la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (5-321) para tener:

$$H(s) = \frac{e(kT^+)}{s} \tag{5-322}$$

para $kT \leq t < (k + 1)T$. La representación del diagrama de estado del retén de orden cero, se muestra en la Fig. 5-23.

Ejemplo 5-26

Como un ejemplo ilustrativo de cómo se construye el diagrama de estado de un sistema de datos muestreados, considere el sistema de la Fig. 5-24. Se demostrarán varias formas de modelado de las relaciones entrada-salida del sistema. Primero, la transformada de Laplace de la salida del sistema se escribe en términos de la entrada al retén de orden cero.

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}\frac{1}{s + 1}E^*(s) \tag{5-323}$$

Tomando la transformada z en ambos miembros de la ecuación (5-323), se obtiene:

$$Y(z) = \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}}E(z) \tag{5-324}$$

La Fig. 5-25 muestra el diagrama de estado para la ecuación (5-324). Las ecuaciones dinámicas discretas del sistema se escriben directamente del diagrama de estado.

$$x_1[(k + 1)T] = -e^{-T}x_1(kT) + (1 - e^{-T})e(kT^+) \tag{5-325}$$

$$y(kT) = x_1(kT) \tag{5-326}$$

▲

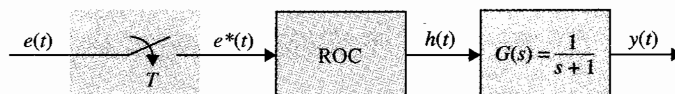


Figura 5-24 Sistema de datos muestreados.

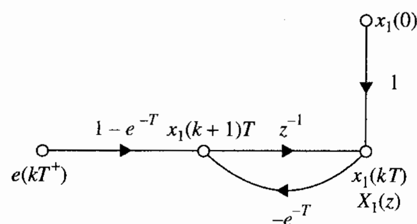


Figura 5-25 Diagrama de estado discreto del sistema de la Fig. 5-24.

5-17 Ejemplo final: Sistema de suspensión magnético de una esfera

Como un ejemplo final para ilustrar algo del material presentado en este capítulo, considere el sistema de suspensión magnético de una esfera que se muestra en la Fig. 5-26. El objetivo del sistema es regular la corriente del electroimán para que la bola de acero quede suspendida a una distancia fija del extremo del imán. Las ecuaciones dinámicas del sistema son:

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} = Mg - \frac{ki^2(t)}{x(t)} \tag{5-327}$$

$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} \tag{5-328}$$

en donde la ecuación (5-327) es no lineal. Las variables y parámetros del sistema son como sigue:

- ▲ $v(t)$ = voltaje de entrada (V)
- ▲ $i(t)$ = corriente en la bobina (A)
- ▲ k = constante proporcional = 1.0
- ▲ L = inductancia de la bobina = 0.01 H

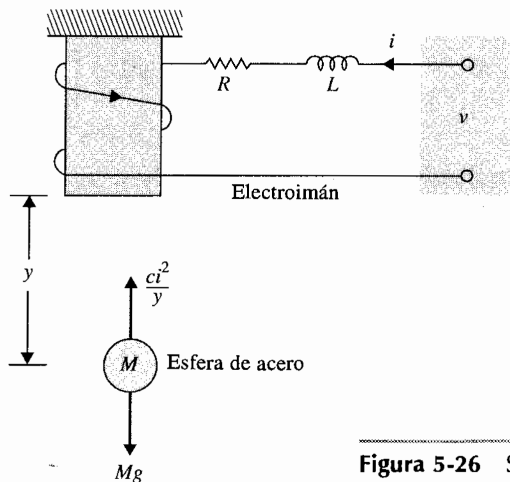


Figura 5-26 Sistema de suspensión de una esfera de acero.

- ▲ R = resistencia de la bobina = 1 Ω
- ▲ M = masa de la esfera = 1.0 kg
- ▲ $x(t)$ = posición de la esfera (m)
- ▲ g = aceleración de la gravedad = 32.2 m/s²

Las variables de estado se definen como:

$$x_1(t) = x(t)$$
$$x_2(t) = \frac{dx(t)}{dt} \tag{5-329}$$
$$x_3(t) = i(t)$$

Las ecuaciones de estado son:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \tag{5-330}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = g - \frac{k}{M}\frac{x_3^2(t)}{x_1(t)} \tag{5-331}$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = -\frac{R}{L}x_3(t) + \frac{v(t)}{L} \tag{5-332}$$

Estas ecuaciones de estado no lineales se linealizan cerca del punto de equilibrio, $x_1(t) = x(t) = 0.5$ m, utilizando el método descrito en el Cap. 4. Después de sustituir los valores de los parámetros, las ecuaciones lineales se escriben como:

$$\Delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}^*\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^*\Delta v(t) \tag{5-333}$$

en donde $\Delta\mathbf{x}(t)$ denota el vector de estado y $\Delta v(t)$ el voltaje de entrada del sistema linealizado. Las matrices de coeficientes son:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 64.4 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} \tag{5-334}$$

Todo el análisis realizado a continuación, se puede llevar a cabo utilizando el programa **LYNSYS** del paquete de software **ACSP** o la función **svdesign** de las herramientas de **CSAD/MATLAB.** Para mostrar el método analítico, se realizarán los pasos de los cálculos como sigue:

Ecuación característica

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}^*| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ -64.4 & s & 16 \\ 0 & 0 & s+100 \end{vmatrix} = s^3 + 100s^2 - 64.4s - 6440 = 0 \tag{5-335}$$

Valores característicos. Los valores característicos de **A***, o las raíces de la ecuación característica, son:

$$s = -100 \qquad s = -8.025 \qquad s = 8.025$$

Matriz de transición de estado. La matriz de transición de estado de **A*** es:

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \mathscr{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}] = \mathscr{L}^{-1}\left(\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -64.4 & s & 16 \\ 0 & 0 & s+100 \end{bmatrix}^{-1}\right) \tag{5-336}$$

o

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+100)(s+8.025)(s-8.025)} \begin{bmatrix} s(s+100) & s+100 & -16 \\ 64.4(s+100) & s(s+100) & -16s \\ 0 & 0 & s^2 - 64.4 \end{bmatrix}\right) \tag{5-337}$$

Al realizar la expansión en fracciones parciales y tomando la transformada inversa de Laplace, la matriz de transición de estado es:

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0016 \\ 0 & 0 & 0.16 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-100t} + \begin{bmatrix} 0.5 & -0.062 & 0.0108 \\ -4.012 & 0.5 & -0.087 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-8.025t} + \begin{bmatrix} 0.5 & 0.062 & -0.0092 \\ 4.012 & 0.5 & -0.074 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{8.025t} \tag{5-338}$$

Ya que el último término en la ecuación (5-338) tiene un exponente positivo, la respuesta de $\boldsymbol{\phi}(t)$ aumenta con el tiempo, y el sistema es inestable. Esto es de esperarse, ya que sin control, la esfera de acero sería atraída por el imán hasta golpear el extremo inferior del imán.

Función de transferencia. Se define la posición de la esfera como $x(t)$, la salida como $y(t)$, y la entrada como $v(t)$. Entonces la función de transferencia entrada-salida del sistema es:

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \mathbf{C}^*(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}\mathbf{B}^* = [1 \quad 0 \quad 0](s\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}\mathbf{B}^* = \frac{-1600}{(s+100)(s+8.025)(s-8.025)} \tag{5-339}$$

Controlabilidad. La matriz de controlabilidad es:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B}^* \quad \mathbf{A}^*\mathbf{B}^* \quad \mathbf{A}^{*2}\mathbf{B}^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1{,}600 \\ 0 & -1{,}600 & 160{,}000 \\ 100 & -10{,}000 & 1{,}000{,}000 \end{bmatrix} \tag{5-340}$$

Ya que el rango de **S** es tres, el sistema es completamente controlable.

Observabilidad. La observabilidad del sistema depende de qué variable define la salida. Para el control mediante realimentación del estado (discutido en el Cap. 10), el controlador completo requiere realimentar las tres variables de estado, x_1, x_2, y x_3. Sin embargo, por razones de economía, podría quererse realimentar solamente una de las tres variables de estado. Para hacer más general el problema, se puede investigar cuál estado, si se selecciona como la salida, podría hacer que el sistema fuera no observable:

1. $y(t)$ = posición de la esfera = $x(t)$: $\mathbf{C}^* = [1 \quad 0 \quad 0]$
   La matriz de observabilidad es:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^* \\ \mathbf{C}^*\mathbf{A}^* \\ \mathbf{C}^*\mathbf{A}^{*2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 64.4 & 0 & -16 \end{bmatrix} \tag{5-341}$$

   que tiene un rango de tres. Por lo que el sistema es completamente observable.
2. $y(t)$ = velocidad de la esfera = $dx(t)/dt$: $\mathbf{C}^* = [0 \quad 1 \quad 0]$
   La matriz de observabilidad es:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^* \\ \mathbf{C}^*\mathbf{A}^* \\ \mathbf{C}^*\mathbf{A}^{*2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 64.4 & 0 & -16 \\ 0 & 64.4 & 1600 \end{bmatrix} \tag{5-342}$$

   que tiene un rango de tres. Por lo que el sistema es completamente observable.
3. $y(t)$ = corriente en la bobina = $i(t)$: $\mathbf{C}^* = [0 \quad 0 \quad 1]$
   La matriz de observabilidad es:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^* \\ \mathbf{C}^*\mathbf{A}^* \\ \mathbf{C}^*\mathbf{A}^{*2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & -10{,}000 \end{bmatrix} \tag{5-343}$$

   la cual tiene un rango de uno. Por lo que el sistema es no observable. La interpretación física de este resultado es que si se selecciona la corriente $i(t)$ como la salida

medible, no se podrían reconstruir las variables de estado a partir de la información medida.

El lector interesado debería introducir la información de este sistema en cualquier programa disponible para computadora y verificar los resultados que se obtengan.

5-18 Resumen

Este capítulo está dedicado al análisis en variables de estado de sistemas lineales. En el Cap. 3 se presentan los fundamentos de las variables de estado y en los Caps. 2 y 4, los de las ecuaciones de estado. En este capítulo se cubren discusiones formales sobre estos temas. Específicamente, se introducen la matriz de transición de estado y las ecuaciones de transición de estado. Se establece la relación entre las ecuaciones de estado y las funciones de transferencia. Dada la función de transferencia de un sistema lineal, las ecuaciones de estado del sistema se pueden obtener a través de la descomposición de la función de transferencia. Dadas las ecuaciones de estado y las ecuaciones de salida, la función de transferencia se puede determinar, ya sea analítica o directamente del diagrama de estado.

Las ecuaciones características y los valores característicos se definen en términos de las ecuaciones de estado y de la función de transferencia. Los vectores característicos de **A** también se definen para valores característicos distintos de orden múltiple.

Se discuten las transformaciones de similitud a la forma canónica controlable (FCC), la forma canónica observable (FCO), la forma canónica diagonal (FCD), y la forma canónica de Jordan (FCJ).

Se definen e ilustran la controlabilidad y observabilidad del estado de sistemas lineales e invariantes con el tiempo.

En este capítulo se cubre la formulación del estado de un sistema en tiempo discreto. El análisis compara cercanamente la formulación de las variables de estado de sistemas en tiempo continuo. Un ejemplo final sobre el sistema de suspensión magnético de una esfera de acero resume los elementos importantes del análisis en las variables de estado de sistemas lineales.

Preguntas de repaso

1. ¿Cuáles son los componentes de las ecuaciones dinámicas de un sistema lineal?
2. Dadas las ecuaciones de estado de un sistema lineal como

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

establezca dos expresiones de la matriz de transición de estado $\boldsymbol{\phi}(t)$ en términos de **A**.
3. Haga una lista de las propiedades de la matriz de transición de estado $\boldsymbol{\phi}(t)$.
4. Dadas las ecuaciones de estado como en la pregunta de repaso número 2, escriba la ecuación de transición de estado.
5. Haga una lista de las ventajas de expresar un sistema lineal en la forma canónica controlable (FCC). Proporcione un ejemplo de **A** y **B** en la FCC.
6. Dadas las ecuaciones de estado en la forma de la pregunta de repaso número 2, proporcione las condiciones sobre **A** y **B** para que sean transformables a la FCC.
7. Exprese la ecuación característica en términos de la matriz **A**.
8. Haga una lista de los tres métodos de descomposición de una función de transferencia.

9. ¿En qué forma especial estarán las ecuaciones de estado, si la función de transferencia se descompone mediante descomposición directa?
10. ¿En qué forma especial estarán las ecuaciones de estado, si la función de transferencia se descompone mediante descomposición en paralelo?
11. ¿Cuál es la ventaja de utilizar la descomposición en cascada?
12. Establezca la relación entre la FCC y la controlabilidad.
13. Para la controlabilidad, ¿las magnitudes de las entradas tienen que ser finitas?
14. Establezca la condición de controlabilidad en términos de las matrices **A** y **B**.
15. ¿Cuál es la motivación detrás del concepto de observabilidad?
16. Establezca la condición de observabilidad en términos de las matrices **A** y **C**.
17. ¿Qué se puede decir acerca de las condiciones de controlabilidad y observabilidad si la función de transferencia tiene una cancelación de polos y ceros?
18. Establezca la relación entre la FCO y la observabilidad.

Referencias

Variables de estado y ecuaciones de estado

1. **B. C. KUO,** *Linear Networks and Systems,* McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.
2. **R. A. GABEL** and **R. A. ROBERTS,** *Signals and Linear Systems,* 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1987.

Controlabilidad y observabilidad

3. **R. E. KALMAN,** "On the General Theory of Control Systems," *Proc. IFAC,* Vol. 1, pp. 481–492, Butterworth, London, 1961.
4. **W. L. BROGAN,** *Modern Control Theory,* 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.

Problemas

▲ Ecuaciones dinámicas

5-1. Las siguientes ecuaciones diferenciales representan sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Escriba las ecuaciones dinámicas (las ecuaciones de estado y las ecuaciones de salida) en forma matricial.

(a) $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 5r(t)$$

(b) $$2\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2y(s)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = r(t)$$

(c) $$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 5\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + y(t) + \int_0^t y(\tau)\,d\tau = r(t)$$

(d) $$\frac{d^4y(t)}{dt^4} + 1.5\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2.5\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2r(t)$$

▲ Matriz de transición de estado

5-2. Mediante el empleo de la ecuación (5-23), muestre que:

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \cdots$$

▲ Matriz de transición de estado

5-3. Las ecuaciones de estado de un sistema lineal e invariante con el tiempo se representan por:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Encuentre la matriz de transición de estado $\boldsymbol{\phi}(t)$, la ecuación característica y los valores característicos de **A** para los siguientes casos.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(e) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(f) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(g) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Encuentre $\boldsymbol{\phi}(t)$ y la ecuación característica utilizando un programa de computadora, si se tiene disponible.

▲ Ecuación de transición de estado

5-4. Encuentre la ecuación de transición de estado de cada sistema descrito en el problema 5-3 para $t \geq 0$. Suponga que $\mathbf{x}(0)$ es el vector de estado inicial y que los componentes del vector de entrada $\mathbf{u}(t)$ son todos funciones escalón unitario.

▲ Matriz de transición de estado

5-5. Encuentre si las matrices dadas a continuación, pueden ser matrices de transición de estado. [*Sugerencia*: Verifique las propiedades de $\boldsymbol{\phi}(t)$.]

(a) $\begin{bmatrix} -e^{-t} & 0 \\ 0 & 1-e^{-t} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1-e^{-t} & 0 \\ 1 & e^{-t} \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & t^2e^{-2t}/2 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$

▲ Valores característicos, funciones de transferencia

5-6. Dado un sistema descrito por las ecuaciones dinámicas:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \qquad y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

en donde:

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1]$

(c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1 \quad 0]$

(i) Encuentre los valores característicos de **A**. Para verificar las respuestas utilice un programa de computadora tal como **LINSYS** de **ACSP** o **svstuff** de **CSAD/MATLAB** si cualquiera de éstos está disponible. Puede obtener la ecuación característica y resolver las raíces utilizando un programa de computadora.

(ii) Encuentre la relación de la función de transferencia entre $\mathbf{X}(s)$ y $U(s)$.

(iii) Encuentre la función de transferencia $Y(s)/U(s)$.

▲ Ecuaciones de estado

5-7. Dadas las ecuaciones dinámicas de un sistema invariante con el tiempo:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \qquad y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

en donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1 \quad 0]$$

Encuentre las matrices $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{B}_1$, para que las ecuaciones de estado se escriban como:

$$\frac{d\overline{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{A}_1\overline{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_1 u(t)$$

en donde:

$$\overline{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix}$$

▲ FCC

5-8. Dada las ecuaciones dinámicas:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \qquad y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

en donde:

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 1]$

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 1]$

(c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$

(d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 1]$

(e) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$

Encuentre la transformación $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\overline{\mathbf{x}}(t)$ que transforma las ecuaciones de estado a la forma canónica controlable (FCC), si es posible. Si se tiene disponible el programa **CSAD,** verifique las respuestas utilizando el programa de computadora.

▲ FCO

5-9. Para los sistemas descritos en el problema 5-8, encuentre la transformación $\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}\,\bar{\mathbf{x}}(t)$ para que las ecuaciones de estado se transformen a la forma canónica observable (FCO), si es posible. Si se tiene disponible el programa **CSAD,** verifique las respuestas utilizando el programa.

▲ FCD, FCJ

5-10. Para los sistemas descritos en el problema 5-8, encuentre la transformación $\mathbf{x}(t)\ \mathbf{T}\,\bar{\mathbf{x}}(t)$ para que las ecuaciones de estado sean transformadas a la forma canónica diagonal (FCD) si **A** tiene valores característicos distintos, y a la forma canónica de Jordan (FCJ) si **A** tiene por lo menos un valor característico de orden múltiple.

▲ FCC

5-11. La ecuación de estado de un sistema lineal se describe por:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

Las matrices de coeficientes están dadas como sigue. Explique por qué las ecuaciones de estado no pueden transformarse a la forma canónica controlable (FCC).

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

▲ Ecuaciones de estado, funciones de transferencia

5-12. Las ecuaciones que describen la dinámica de un sistema de control de un motor son:

$$e_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + K_b \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

$$T_m(t) = K_i i_a(t)$$

$$T_m(t) = J\frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + B\frac{d\theta_m(t)}{dt} + K\theta_m(t)$$

$$e_a(t) = K_a e(t)$$

$$e(t) = K_s[\theta_r(t) - \theta_m(t)]$$

(a) Asigne las variables de estado como $x_1(t) = \theta_m(t)$, $x_2(t) = d\theta_m(t)/dt$, y $x_3(t) = i_a(t)$. Escriba las ecuaciones de estado en la forma:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\theta_r(t)$$

Escriba la ecuación de salida en la forma $y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$, en donde $y(t) = \theta_m(t)$.

(b) Encuentre la función de transferencia $G(s) = \Theta_m(s)/E(s)$ cuando se abre la trayectoria de realimentación desde $\Theta_m(s)$ a $E(s)$. Encuentre la función de transferencia en lazo cerrado $M(s) = \Theta_m(s)/\Theta_r(s)$.

▲ Matriz de transición de estado

5-13. Dada la matriz **A** de un sistema lineal descrito por la ecuación de estado:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

en donde:

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ (c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Encuentre la matriz de transición de estado $\boldsymbol{\phi}(t)$ usando los siguientes métodos.

(i) Expansión de $e^{\mathbf{A}t}$ en una serie infinita y expresada en forma compacta.
(ii) La transformada inversa de Laplace de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

▲ Ecuaciones de estado, transformada inversa de Laplace, ecuación característica

5-14. En la Fig. 5P-14 se muestra el diagrama de un sistema de control realimentado utilizando un motor de cd. El par desarrollado por el motor es $T_m(t) = K_i i_a(t)$, donde K_i es la constante de par. Las constantes del sistema son:

▲ $K_s = 2$	▲ $R = 2\ \Omega$	▲ $R_s = 0.1\ \Omega$
▲ $K_b = 5$ V/rad/s	▲ $K_i = 5$ N-m/A	▲ $L_a \cong 0$ H
▲ $J_m + J_L = 0.1$ N-m-s^2	▲ $B_m \cong 0$ N-m-s	▲ $K = 10$

Suponga que todas las unidades son congruentes por lo que no es necesaria ninguna conversión.

(a) Asigne las variables de estado como $x_1 = \theta_y$ y $x_2 = d\theta_y/dt$. Suponga que la salida es $y = \theta_y$. Escriba las ecuaciones de estado en forma matricial. Demuestre que las matrices **A** y **B** están en la FCC.

(b) Suponga que $\theta_r(t)$ es una función escalón unitario. Encuentre $\mathbf{x}(t)$ en términos de $\mathbf{x}(0)$, el estado inicial. Utilice la tabla de transformadas de Laplace.

(c) Encuentre la ecuación característica y los valores característicos de **A**.

(d) Comente el propósito del resistor de realimentación R_s.

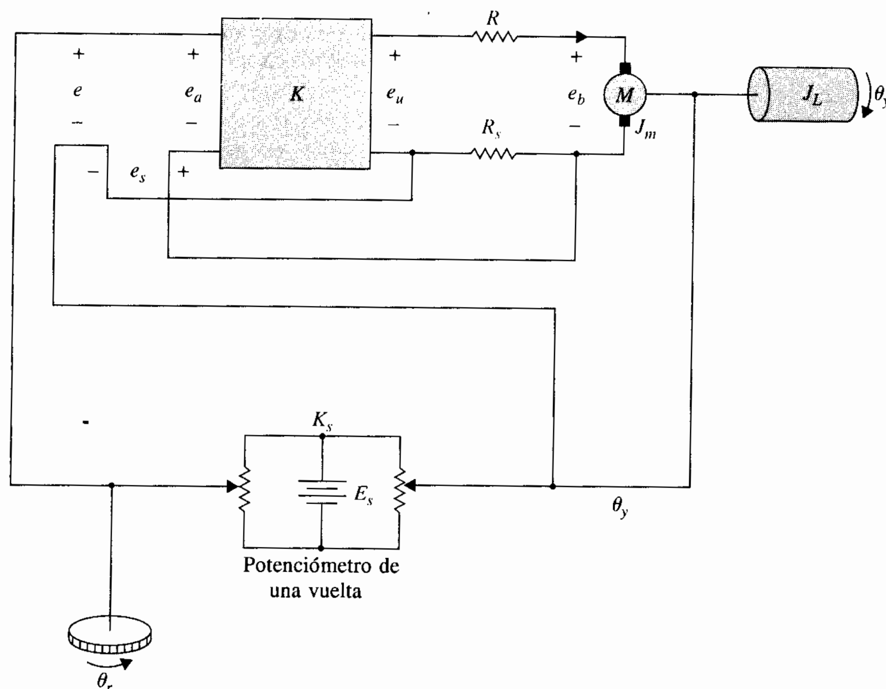


Figura 5P-14

▲ Ecuaciones de estado, transformada inversa de Laplace, ecuación característica

5-15. Repita el problema 5-14 con los siguientes parámetros del sistema:

▲ $K_s = 1$	▲ $K = 9$	▲ $R_a = 0.1\ \Omega$
▲ $R_s = 0.1\ \Omega$	▲ $K_b = 1$ V/rad/s	▲ $K_i = 1$ N-m/A
▲ $L_a \cong 0$ H	▲ $J_m + J_L = 0.01$ N-m-s²	▲ $B_m \cong 0$ N-m-s

▲ Funciones de transferencia, ecuaciones dinámicas, valor final

5-16. En la Fig. 5P-16 se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control realimentado.

(a) Encuentre la función de transferencia de la trayectoria directa $Y(s)/E(s)$ y la función de transferencia en lazo cerrado de $Y(s)/R(s)$.

(b) Escriba las ecuaciones dinámicas en la forma de

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t) \qquad y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}r(t)$$

Encuentre **A, B, C** y **D** en términos de los parámetros del sistema.

(c) Aplique el teorema del valor final para encontrar el valor de la salida $y(t)$ en estado estable cuando la entrada $r(t)$ es una función escalón unitario. Suponga que el sistema en lazo cerrado es estable.

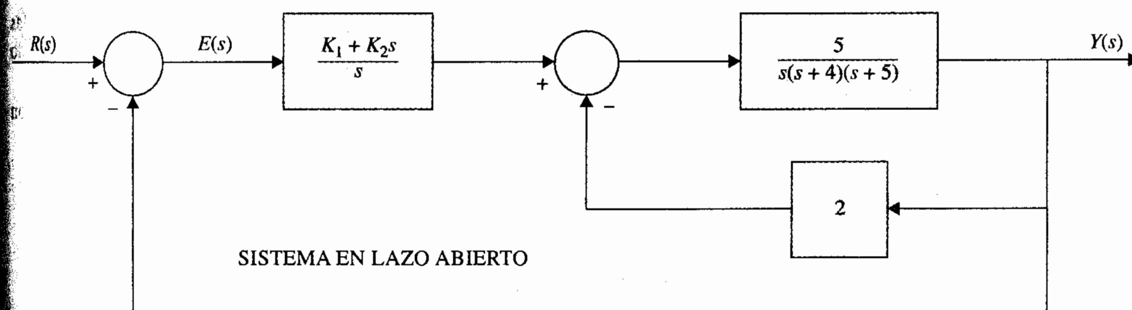


Figura 5P-16

▲ Matriz adjunta, ecuación característica

5-17. Para el sistema lineal e invariante con el tiempo cuyas ecuaciones de estado tienen matrices de coeficientes dadas por las ecuaciones (5-156) y (5-17) (FCC), muestre que:

$$\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix}$$

y la ecuación característica de **A** es:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

▲ Ecuaciones de estado, ecuación de transición de estado, matriz de transición de estado, ecuación característica

5-18. Un sistema lineal e invariante con el tiempo se describe mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = r(t)$$

(a) Considere que las variables de estado se definen como $x_1 = y$, $x_2 = dy/dt$ y $x_3 = d^2y/dt^2$. Escriba las ecuaciones de estado del sistema en forma matricial.
(b) Encuentre la matriz de transición de estado $\phi(t)$ de **A**.
(c) Considere que $y(0) = 1$, $dy(0)/dt = 0$, $d^2y(0)/dt^2 = 0$ y $r(t) = u_s(t)$. Encuentre la ecuación de transición de estado del sistema.
(d) Encuentre la ecuación característica y los valores característicos de **A**.

▲ Ecuaciones de estado, matriz de transición de estado, ecuación característica

5-19. Un sistema de masa-resorte-fricción se describe mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = r(t)$$

(a) Defina las variables de estado como $x_1(t) = y(t)$ y $x_2(t) = dy(t)/dt$. Escriba las ecuaciones de estado en forma matricial. Encuentre la matriz de transición de estado $\phi(t)$ de **A**.

(b) Defina las variables de estado como $x_1(t) = y(t)$ y $x_2(t) = y(t) + dy(t)/dt$. Escriba las ecuaciones de estado en forma matricial. Encuentre la matriz de transición de estado $\boldsymbol{\phi}(t)$ de **A.**

(c) Demuestre que las ecuaciones características, $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$, para las partes (a) y (b) son idénticas.

▲ Matriz de transición de estado, valores característicos

5-20. Dadas las ecuaciones de estado $d\mathbf{x}(t)/dt = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, en donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix} \qquad \sigma \text{ son } \omega \text{ números reales}$$

(a) Encuentre la matriz de transición de estados de **A.**

(b) Encuentre los valores característicos de **A.**

▲ Ecuaciones dinámicas

5-21. (a) Demuestre que las funciones de transferencia entrada-salida de los dos sistemas que se muestran en la Fig. 5P-21, son las mismas.

(b) Escriba las ecuaciones dinámicas del sistema de la Fig. 5P-21 como:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1u_1(t) \qquad y_1(t) = \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t)$$

y aquellas del sistema en la Fig. 5P-21(b) como:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2u_2(t) \qquad y_2(t) = \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t)$$

Encuentre $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$, y $\mathbf{C}_2$. Demuestre que $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1'$.

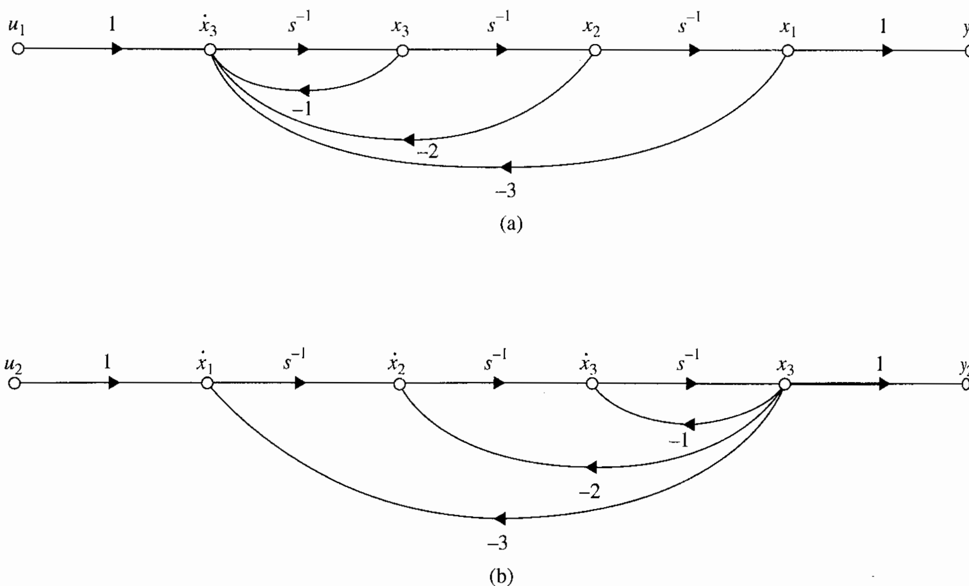


Figura 5P-21

▲ Diagramas de estado

5-22. Dibuje los diagramas de estado para los siguientes sistemas.

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) Misma **A** como en la parte (a), pero con:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

▲ Diagramas de estado, ecuaciones de estado

5-23. Dibuje los diagramas de estado para las siguientes funciones de transferencia mediante descomposición directa. Asigne las variables de estado de derecha a izquierda para $x_1, x_2, \ldots$ Escriba las ecuaciones de estado del diagrama de estado y demuestre que las ecuaciones están en la FCC.

(a) $G(s) = \frac{10}{s^3 + 8.5s^2 + 20.5s + 15}$ **(b)** $G(s) = \frac{10(s+2)}{s^2(s+1)(s+3.5)}$

(c) $G(s) = \frac{5(s+1)}{s(s+2)(s+10)}$ **(d)** $G(s) = \frac{1}{s(s+5)(s^2+2s+2)}$

▲ Diagramas de estado, ecuaciones de estado

5-24. Dibuje los diagramas de estado para los sistemas descritos en el problema 5-23 mediante descomposición en paralelo. Haga que los diagramas de estado tengan el número mínimo de integradores. Las ganancias constantes de rama deben ser reales. Escriba las ecuaciones de estado a partir del diagrama de estado.

▲ Diagramas de estado, ecuaciones de estado

5-25. Dibuje los diagramas de estado para los sistemas descritos en el problema 5-23 mediante descomposición en cascada. Asigne las variables de estado en orden ascendente de derecha a izquierda. Escriba las ecuaciones de estado del diagrama de estado.

▲ Diagramas de estado, ecuaciones dinámicas, ecuaciones de transición de estado.

5-26. En la Fig. 5P-26 se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control realimentado.

(a) Dibuje un diagrama de estado para el sistema, primero descomponiendo $G(s)$ mediante descomposición directa. Asigne las variables de estado en orden ascendente, $x_1, x_2, \ldots$, de derecha a izquierda. Adicionalmente a los nodos relacionados con la variable de estado, el diagrama de estado deberá contener nodos para $R(s)$, $E(s)$ y $Y(s)$.

(b) Escriba las ecuaciones dinámicas del sistema en forma matricial.

(c) Encuentre las ecuaciones de transición de estado del sistema utilizando las ecuaciones de estado encontradas en la parte (b). El vector de estado inicial es $\mathbf{x}(0)$, y $r(t) = u_s(t)$.

(d) Encuentre la salida $y(t)$ para $t \geq 0$ con el estado inicial $\mathbf{x}(0)$, y $r(t) = u_s(t)$.

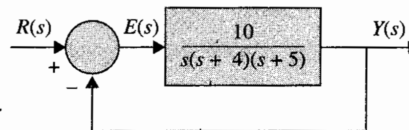


Figura 5P-26

▲ Función de transferencia, diagrama de estado, ecuaciones de transición de estado

5-27. **(a)** Encuentre la función de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/R(s)$, y dibuje el diagrama de estado para el sistema que se muestra en la Fig. 5P-26.

(b) Realice la descomposición directa a $Y(s)/R(s)$, y dibuje el diagrama de estado.

(c) Asigne las variables de estado de derecha a izquierda en orden ascendente, y escriba las ecuaciones de estado en forma matricial.

(d) Encuentre las ecuaciones de transición de estado del sistema utilizando las ecuaciones de estado encontradas en la parte (c). El vector de estado inicial es $\mathbf{x}(0)$, y $r(t) = u_s(t)$.

(e) Encuentre la salida $y(t)$ para $t \geq 0$ con el estado inicial $\mathbf{x}(0)$, y $r(t) = u_s(t)$.



▲ Diagrama de estado, ecuaciones de estado, función de transferencia

5-28. En la Fig. 5P-28 se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control linealizado de la velocidad en ralentí del motor de un automóvil. El sistema está linealizado aproximadamente alrededor de un punto de operación nominal, por lo que todas las variables representan cantidades linealmente perturbadas. Se definen las siguientes variables: $T_m(t)$ es el par del motor, T_D es el par de perturbación-carga constante, $\omega(t)$ es la velocidad del motor, $u(t)$ es el voltaje de entrada al actuador del acelerador, y α es el ángulo del acelerador. El tiempo de retraso en el modelo del motor se puede aproximar por:

$$e^{-0.2s} \cong \frac{1 - 0.1s}{1 + 0.1s}$$

(a) Dibuje un diagrama de estado para el sistema mediante la descomposición individual de cada bloque. Asigne las variables de estado de derecha a izquierda en orden ascendente.

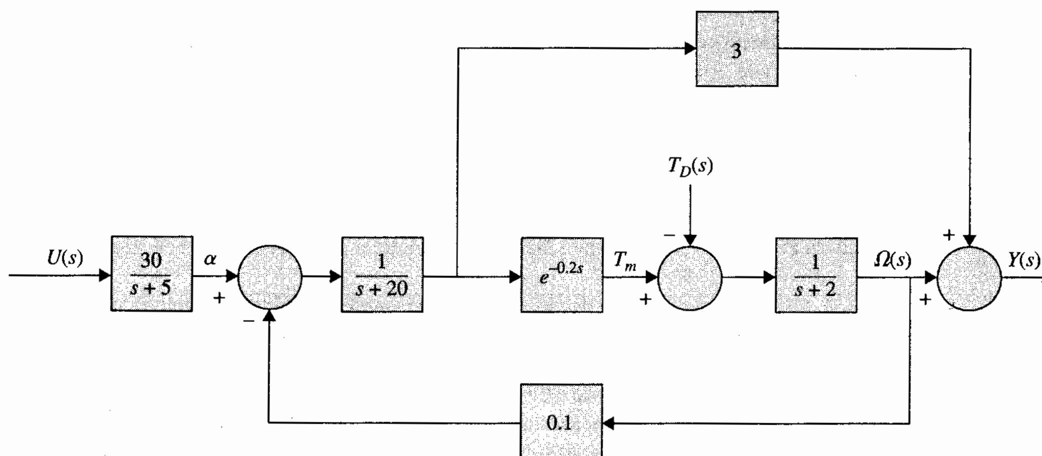


Figura 5P-28

(b) Escriba las ecuaciones de estado del diagrama de estado obtenido en la parte (a), en la forma de:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\begin{bmatrix} u(t) \\ T_D(t) \end{bmatrix}$$

(c) Escriba $Y(s)$ como una función de $U(s)$ y $T_D(s)$. Escriba $\Omega(s)$ como una función de $U(s)$ y $T_D(s)$.

▲ Ecuaciones dinámicas

5-29. El diagrama de estado de un sistema lineal se muestra en la Fig. 5P-29.

(a) Asigne las variables de estado en el diagrama de estado de derecha a izquierda en orden ascendente. Genere nodos artificiales adicionales si es necesario, de tal forma que los nodos de las variables de estado se consideren como "nodos de entrada" después de que se eliminen las ramas de los integradores.

(b) Escriba las ecuaciones dinámicas del sistema del diagrama de estado en la parte (a).

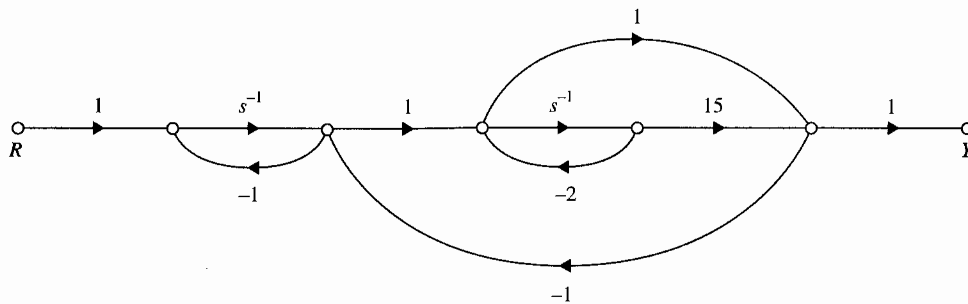
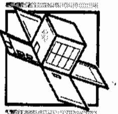


Figura 5P-29



▲ Función de transferencia, ecuación característica, diagrama de estado, controlabilidad, observabilidad



5-30. En la Fig. 5P-30, se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control lineal de una aeronave.

(a) Determine la función de transferencia $Y(s)/R(s)$.

(b) Encuentre la ecuación característica del sistema y sus raíces. Demuestre que las raíces de la ecuación característica no dependen de K.

(c) Para $K = 1$, dibuje un diagrama de estado para el sistema mediante la descomposición de $Y(s)/R(s)$, utilizando el número mínimo de integradores.

(d) Repita la parte (c) cuando $K = 4$.

(e) Determine los valores de K que deben ser evitados para que el sistema sea de estado, controlable y observable.

5-31. Los fabricantes de automóviles han invertido una cantidad considerable de esfuerzos para lograr los estándares de desempeño de emisiones establecidos por el gobierno. Los sistemas modernos de potencia automotriz consisten en una máquina de combustión interna que tiene un dispositivo limpiador interno llamado convertidor catalítico. Tal sistema requiere el control de variables tales como la relación aire/combustible (A/F) del motor, el tiempo de la chispa de ignición, recirculación de los gases de escape, y la inyección de aire. El problema del sistema

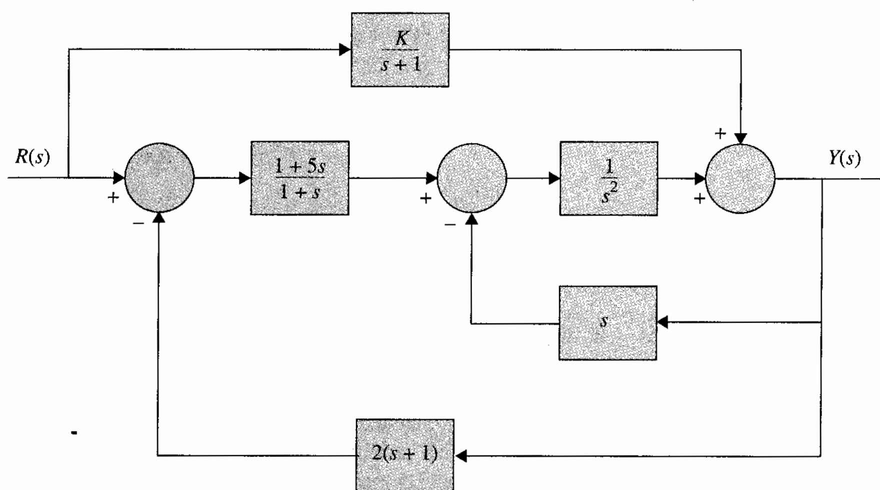


Figura 5P-30

▲ Diagrama de estado, ecuación característica

de control considerado en este caso trata con el control de la relación A/F. En general, dependiendo de la composición del combustible y otros factores, una relación estequiométrica A/F típica es: 14.7:1, esto es, 14.7 gramos de aire por cada gramo de combustible. Una relación A/F mayor o menor que la estequiométrica causará altas concentraciones de hidrocarburos, monóxido de carbono y óxidos de nitrógeno en las emisiones. El sistema de control que se muestra en la Fig. 5P-31 controla la relación aire/combustible para que la salida deseada sea alcanzada para un comando de entrada dado. El detector mide la composición de la mezcla que entra al convertidor catalítico. El controlador electrónico detecta la diferencia o el error entre la entrada de referencia y la salida y calcula la señal de control necesaria para alcanzar la composición deseada de los gases de escape. La salida y(t) marca la relación efectiva aire/combustible. La función de transferencia del motor está dada por:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{e^{-T_d s}}{1 + 0.5s}$$

en donde $T_d = 0.2$ segundos es el tiempo de retardo y se aproxima por:

$$e^{-T_d s} = \frac{1}{e^{T_d s}} = \frac{1}{1 + T_d s + T_d^2 s^2/2! + \cdots} \cong \frac{1}{1 + T_d s + T_d^2 s^2/2!}$$

La ganancia del detector es 1.0.

(a) Empleando la aproximación para $e^{-T_d s}$ dada, encuentre la expresión para $G_p(s)$. Descomponga $G_p(s)$ mediante descomposición directa, y dibuje el diagrama de estado con $u(t)$ como la entrada y $y(t)$ como la salida. Asigne las variables de estado de derecha a izquierda en orden ascendente, y escriba las ecuaciones de estado en forma matricial.

(b) Suponga que el controlador es un amplificador simple con una ganancia de 1 [*i. e.*, $u(t) = e(t)$], encuentre la ecuación característica y sus raíces para el sistema en lazo cerrado.

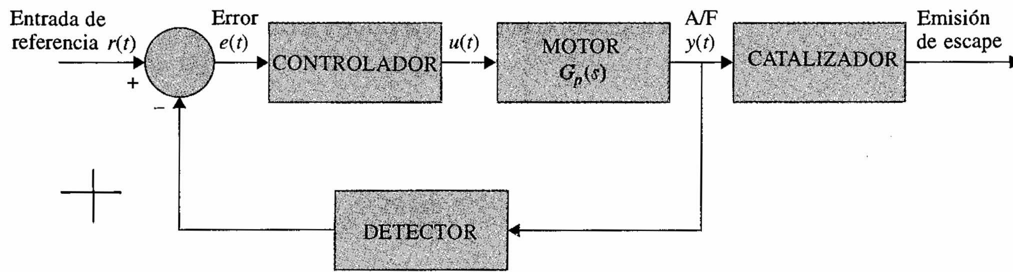


Figura 5P-31

▲ Diagrama de estado, ecuación característica

5-32. Repita el Problema 5-31 cuando el tiempo de retardo del motor del automóvil se aproxima por:

$$e^{-T_d s} \cong \frac{1 - T_d s/3}{1 + \frac{2}{3}T_d s + \frac{1}{6}T_d^2 s^2} \qquad T_d = 0.2 \text{ s}$$

▲ Ecuación de estado, diagrama de estado, funciones de transferencia

5-33. El diagrama de la Fig. 5P-33 muestra un sistema de control de un motor de cd de imán permanente con un amortiguador de inercia viscosa. El sistema se puede utilizar para el control de la rueda de impresión de un procesador de textos electrónico. Un amortiguador mecánico tal como el del tipo de inercia viscosa algunas veces se utiliza en prácticas como una forma simple y económica de estabilizar un sistema de control. El efecto del amortiguador se alcanza me-

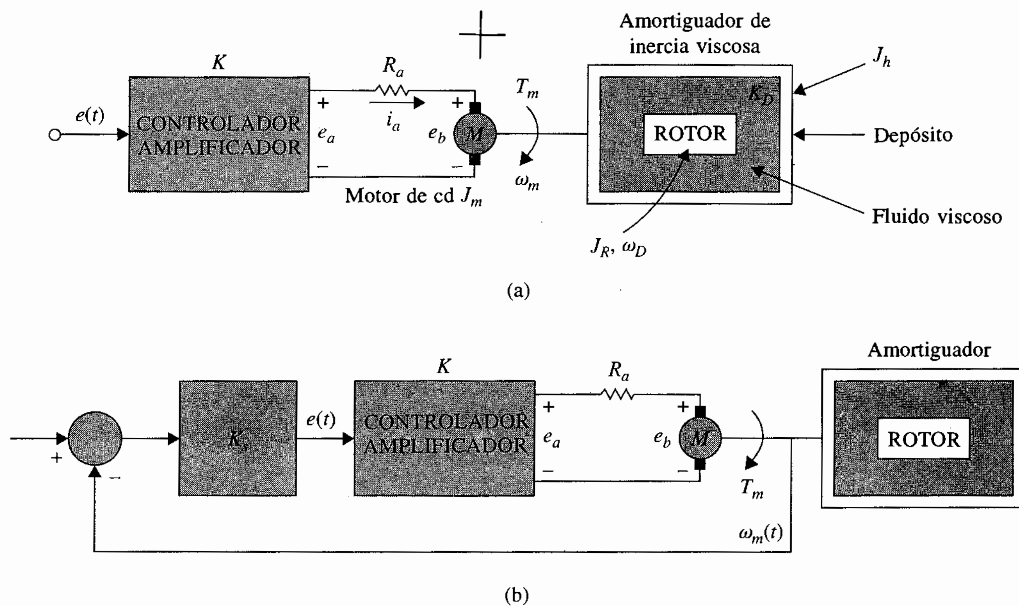


Figura 5P-33

diante un rotor suspendido en un fluido viscoso. Las ecuaciones diferenciales y algebraicas que describen la dinámica del sistema son como sigue:

▲ $e(t) = K_s[\omega_r(t) - \omega_m(t)]$	▲ $K_s = 1$ V/rad/s
▲ $e_a(t) = Ke(t) = R_a i_a(t) + e_b(t)$	▲ $K = 10$
▲ $e_b(t) = K_b \omega_m(t)$	▲ $K_b = 0.0706$ V/rad/s
▲ $T_m(t) = J\dfrac{d\omega_m(t)}{dt} + K_D[\omega_m(t) - \omega_D(t)]$	▲ $J = J_h + J_m = 0.1$ oz-pulg-s^2
▲ $T_m(t) = K_i i_a(t)$	▲ $K_i = 10$ oz-pulg/A
▲ $K_D[\omega_m(t) - \omega_D(t)] = J_R\dfrac{d\omega_D(t)}{dt}$	▲ $J_R = 0.05$ oz-pulg-s^2
▲ $R_a = 1\ \Omega$	▲ $K_D = 1$ oz-pulg-s

(a) Suponga que las variables de estado se definen como $x_1(t) = \omega_m(t)$ y $x_2(t) = \omega_D(t)$. Escriba las ecuaciones de estado para el sistema en lazo abierto con $e(t)$ como la entrada. (Lazo abierto se refiere a que la trayectoria de realimentación desde ω_m hasta e está abierta.)

(b) Dibuje el diagrama de estado para todo el sistema utilizando las ecuaciones de estado de la parte (a) y $e(t) = K_s[\omega_r(t) - \omega_m(t)]$.

(c) Obtenga la función de transferencia en lazo abierto $\Omega_m(s)/E(s)$ y la función de transferencia en lazo cerrado $\Omega_m(s)/\Omega_r(s)$.

(d) Encuentre la ecuación característica y sus raíces para el sistema en lazo cerrado.

▲ Controlabilidad

5-34. Determine la controlabilidad del estado del sistema que se muestra en la Fig. 5P-34.

(a) $a = 1, b = 2, c = 2$ y $d = 1$.

(b) ¿Existen algunos valores no cero para a, b, c y d para los cuales el sistema es no controlable?

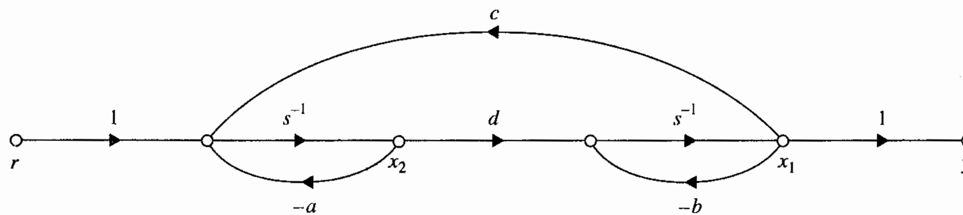


Figura 5P-34

▲ Controlabilidad

5-35. Determine la controlabilidad de los siguientes sistemas.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

▲ Controlabilidad, observabilidad

5-36 Determine la controlabilidad y la observabilidad del sistema que se muestra en la Fig. 5P-36 mediante los siguientes métodos.

(a) Condiciones de las matrices **A, B, C** y **D.**

(b) Condiciones sobre la cancelación de polos y ceros de las funciones de transferencia.

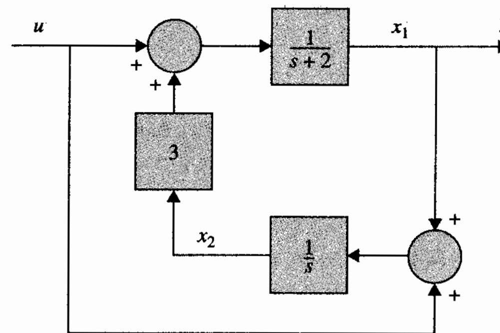


Figura 5P-36

▲ Controlabilidad, observabilidad

5-37. La función de transferencia de un sistema de control lineal es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s + \alpha}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$$

(a) Determine el(los) valor(es) de α para que el sistema sea no controlable o no observable.

(b) Con el(los) valor(es) de α encontrados en la parte (a), defina las variables de estado para que una de ellas sea no controlable.

(c) Con el (los) valor(es) de α encontrados en la parte (a), defina las variables de estado para que una de ellas sea no observable.

▲ Controlabilidad

5-38. Considere el sistema descrito por la ecuación de estado:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

en donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}$$

Encuentre la región en el plano $a - b$ tal que el sistema sea completamente controlable.

▲ Controlabilidad, observabilidad

5-39. Determine la condición de b_1, b_2, c_1, y c_2 para que el siguiente sistema sea completamente controlable y observable:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \qquad y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = [d_1 \quad d_2]$$

▲ Diagrama de estado, ecuación característica, valores característicos, controlabilidad, observabilidad

5-40. El diagrama de la Fig. 5P-40 representa un sistema de control cuyo propósito es mantener el nivel del líquido en el tanque en un nivel deseado. El nivel del líquido se controla mediante un flotador cuya posición $h(t)$ es vigilada. La señal de entrada del sistema en lazo abierto es $e(t)$. Los parámetros del sistema y ecuaciones son como sigue:

▲ Resistencia del motor $R_a = 10\ \Omega$

▲ Inductancia del motor $L_a = 0$ H

▲ Constante del par $K_i = 10$ oz-pulg/A

▲ Inercia del rotor $J_m = 0.005$ oz-pulg-s^2

▲ Constante de fuerza contraelectromotriz $K_b = 0.0706$ V/rad/s

▲ Relación de engranes $n = N_1/N_2 = 1/100$

▲ Inercia de carga $J_L = 10$ oz-pulg-s^2

▲ Carga y fricción del motor = despreciable

▲ Ganancia del amplificador $K_a = 50$

▲ Área del tanque $A = 50$ pies^2

▲ $e_a(t) = R_a i_a(t) + K_b \omega_m(t)$

▲ $\omega_m(t) = \dfrac{d\theta_m(t)}{dt}$

▲ $T_m(t) = K_i i_a(t) = (J_m + n^2 J_L)\dfrac{d\omega_m(t)}{dt}$

▲ $\theta_y(t) = n\theta_m(t)$

El número de válvulas conectadas al tanque desde el recipiente es $N = 10$. Todas las válvulas tienen las mismas características y son controladas simultáneamente por θ_y. Las ecuaciones que gobiernan el volumen del flujo son como sigue:

▲ $q_i(t) = K_I N \theta_y(t)$

▲ $K_I = 10$ pies^3/s-rad

▲ $q_o(t) = K_o h(t)$

▲ $K_o = 50$ pies^2/s

▲ $h(t) = \dfrac{\text{volumen del tanque}}{\text{área del tanque}} = \dfrac{1}{A}\displaystyle\int [q_i(t) - q_o(t)]\, dt$

(a) Defina las variables de estado como $x_1(t) = h(t)$, $x_2(t) = \theta_m(t)$, y $x_3(t) = d\theta_m(t)/dt$. Escriba las ecuaciones de estado del sistema en la forma de $d\mathbf{x}(t)/dt = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}e_i(t)$. Dibuje un diagrama de estado para el sistema.

(b) Encuentre la ecuación característica y los valores característicos de la matriz **A** encontrada en la parte (a).

(c) Muestre que el sistema en lazo abierto es completamente controlable; esto es, el par [**A**, **B**] es controlable.

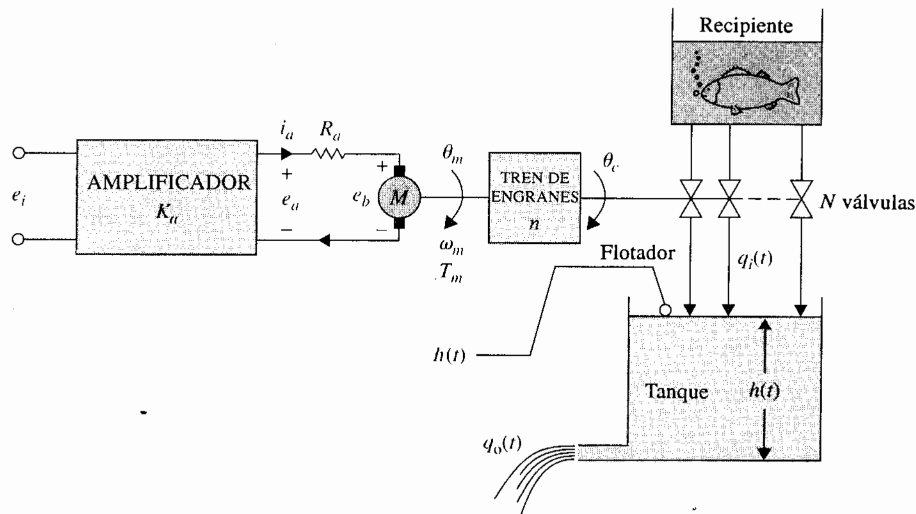


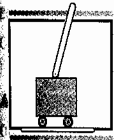
Figura 5P-40

(d) Por razones de economía, solamente una de las tres variables de estado se mide y realimenta para propósitos de control. La ecuación de salida es $y = \mathbf{Cx}$, en donde $\mathbf{C}$ puede ser de una de las siguientes formas:

(1) $\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$ **(2)** $\mathbf{C} = [0 \quad 1 \quad 0]$ **(3)** $\mathbf{C} = [0 \quad 0 \quad 1]$

Determine cual caso (o casos) corresponde a un sistema completamente observable.

▲ Ecuación característica, controlabilidad, observabilidad



5-41. El sistema de control de "balanceo de una escoba" descrito en el problema 4-23 tiene los siguientes parámetros:

$$M_b = 1 \text{ kg} \qquad M_c = 10 \text{ kg} \qquad L = 1 \text{ m} \qquad g = 32.2 \text{ pies/s}^2$$

El modelo del sistema en ecuaciones de estado linealizadas en pequeña señal es:

$$\Delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}^*\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^*\Delta r(t)$$

en donde:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 25.92 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2.36 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0732 \\ 0 \\ 0.0976 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre la ecuación característica de $\mathbf{A}^*$ y sus raíces.
(b) Determine la controlabilidad de $[\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*]$.

(c) Por razones de economía, solamente una de las variables de estado será medida para realimentación. La ecuación de salida se escribe como:

$$\Delta y(t) = \mathbf{C}^*\Delta\mathbf{x}(t)$$

en donde:

(1) $\mathbf{C}^* = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ (2) $\mathbf{C}^* = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$

(3) $\mathbf{C}^* = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$ (4) $\mathbf{C}^* = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$

Determine cuál $\mathbf{C}^*$ corresponde a un sistema observable.

▲ Controlabilidad

5-42. El péndulo invertido doble que se muestra en la Fig. 5P-42 se modela aproximadamente por la siguiente ecuación de estado lineal:

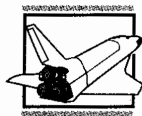
$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

en donde:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \\ x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -16 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determine la controlabilidad de los estados.



5-43. En la Fig. 5P-43, se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control simplificado para el Telescopio Espacial Grande (TEG). Para propósitos de simulación y control, sería deseable modelar el sistema mediante ecuaciones de estado y mediante un diagrama de estado.

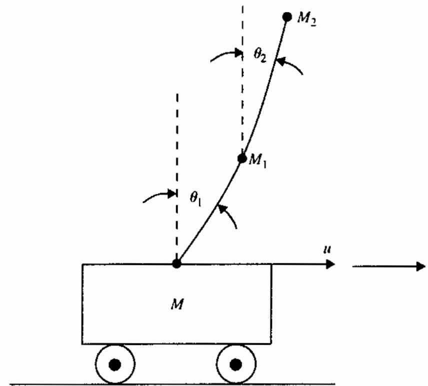


Figura 5P-42

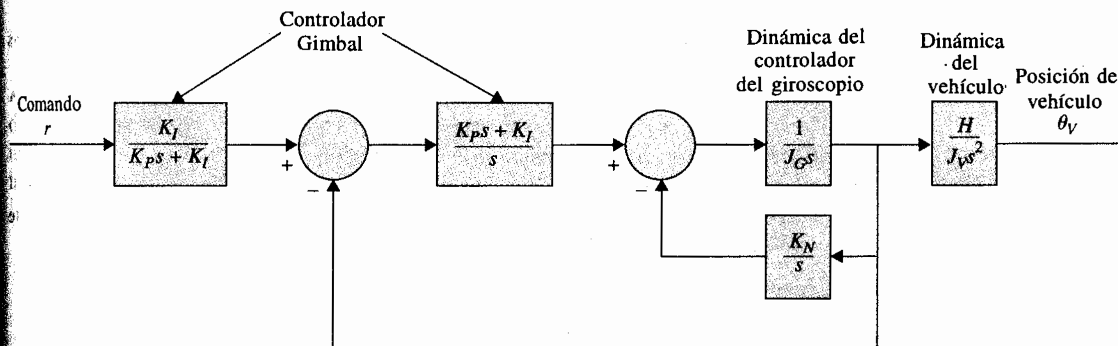


Figura 5P-43

▲ Ecuaciones de estado, diagrama de estado, función de transferencia, ecuación característica

(a) Dibuje un diagrama de estado para el sistema y escriba las ecuaciones de estado en forma matricial. El diagrama de estado deberá contener un número mínimo de variables de estado, para que sea de ayuda si la función de transferencia del sistema se escribe primero.

(b) Encuentre la ecuación característica del sistema.

▲ Controlabilidad, observabilidad, realimentación de salida

5-44. Los diagramas de estado que se muestran en la Fig. 5P-44, representan dos subsistemas conectados en cascada.

(a) Determine la controlabilidad y observabilidad del sistema.

(b) Considere que se aplica realimentación de la salida mediante la realimentación de y_2 a u_2, esto es $u_2 = -ky_2$, en donde k es una constante real. Determine cómo afecta el valor de k a la controlabilidad y observabilidad del sistema.

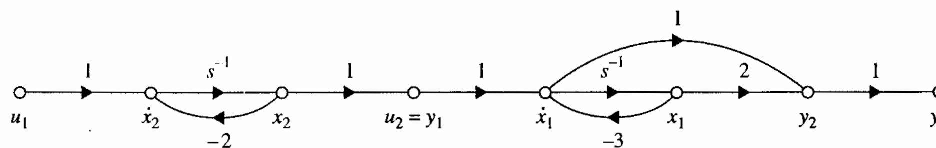


Figura 5P-44

▲ Controlabilidad, realimentación del estado

5-45. Dado el sistema:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \qquad y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

en donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 1]$$

(a) Determine la controlabilidad y observabilidad del estado del sistema.

(b) Suponga que $u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$, donde $\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2]$, donde k_1 y k_2 son constantes reales. Determine si y cómo afectan los elementos de **K**, a la controlabilidad y observabilidad del sistema en lazo cerrado.

▲ Ecuaciones de estado discreto en forma matricial

5-46. En la Fig. 5P-46 se muestra el diagrama de bloques de un sistema de datos muestreados. Las ecuaciones de estado del proceso controlado son:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \qquad \frac{dx_2(t)}{dt} = -2x_1(t) - 3x_2(t) + h(t)$$

en donde $h(t)$ es la salida de dispositivo de muestreo y retención [*i. e.*, $u(t)$ es constante durante el periodo de muestreo T]. El periodo de muestreo T es de 1 segundo.

(a) Encuentre las ecuaciones de estado discretas matriciales en la forma:

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \boldsymbol{\phi}(T)\mathbf{x}(kT) + \theta(T)u(kT)$$

(b) Encuentre $\mathbf{x}(NT)$ como funciones de $\mathbf{x}(0)$ y $u(kT)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, N$.

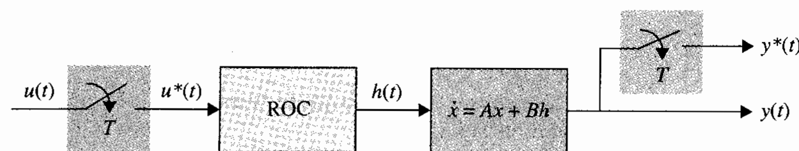


Figura 5P-30

▲ Ecuaciones de estado discreto en forma matricial

5-47. Repita el problema 5-46 para el sistema lineal de datos muestreados con las siguientes ecuaciones de estado:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) \qquad \frac{dx_2(t)}{dt} = u(t)$$

El periodo de muestreo es 0.001 segundos.

▲ Sistema de datos discretos, función de transferencia

5-48. **(a)** Encuentre la función de transferencia $\mathbf{X}(z)/U(z)$ para el sistema descrito en el problema 5-46.
(b) Encuentre la ecuación característica del sistema descrito en el problema 5-46.

▲ Sistema de datos discretos, función de transferencia

5-49. **(a)** Encuentre la función de transferencia $\mathbf{X}(z)/U(z)$ para el sistema descrito en el problema 5-47.
(b) Encuentre la ecuación característica y sus raíces del sistema descrito en el problema 5-47.

▲ Control digital, diagrama de estado, ecuación característica

5-50. Dibuje un diagrama de estado para el sistema de control digital representado por las siguientes ecuaciones dinámicas:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \qquad y(k) = x_1(k)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Encuentre la ecuación característica del sistema.

▲ Control digital, diagrama de estado, función de transferencia

5-51. En la Fig. 5P-51 se muestra el diagrama de estado de un sistema de control digital. Escriba las ecuaciones dinámicas. Encuentre la función de transferencia $Y(z)/R(z)$.

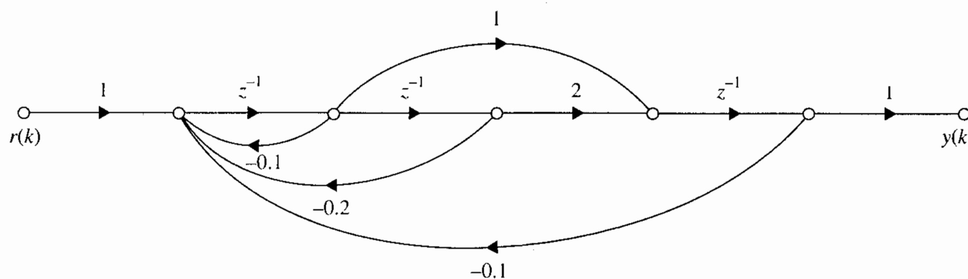


Figura 5P-51

▲ Sistema de datos muestreados, ecuaciones de estado, diagrama de estado

5-52. En la Fig. 5P-52 se muestra el diagrama de bloques de un sistema de datos muestreados. Escriba las ecuaciones de estado discretas del sistema. Dibuje un diagrama de estado para el sistema.

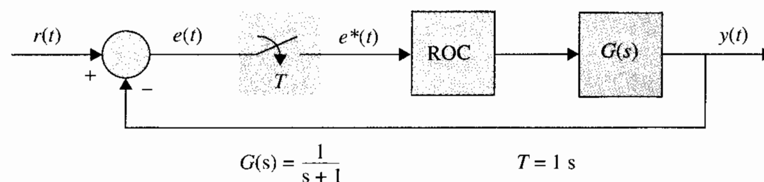


Figura 5P-52

Problemas adicionales para computadora

5-53. La ecuación del par para la parte (a) del problema 4-13 es:

$$J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = K_F d_1 \theta(t) + T_s d_2 \delta(t)$$

en donde $K_F d_1 = 1$ y $J = 1$. Defina las variables de estado como $x_1 = \theta$ y $x_2 = d\theta/dt$. Encuentre la matriz de transición de estado $\phi(t)$ utilizando **LINSYS** de **ACSP** o cualquier otro programa disponible.

5-54. Empezando con la ecuación de estado $d\mathbf{x}(t)/dt = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\theta_r$ obtenida en el problema 5-14, utilice **LINSYS** o **MATLAB** o cualquier otro programa para computadora para encontrar lo siguiente.

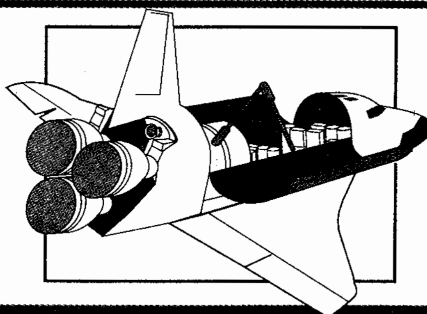
(a) La matriz de transición de estado de **A**, $\phi(t)$.

(b) La ecuación característica de **A**.

(c) Los valores característicos de **A**.

(d) Calcule y dibuje la gráfica de la respuesta al escalón unitario de $y(t) = \theta_y(t)$ para 3 segundos. Haga todas las condiciones iniciales en cero.

6 Estabilidad de sistemas de control lineales



PALABRAS CLAVE Y TEMAS

- ▲ Definiciones de estabilidad
- ▲ Estabilidad absoluta
- ▲ Estabilidad relativa
- ▲ Criterio de Routh-Hurwitz
- ▲ Estabilidad de sistemas en tiempo discreto

6-1 Introducción

De los estudios de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de sistemas SISO, se aprendió que la solución homogénea que corresponde a la respuesta transitoria del sistema está gobernada por las raíces de la ecuación característica. Básicamente, el diseño de sistemas de control lineal se puede enunciar como un problema que consiste en arreglar la localización de los polos y ceros de la función de transferencia del sistema, para que el sistema se comporte de acuerdo con las especificaciones prescritas.

Entre las muchas formas de especificaciones de desempeño utilizadas en el diseño, el requerimiento más importante es que el sistema sea estable. Por lo general, un sistema inestable se considera inútil. Cuando se consideran todos los tipos de sistemas —lineal, no lineal, invariante con el tiempo y variante con el tiempo— la definición de estabilidad se puede dar

en muchas formas diferentes. En las siguientes discusiones, solamente se tratará con la estabilidad de sistemas lineales SISO invariantes con el tiempo.

Para propósitos de análisis y diseño, la estabilidad se puede clasificar como **estabilidad absoluta** y **estabilidad relativa.** La estabilidad absoluta se refiere a la condición de si el sistema es estable o inestable, es una respuesta de *si* o *no.* Una vez que se ha encontrado que el sistema es estable, es interesante determinar qué tan estable es, y este grado de estabilidad es una medida de la estabilidad relativa.

Antes de definir la estabilidad, se definen los siguientes dos tipos de respuestas de sistemas lineales invariantes en el tiempo:

1. **Respuesta de estado cero.** La respuesta de estado cero se debe a la entrada únicamente; todas las condiciones iniciales del sistema son cero.
2. **Respuesta de entrada cero.** La respuesta de entrada cero se debe a la condición inicial únicamente; y todas las entradas son cero.

Del principio de superposición, cuando un sistema está sujeto tanto a las entradas como a las condiciones iniciales, la respuesta total se escribe como:

respuesta total = respuesta de estado cero + respuesta de entrada cero

Las definiciones antes mencionadas se aplican para sistemas en tiempo continuo, así como para sistemas en tiempo discreto.

6-2 Estabilidad de entrada acotada y salida acotada: Sistemas en tiempo continuo

Sean $u(t)$, $y(t)$ y $g(t)$ la entrada, la salida y la respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante con el tiempo, respectivamente. *Con condiciones iniciales cero, se dice que el sistema es estable de entrada-acotada/salida-acotada ("Bounded-Input/Bounded-Output", BIBO), o simplemente estable, si su salida $y(t)$ es acotada para una entrada $u(t)$ acotada.*

La integral de convolución que relaciona $u(t)$, $y(t)$ y $g(t)$ es:

$$y(t) = \int_0^\infty u(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \tag{6-1}$$

Tomando el valor absoluto de ambos miembros de la ecuación, se obtiene:

$$|y(t)| = \left|\int_0^\infty u(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right| \tag{6-2}$$

o

$$|y(t)| \leq \int_0^\infty |u(t-\tau)||g(\tau)|\,d\tau \tag{6-3}$$

Si $u(t)$ es acotada,

$$|u(t)| \leq M \tag{6-4}$$

en donde M es un número positivo finito. Entonces,

$$|y(t)| \leq M\int_0^\infty |g(\tau)|\,d\tau \tag{6-5}$$

Por lo que, si $y(t)$ es acotada, o

$$|y(t)| \leq N < \infty \tag{6-6}$$

en donde N es un número positivo finito, la siguiente condición se debe mantener:

$$M\int_0^\infty |g(\tau)|\,d\tau \leq N < \infty \tag{6-7}$$

O, para cualquier Q positiva finita,

$$\int_0^\infty |g(\tau)|\,d\tau \leq Q < \infty \tag{6-8}$$

La condición dada en la ecuación (6-8) implica que el área bajo la curva $|g(\tau)|$ en función de τ, debe ser finita.

6-2-1 Relación entre las raíces de la ecuación característica y la estabilidad

Para mostrar la relación entre las raíces de la ecuación característica y la condición en la ecuación (6-8), la función de transferencia $G(s)$ se escribe de acuerdo con la definición de la transformada de Laplace como:

$$G(s) = \mathcal{L}[g(\tau)] = \int_0^\infty g(t)e^{-st}\,dt \tag{6-9}$$

Tomando el valor absoluto en ambos miembros de la última ecuación, se tiene:

$$|G(s)| = \left|\int_0^\infty g(t)e^{-st}\,dt\right| \leq \int_0^\infty |g(t)||e^{-st}|\,dt \tag{6-10}$$

ya que $|e^{-st}| = |e^{-\sigma t}|$, en donde σ es la parte real de s. Cuando s adopta el valor de un polo de $G(s)$, G(s) = ∞, la ecuación (6-10) se convierte en:

$$\infty \leq \int_0^\infty |g(t)||e^{-\sigma t}|\, dt \tag{6-11}$$

▲ Para la estabilidad BIBO, las raíces de la ecuación característica deben estar en el semiplano izquierdo del plano *s*.

Si una o más raíces de la ecuación característica están en el semiplano derecho del plano *s* o en el eje $j\omega$, $\sigma \geq 0$; entonces:

$$|e^{-\sigma t}| \leq M = 1 \tag{6-12}$$

La ecuación (6-11) se convierte en:

▲ Un sistema que es estable BIBO simplemente se llama estable; de otra forma es inestable.

$$\infty \leq \int_0^\infty M|g(t)|\, dt = \int_0^\infty |g(t)|\, dt \tag{6-13}$$

que viola los requisitos de la estabilidad BIBO. Por lo que, *para la estabilidad BIBO, las raíces de la ecuación característica, o los polos de G(s), no pueden estar localizados en el semiplano derecho del plano s o en el eje jω, o todos deben quedar en el semiplano izquierdo del plano s. Se dice que un sistema es inestable si no es estable BIBO.* Cuando un sistema tiene raíces sobre el eje $j\omega$, digamos en $s = j\omega_0$ y $s = -j\omega_0$, si la entrada es senoidal, sen $\omega_0 t$, la salida será de la forma t sen $\omega_0 t$, que no es acotada, y el sistema es inestable.

6-3 Estabilidad a entrada cero y estabilidad asintótica de sistemas en tiempo continuo

En esta sección se define la **estabilidad asintótica** y la **estabilidad a entrada cero** y se establecen sus relaciones con la estabilidad BIBO.

La **estabilidad a entrada cero** se refiere a la condición de estabilidad cuando la entrada es cero, y el sistema es llevado solamente por sus condiciones iniciales. Se demostrará que la estabilidad de entrada cero también depende de las raíces de la ecuación característica. Considere que la entrada de un sistema de n-ésimo orden es cero, y la salida, debido a las condiciones iniciales es $y(t)$. Entonces $y(t)$ se puede expresar como:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k(t) y^{(k)}(t_0) \tag{6-14}$$

en donde:

$$y^{(k)}(t_0) = \left. \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right|_{t=0} \tag{6-15}$$

y $g_k(t)$ indica la respuesta a entrada cero debida a $y^{(k)}(t_0)$. La estabilidad a entrada cero se define como sigue: *Si la respuesta a entrada cero y(t), sujeta a condiciones iniciales finitas,* $y^{(k)}(t_0)$, *alcanza a cero cuando t tiende a infinito, se dice que el sistema es estable a entrada cero, o estable; de otra forma, el sistema es inestable.*

En forma matemática, la definición anterior se puede establecer como: *Un sistema lineal e invariante con el tiempo es estable de entrada cero si para cualquier conjunto finito* $y^{(k)}(t_0)$, *existe un número positivo M, que depende de* $y^{(k)}(t_0)$, *tal que:*

(1) $$|y(t)| \leq M < \infty \quad \text{para toda } t \geq t_0 \tag{6-16}$$

y

(2) $$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0 \tag{6-17}$$

Debido a que la condición en la última ecuación requiere que la magnitud de $y(t)$ alcance cero cuando el tiempo tiende a infinito, la estabilidad de entrada cero también se conoce como **estabilidad asintótica.**

Tomando el valor absoluto en ambos miembros de la ecuación (6-14), se obtiene:

$$|y(t)| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} g_k(t) y^{(k)}(t_0) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |g_k(t)||y^{(k)}(t_0)| \tag{6-18}$$

Ya que todas las condiciones iniciales se supone que son finitas, la condición en la ecuación (6-16) requiere que la siguiente condición sea verdadera:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |g_k(t)| < \infty \quad \text{para toda } t \geq 0 \tag{6-19}$$

Considere que las n raíces de la ecuación característica se expresan como $s_i = \sigma_i + j\omega_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces, si m de las n raíces son simples y el resto son de orden múltiple, $y(t)$ estará en la forma:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{m} K_i e^{s_i t} + \sum_{i=0}^{n-m-1} L_i t^i e^{s_i t} \tag{6-20}$$

en donde K_i y L_i son coeficientes constantes. Ya que los términos exponenciales $e^{s_i t}$ en la ecuación (6-20) controlan la respuesta $y(t)$ cuando $t \to \infty$, para satisfacer las dos condiciones

en las ecuaciones (6-16) y (6-17), las partes reales de s_i deben ser negativas. En otras palabras, las raíces de la ecuación característica deben estar todas en el semiplano izquierdo del plano s.

De las discusiones anteriores, se observa que *para sistemas lineales e invariantes con el tiempo, la estabilidad BIBO, a entrada cero y asintótica, tienen el mismo requisito de que todas las raíces de la ecuación característica deben localizarse en el semiplano izquierdo del plano s. Por lo que si un sistema es BIBO estable, debe también ser de entrada cero o asintóticamente estable.* Por esta razón, simplemente la condición de estabilidad de un sistema lineal se refiere como **estable** o **inestable.** Esta última condición se refiere a que por lo menos una de las raíces de la ecuación característica no está en el semiplano izquierdo del plano s. Por razones prácticas, a menudo se hace referencia a la situación en que la ecuación característica tiene raíces simples sobre el eje $j\omega$ y ninguna en el semiplano derecho del plano como **marginalmente estable** o **marginalmente inestable.** *Una excepción a esto es si en el sistema se coloca un integrador, o en el caso de sistemas de control, un sistema de control de velocidad, el sistema tendría una(s) raíz(ces) en s = 0 y sería considerado como estable.* En forma similar, si el sistema está diseñado para ser un oscilador, la ecuación característica tendría raíces simples sobre el eje $j\omega$ y el sistema sería visto como estable.

▲ Los sistemas cuyas raíces de la ecuación característica se colocan intencionalmente sobre el eje $j\omega$ se consideran estables.

Ya que las raíces de la ecuación característica son las mismas que los valores característicos de **A** de las ecuaciones de estado, la condición de estabilidad coloca las mismas restricciones en los valores característicos. Considere que las raíces de la ecuación característica o los valores característicos de **A** de un sistema en tiempo continuo, SISO, lineal e invariante con el tiempo son $s_i = \sigma_i + j\omega_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Si cualquiera de las raíces es compleja, está en pares complejos conjugados. Las posibles condiciones de estabilidad del sistema se resumen en la tabla 6-1 en función de las raíces de la ecuación característica.

El siguiente ejemplo ilustra las condiciones de estabilidad de sistemas con referencia a los polos de las funciones de transferencia del sistema que son también las raíces de la ecuación característica.

Tabla 6-1 Condiciones de estabilidad de sistemas en tiempo continuo, SISO, lineales e invariantes con el tiempo

Condición de estabilidad	Valores de las raíces
Asintóticamente estable o simplemente estable	$\sigma_i < 0$ para todos i, $i = 1, 2, \ldots, n$ (Todas las raíces están en el semiplano izquierdo del plano s.)
Marginalmente estable o marginalmente inestable	$\sigma_i = 0$ para cualquier i para raíces simples, y no $\sigma_i > 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. (Por lo menos una raíz simple, y ninguna raíz de orden múltiple en el eje $j\omega$; y no hay raíces en el semiplano derecho del plano s.) (Nótense las excepciones.)
Inestable	$\sigma_i > 0$ para cualquier i, o $\sigma_i = 0$ para cualquier raíz de orden múltiple. $i = 1, 2, \ldots, n$. (Por lo menos una raíz simple en el semiplano derecho del plano s o por lo menos una raíz de orden múltiple sobre el eje $j\omega$.

Ejemplo 6-1

$$M(s) = \frac{20}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$ BIBO o asintóticamente estable, o simplemente estable.

$$M(s) = \frac{20(s+1)}{(s-1)(s^2+2s+2)}$$ Inestable debido al polo en $s = 1$.

$$M(s) = \frac{20(s-1)}{(s+2)(s^2+4)}$$ Marginalmente estable o marginalmente inestable debido a $s = \pm j2$.

$$M(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)}$$ Inestable debido al polo de orden múltiple en $s = \pm j2$.

$$M(s) = \frac{10}{s^4+30s^3+s^2+10s}$$ Estable si el polo en $s = 0$ es colocado intencionalmente.

▲

6-4 Métodos para determinar la estabilidad

Las discusiones en las secciones anteriores llevan a la conclusión de que la estabilidad de sistemas SISO, lineales e invariantes con el tiempo se puede determinar al verificar la ubicación de las raíces de la ecuación característica del sistema. Para todos los propósitos prácticos, no hay necesidad de calcular la respuesta completa del sistema para determinar la estabilidad. Las regiones de estabilidad e inestabilidad en el plano s se ilustran en la Fig. 6-1. Cuando se conocen todos los parámetros del sistema, las raíces de la ecuación característica se pueden obtener mediante un programa para computadora de cálculo de raíces que está disponible en muchos paquetes comerciales. Por ejemplo, el archivo-M **root(c)** de **MATLAB** resuelve las raíces de un polinomio, y **eig(A)** de **MATLAB** encuentra los valores propios de **A.** Varias funciones en las herramientas de **CSAD** contienen características que permiten el cálculo de los polos de la función de transferencia del sistema. Lo mejor es utilizar **svdesign,** que tiene la opción de encontrar los valores propios con el sistema descrito ya sea por funciones de transferencia o por ecuaciones dinámicas. En el **Program CC,** la instrucción **zeros** se

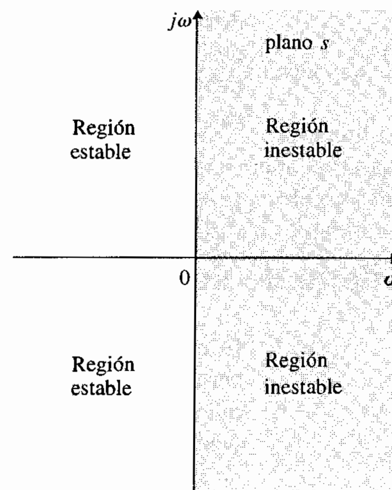


Figura 6-1 Regiones estable e inestable en el plano *s*.

puede utilizar para encontrar los ceros de un polinomio, y la instrucción **stability** regresa los polos de la función de transferencia en lazo cerrado y la condición de estabilidad una vez que se introduce la función de transferencia en lazo abierto. Éstos son meros ejemplos de qué pueden hacer los programas de computadora para encontrar las raíces de la ecuación característica.

Para fines de diseño, existirán parámetros desconocidos o variables contenidos en la ecuación característica, y no sería factible utilizar programas de búsqueda de raíces. Los métodos detallados a continuación son bien conocidos para determinar la estabilidad de sistemas lineales en tiempo continuo, sin involucrar la solución de las raíces.

1. **Criterio de Routh-Hurwitz.** Este criterio es un método algebraico que proporciona información sobre la estabilidad absoluta de un sistema lineal e invariante con el tiempo que tiene una ecuación característica con coeficientes constantes. El criterio prueba si cualquiera de las raíces de la ecuación característica está en el semiplano derecho del plano s. También indica el número de raíces que están sobre el eje $j\omega$ y en el semiplano derecho del plano.
2. **Criterio de Nyquist.** Este criterio es un método semigráfico que provee información sobre la diferencia entre el número de polos y ceros de la función de transferencia en lazo cerrado que están en semiplano derecho del plano s mediante la observación del comportamiento de la gráfica de Nyquist de la función de transferencia de lazo.
3. **Diagrama de Bode.** Este diagrama es una gráfica de la magnitud de la función de transferencia de lazo $G(j\omega)H(j\omega)$ en decibeles y de la fase de $G(j\omega)H(j\omega)$ en grados, en función de la frecuencia ω. La estabilidad del sistema en lazo cerrado se puede determinar al observar el comportamiento de estas gráficas.

Por tanto, será evidente a lo largo del libro, que la mayoría de las técnicas de análisis y diseño sobre sistemas de control representan métodos alternativos para resolver el mismo problema. El diseñador simplemente tiene que hacer la elección correcta de la mejor herramienta de análisis, dependiendo de cada situación en particular. Los detalles del criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz se presentan en la siguiente sección.

6-5 Criterio de Routh-Hurwitz

El criterio de Routh-Hurwitz representa un método para determinar la localización de los ceros de un polinomio con coeficientes constantes reales con respecto a los semiplanos izquierdo y derecho del plano s, sin obtener los ceros. *Debido a que los programas para computadoras para encontrar raíces pueden resolver los ceros de un polinomio con facilidad, el valor del criterio de Routh-Hurwitz está limitado a ecuaciones con por lo menos un parámetro desconocido.*

Considere que la ecuación característica de un sistema lineal SISO e invariante con el tiempo es de la forma de:

$$F(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{6-21}$$

en donde todos los coeficientes son reales. Para que la ecuación (6-21) no tenga raíces con partes reales positivas, es *necesario y suficiente* que las siguientes condiciones se cumplan:

1. Todos los coeficientes de la ecuación tienen el mismo signo.
2. Ninguno de los coeficientes es igual a cero.

Las condiciones antes mencionadas están basadas en las leyes de álgebra, que relacionan los coeficientes de la ecuación (6-21) como sigue:

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\sum \text{todas las raíces} \tag{6-22}$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_n} = \sum \text{productos de las raíces tomando dos a la vez} \tag{6-23}$$

$$\frac{a_{n-3}}{a_n} = -\sum \text{productos de las raíces tomando tres a la vez} \tag{6-24}$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_0}{a_n} = (-1)^n \text{productos de todas las raíces} \tag{6-25}$$

Por lo que todas estas relaciones deben ser positivas y no cero a menos que una de las raíces tenga una parte real positiva.

Las dos condiciones necesarias para que la ecuación (6-21) no tenga raíces en el semiplano derecho del plano s, se pueden verificar fácilmente mediante la inspección de la ecuación. Sin embargo, estas condiciones no son suficientes, ya que es posible que una ecuación con todos sus coeficientes distintos de cero y del mismo signo pueda no tener todas las raíces en el semiplano izquierdo del plano s.

6-5-1 Criterio de Hurwitz [1]

El criterio de Routh-Hurwitz está basado en el criterio de Hurwitz, que se enuncia como sigue: *La condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de la ecuación (6-21)*

estén en el semiplano izquierdo del plano s es que los ***determinantes de Hurwitz*** *de la ecuación,* D_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *sean todos positivos.*

Los determinantes de Hurwitz de la ecuación (6-21) están dados por

$$D_1 = a_{n-1} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \qquad \cdots$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} \tag{6-26}$$

en donde los coeficientes con índices mayores que n o negativos deben remplazarse con ceros. A primera vista, la aplicación de los determinantes de Hurwitz puede parecer demasiado pesada para ecuaciones de orden superior, debido a la cantidad de trabajo involucrado en la evaluación de los determinantes de la ecuación (6-26). Afortunadamente, Routh simplificó el proceso introduciendo un método de tabulación en lugar de los determinantes de Hurwitz.

6-5-2 Tabulación de Routh

El primer paso en la simplificación del criterio de Hurwitz, ahora llamado el criterio de Routh-Hurwitz, es arreglar los coeficientes de la ecuación en la ecuación (6-21) en dos renglones. El primer renglón consiste del primero, tercero, quinto, . . . , coeficientes, y el segundo consiste del segundo, cuarto, sexto, . . . , coeficientes, todos contados desde el término de orden más alto, como se muestra en la siguiente tabulación:

$$\begin{matrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \end{matrix}$$

El siguiente paso es formar el siguiente arreglo de números mediante las operaciones indicadas, ilustradas aquí para una ecuación de sexto orden:

$$a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \tag{6-27}$$

$$
\begin{array}{lllll}
s^6 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \\
s^5 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\
s^4 & \dfrac{a_5a_4 - a_6a_3}{a_5} = A & \dfrac{a_5a_2 - a_6a_1}{a_5} = B & \dfrac{a_5a_0 - a_6 \times 0}{a_5} = a_0 & 0 \\
s^3 & \dfrac{Aa_3 - a_5B}{A} = C & \dfrac{Aa_1 - a_5a_0}{A} = D & \dfrac{A \times 0 - a_5 \times 0}{A} = 0 & 0 \\
s^2 & \dfrac{BC - AD}{C} = E & \dfrac{Ca_0 - A \times 0}{C} = a_0 & \dfrac{C \times 0 - A \times 0}{C} = 0 & 0 \\
s^1 & \dfrac{ED - Ca_0}{E} = F & 0 & 0 & 0 \\
s^0 & \dfrac{Fa_0 - E \times 0}{F} = a_0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

El arreglo anterior se conoce como **tabulación de Routh** o **arreglo de Routh.** La columna de eses en el lado izquierdo se utiliza para propósitos de identificación. La columna de referencia mantiene el rastro de los cálculos, y el último renglón de la tabulación de Routh debe ser siempre el renglón s^0.

Una vez que la tabulación de Routh se ha completado, el último paso en la aplicación del criterio es investigar los *signos* de los coeficientes de la *primera columna* de la tabulación, que contiene información sobre las raíces de la ecuación. Se hacen las siguientes conclusiones: *Las raíces de la ecuación están todas en el semiplano izquierdo del plano s si todos los elementos de la primera columna de la tabulación de Routh son del mismo signo. El número de cambios de signos en los elementos de la primera columna es igual al número de raíces con partes reales positivas o en el semiplano derecho del plano s.*

La razón para la conclusión anterior es simple, basada en los requerimientos de los determinantes de Hurwitz. Las relaciones entre los elementos en la primera columna de la tabulación de Routh y los determinantes de Hurwitz son:

$$
\begin{array}{ll}
s^6 & a_5 = a_6 \\
s^5 & a_5 = D_1 \\
s^4 & A = \dfrac{D_2}{D_1} \\
s^3 & C = \dfrac{D_3}{D_2} \\
s^2 & E = \dfrac{D_4}{D_3} \\
s^1 & F = \dfrac{D_5}{D_4} \\
s^0 & a_0 = \dfrac{D_6}{D_5}
\end{array}
$$

Por tanto, si todos los determinantes de Hurwitz son positivos, los elementos en la primera columna de la tabulación de Routh deberán ser del mismo signo.

Los siguientes ejemplos ilustran las aplicaciones del criterio de Routh-Hurwitz cuando la tabulación termina sin complicaciones.

Ejemplo 6-2

Considere la ecuación:

$$(s-2)(s+1)(s-3) = s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0 \tag{6-28}$$

que tiene un coeficiente negativo. Por tanto, de la condición necesaria, se sabe sin aplicar la prueba de Routh que no todas las raíces de la ecuación están en el semiplano izquierdo del plano s. De hecho, de la forma factorizada de la ecuación, se sabe que existen dos raíces en el semiplano derecho del plano s, en $s = 2$ y $s = 3$. Para ilustrar la aplicación del criterio de Routh-Hurwitz, la tabulación de Routh se realiza como sigue:

	s^3	1	1
Cambio de signo			
	s^2	-4	6
Cambio de signo			
	s^1	$\dfrac{(-4)(1)-(6)(1)}{-4} = 2.5$	0
	s^0	$\dfrac{(2.5)(6)-(-4)(0)}{2.5} = 6$	0

Ya que existen dos cambios de signo en la primera columna de la tabulación, la ecuación tiene dos raíces localizadas en el semiplano derecho del plano s. Esto concuerda con el resultado conocido. ▲

Ejemplo 6-3

Considere la ecuación:

$$2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0 \tag{6-29}$$

Ya que la ecuación no tiene términos faltantes y los coeficientes son todos del mismo signo, satisface la condición necesaria por no tener raíces en el semiplano derecho o en el eje imaginario del plano s. Sin embargo, aún debe verificarse la condición de suficiencia. La tabulación de Routh se hace como sigue:

	s^4	2	3	10
	s^3	1	5	0
Cambio de signo				
	s^2	$\dfrac{(1)(3)-(2)(5)}{1} = -7$	10	0
Cambio de signo				
	s^1	$\dfrac{(-7)(5)-(1)(10)}{-7} = 6.43$	0	0
	s^0	10	0	0

Ya que existen dos cambios de signo en la primera columna de la tabulación, la ecuación tiene dos raíces en el semiplano derecho del plano s. Resolviendo las raíces de la ecuación (6-29), se tienen cuatro raíces en $s = -1.0055 \pm j0.93311$ y $s = 0.7555 \pm j1.4444$. Claramente, las últimas dos raíces están en el semiplano derecho del plano s, que provoca que el sistema sea inestable. ▲

6-5-3 Casos especiales cuando la tabulación de Routh termina prematuramente

Las ecuaciones consideradas en los dos ejemplos anteriores están diseñadas de tal forma que la tabulación de Routh pueda llevarse a cabo sin ninguna complicación. Dependiendo de los coeficientes de la ecuación, las siguientes dificultades pueden impedir que la tabulación de Routh se complete apropiadamente.

1. El primer elemento en cualquiera de los renglones de la tabulación de Routh es cero, pero los otros no lo son.
2. Los elementos en un renglón de la tabulación de Routh son todos cero.

En el primer caso, si un cero aparece en el primer elemento de un renglón, los elementos en el siguiente renglón se convertirán en infinito, y la tabulación de Routh no puede continuar. Para remediar la situación, *se remplaza el elemento cero en la primera columna por un número pequeño positivo y arbitrario ε, y después se continúa con la tabulación de Routh.* Esto se ilustra mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6-4

Considere la ecuación característica de un sistema lineal:

$$s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0 \tag{6-30}$$

Ya que todos los coeficientes son distintos de cero y del mismo signo, se necesita aplicar el criterio Routh-Hurwitz. La tabulación de Routh se realiza como sigue:

s^4	1	2	3
s^3	1	2	0
s^2	0	3	

Debido a que el primer elemento del renglón s^2 es cero, los elementos en el renglón s^1 deben ser todos infinito. Para sobrepasar esta dificultad, se remplaza el cero en el renglón s^2 por un número pequeño

positivo ε y entonces se continúa con la tabulación. Comenzando con el renglón s^2, los resultados son como sigue:

	s^2	ε	3
Cambio de signo	s^1	$\frac{2\varepsilon - 3}{\varepsilon} \cong -\frac{3}{\varepsilon}$	0
Cambio de signo	s^0	3	0

Ya que existen dos cambios de signo en la primera columna de la tabulación de Routh, la ecuación en la ecuación (6-30) tiene dos raíces en el semiplano derecho del plano s. Resolviendo las raíces de la ecuación (6-30), se obtiene $s = -0.09057 \pm j0.902$ y $s = 0.4057 \pm j1.2928$; las dos últimas raíces están claramente en el semiplano derecho del plano s. ▲

Debe notarse que el método ε descrito puede no dar los resultados correctos si la ecuación tiene raíces imaginarias puras [2,3].

En el segundo caso especial, cuando todos los elementos en un renglón de la tabulación de Routh son ceros antes de que la tabla esté terminada apropiadamente, indica que una o más de las siguientes condiciones pueden existir:

1. La ecuación tiene al menos un par de raíces reales con igual magnitud pero signos opuestos.
2. La ecuación tiene uno o más pares de raíces imaginarias.
3. La ecuación tiene pares de raíces complejas conjugadas que son simétricas con respecto al origen del plano s (*i. e.*, $s = -1 \pm j1$, $s = 1 \pm j1$).

▲ Los coeficientes de la ecuación auxiliar son aquellos del renglón justo arriba del renglón de ceros en la tabla de Routh.

La situación con el renglón completo de ceros se puede remediar utilizando la **ecuación auxiliar** $A(s) = 0$, la cual se forma con los coeficientes del renglón que están justo arriba del renglón de ceros en la tabulación de Routh. La ecuación auxiliar siempre es un polinomio par; esto es, solamente aparecen potencias pares de s. *Las raíces de la ecuación auxiliar también satisfacen la ecuación original.* Por tanto, resolviendo la ecuación auxiliar, también se obtienen algunas de las raíces de la ecuación original. Para continuar con la tabulación de Routh cuando un renglón de ceros aparece, se siguen los siguientes pasos:

▲ Las raíces de la ecuación auxiliar también deben satisfacer la ecuación original.

1. Forme la ecuación auxiliar $A(s) = 0$ mediante el uso de los coeficientes del renglón que se encuentra justo antes del renglón de ceros.
2. Tome la derivada de la ecuación auxiliar con respecto a s; esto da $dA(s)/ds = 0$.
3. Remplace el renglón de ceros con los coeficientes de $dA(s)/ds = 0$.

4. Continúe con la tabulación de Routh en la forma usual con el nuevo renglón de coeficientes remplazando el renglón de ceros.
5. Interprete en la forma usual el cambio de signos, si existe alguno, de los coeficientes en la primera columna de la tabulación de Routh.

Ejemplo 6-5

Considere la siguiente ecuación, que puede ser la ecuación característica de un sistema de control lineal:

$$s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4 = 0 \qquad (6\text{-}31)$$

La tabulación de Routh es:

s^5	1	8	7
s^4	4	8	4
s^3	6	6	0
s^2	4	4	
s^1	0	0	

Debido a que un renglón de ceros aparece prematuramente, la ecuación auxiliar se forma utilizando los coeficientes en el renglón s^2:

$$A(s) = 4s^2 + 4 = 0 \qquad (6\text{-}32)$$

La derivada de $A(s)$ con respecto a s es:

$$\frac{dA(s)}{ds} = 8s = 0 \qquad (6\text{-}33)$$

de la cual los coeficientes 8 y 0 remplazan a los ceros en el renglón s^1 en la tabulación original. La porción restante de la tabulación de Routh es:

s^1	8	0	coeficientes de $dA(s)/ds$
s^0	4		

Ya que no hay cambios de signo en la primera columna en la tabulación de Routh, la ecuación (6-31) no tiene ninguna raíz en el semiplano derecho del plano s. Resolviendo la ecuación auxiliar en la ecuación (6-32), se obtienen las dos raíces en $s = j$ y $s = -j$, que también son dos de las raíces de la ecuación (6-31). Por lo que la ecuación tiene dos raíces en el eje $j\omega$, y el sistema es marginalmente estable. Estas raíces imaginarias causan que la tabulación original de Routh tenga el renglón de ceros en el renglón s^1. ▲

Debido a que todos los ceros ocurren en un renglón que corresponde a una potencia impar de s, crean una ecuación auxiliar que sólo tiene potencias pares de s, todas las raíces de la ecuación auxiliar pueden estar en el eje $j\omega$. Para fines de diseño, se puede utilizar la condi-

ción de todo el renglón de ceros para obtener el valor marginal de un parámetro del sistema para lograr la estabilidad. El siguiente ejemplo ilustra el valor real del criterio de Routh-Hurwitz en un problema de diseño simple.

Ejemplo 6-6

Considere que un sistema de control de tercer orden tiene la ecuación característica:

$$s^3 + 3408.3s^2 + 1{,}204{,}000s + 1.5 \times 10^7K = 0 \tag{6-34}$$

El criterio Routh-Hurwitz se aplica para determinar el valor crítico de K para la estabilidad, esto es, el valor de K para el cual por lo menos una raíz está sobre el eje $j\omega$ y ninguna en el semiplano derecho del plano s. La tabulación de Routh de la ecuación (6-34) es como sigue:

$$\begin{array}{lcc} s^3 & 1 & 1{,}204{,}000 \\ s^2 & 3408.3 & 1.5 \times 10^7K \\ s^1 & \dfrac{410.36 \times 10^7 - 1.5 \times 10^7K}{3408.3} & 0 \\ s^0 & 1.5 \times 10^7K & \end{array}$$

Para que el sistema sea estable, todas las raíces de la ecuación (6-34) deben estar en el semiplano izquierdo del plano s, y por tanto todos los coeficientes en la primera columna de la tabulación de Routh deben tener el mismo signo. Esto conlleva a las siguientes condiciones:

$$\frac{410.36 \times 10^7 - 1.5 \times 10^7K}{3408.3} > 0 \tag{6-35}$$

y

$$1.5 \times 10^7K > 0 \tag{6-36}$$

De la desigualdad de la ecuación (6-35), se tiene $K < 273.57$, y la condición en la ecuación (6-36) da $K > 0$. Por tanto, la condición de K para que el sistema sea estable es:

$$0 < K < 273.57 \tag{6-37}$$

Si se considera que $K = 273.57$, la ecuación característica en la ecuación (6-34) tendrá dos raíces en el eje $j\omega$. Para encontrar estas raíces, se sustituye $K = 273.57$ en la ecuación auxiliar, que se obtiene de la tabulación de Routh utilizando los coeficientes en el renglón s^2. Por lo que:

$$A(s) = 3408.3s^2 + 4.1036 \times 10^9 = 0 \tag{6-38}$$

que tiene raíces en $s = j1097.27$ y $s = -j1097.27$, y el valor correspondiente de K para estas raíces es 273.57. También si el sistema se opera con $K = 273.57$, la respuesta a entrada cero del sistema será una senoidal no amortiguada con una frecuencia de 1097.27 rad/segundo. ▲

Ejemplo 6-7

Como otro ejemplo de la aplicación del criterio Routh-Hurwitz para problemas de diseño sencillo, considere que la ecuación característica de un sistema de control en lazo cerrado es:

$$s^3 + 3Ks^2 + (K + 2)s + 4 = 0 \tag{6-39}$$

Se desea encontrar el intervalo de valores de K para que el sistema sea estable. La tabulación de Routh de la ecuación (6-39) es:

$$\begin{array}{lcc} s^3 & 1 & K+2 \\ s^2 & 3K & 4 \\ s^1 & \dfrac{3K(K+2)-4}{3K} & 0 \\ s^0 & 4 & \end{array}$$

Del renglón s^2, la condición de estabilidad es $K > 0$, y del renglón s^1, la condición de estabilidad es:

$$3K^2 + 6K - 4 > 0 \tag{6-40}$$

o

$$K < -2.528 \quad \text{o} \quad K > 0.528$$

Cuando las condiciones de $K > 0$ y $K > 0.528$ se comparan, es claro que el último requerimiento es más estricto. Por lo que para que el sistema en lazo cerrado sea estable, K debe satisfacer:

$$K > 0.528$$

El requerimiento de $K < -2.528$ se desecha, ya que K no puede ser negativa. ▲

Debe reiterarse que el criterio Routh-Hurwitz es válido solamente si la ecuación característica es algebraica con coeficientes reales. Si cualquiera de los coeficientes es complejo, o si la ecuación no es algebraica, como que contenga funciones exponenciales o funciones senoidales de s, simplemente el criterio de Routh-Hurwitz no puede aplicarse.

Otra limitación del criterio Routh-Hurwitz es que sólo es válido para determinar las raíces de la ecuación característica con respecto al semiplano izquierdo o al semiplano derecho del plano s. El límite de estabilidad es el eje $j\omega$ del plano s. El criterio *no se puede* aplicar a ningún otro límite de estabilidad en el plano complejo, tal como el círculo unitario en el plano z, que es el límite de estabilidad de sistemas en tiempo discreto.

6-6 Estabilidad de sistemas en tiempo discreto

Las definiciones de estabilidad BIBO y a entrada cero se pueden extender fácilmente a sistemas de control en tiempo discreto, SISO, lineales e invariantes con el tiempo.

6-6-1 Estabilidad BIBO

Considere que $u(kT)$, $y(kT)$, y $g(kT)$ son la entrada, la salida y la secuencia al impulso de un sistema en tiempo discreto, SISO, lineal e invariante con el tiempo, respectivamente. Con *condiciones iniciales cero, se dice que el sistema es estable BIBO, o simplemente estable, si su secuencia de salida, $y(kT)$ está acotada para una entrada $u(kT)$ acotada.* Como en la Sec. 6-1, se puede mostrar que para que el sistema sea BIBO estable, la siguiente condición se debe cumplir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g(kT)| < \infty \qquad (6\text{-}41)$$

6-6-2 Estabilidad a entrada cero

Para la estabilidad a entrada cero, la secuencia de salida del sistema debe satisfacer las siguientes condiciones:

1. $|y(kT)| \leq M < \infty$ (6-42)
2. $\lim_{k \to \infty} |y(kT)| = 0$ (6-43)

Por tanto, la estabilidad a entrada cero también se puede enunciar como **estabilidad asintótica.** Se puede demostrar que *tanto la estabilidad BIBO como la estabilidad de entrada cero de sistemas en tiempo discreto requieren que las raíces de la ecuación característica estén dentro del círculo unitario $|z| = 1$ en el plano z.* Esto no es sorprendente, ya que el eje $j\omega$ del plano s se mapea en el círculo unitario en el plano z. Las regiones de estabilidad e inestabilidad para sistemas en tiempo discreto en el plano z se muestran en la Fig. 6-2. Considere

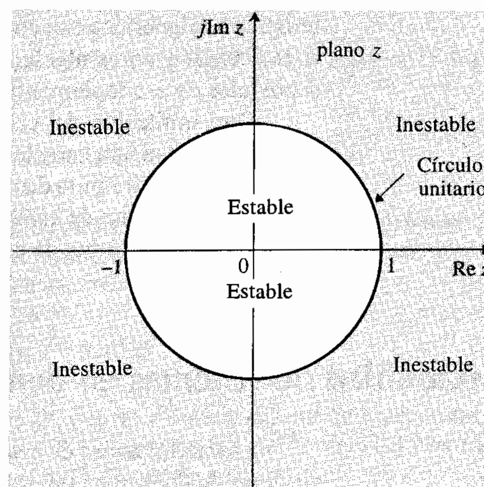


Figura 6-2 Regiones estable e inestable para sistemas en tiempo discreto en el plano z.

Tabla 6-2 Condiciones de estabilidad de sistemas en tiempo discreto SISO, lineales e invariantes con el tiempo

Condición de estabilidad	Valores de las raíces
Asintóticamente estable o simplemente estable	$\lvert z_i \rvert < 1$ para todos i, $i = 1, 2, \ldots, n$ (Todas las raíces están dentro del círculo unitario.)
Marginalmente estable o marginalmente inestable	$\lvert z_i \rvert = 1$ para cualquier i para raíces simples, y no $\lvert z_i \rvert > 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. (Al menos una raíz simple, y ninguna raíz de orden múltiple sobre el círculo unitario y ninguna raíz fuera del círculo.)
Inestable	$\lvert z_i \rvert > 1$ para cualquier i, o $\lvert z_i \rvert = 1$ para cualquier raíz de orden múltiple. $i = 1, 2, \ldots, n$. (Al menos una raíz simple fuera del círculo unitario y por lo menos una raíz de orden múltiple sobre el círculo unitario.)

que las raíces de la ecuación característica de un sistema en tiempo discreto, SISO, lineal e invariante con el tiempo son z_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Las posibles condiciones de estabilidad del sistema se resumen en la tabla 6-2 con respecto a las raíces de la ecuación característica.

El siguiente ejemplo ilustra la relación entre los polos de la función de transferencia en lazo cerrado, que son las raíces de la ecuación característica, y la condición de estabilidad del sistema.

Ejemplo 6-8

$$M(z) = \frac{5z}{(z-0.2)(z-0.8)} \quad \text{Sistema estable}$$

$$M(z) = \frac{5z}{(z+1.2)(z-0.8)} \quad \text{Sistema inestable debido al polo en } z = -1.2$$

$$M(z) = \frac{5(z+1)}{z(z-1)(z-0.8)} \quad \text{Marginalmente estable debido a } z = 1$$

$$M(z) = \frac{5(z+1.2)}{z^2(z+1)^2(z+0.1)} \quad \text{Inestable debido al polo de segundo orden en } z = -1$$

▲

6-7 Pruebas de estabilidad para sistemas en tiempo discreto

En la Sec. 6-6 se hizo mención que la prueba de estabilidad de un sistema lineal en tiempo discreto es esencialmente un problema de investigar si todas las raíces de la ecuación característica están dentro del círculo unitario $\lvert z \rvert = 1$ en el plano z. El criterio de Nyquist, el diagrama del lugar geométrico de las raíces y el diagrama de Bode, originalmente ideados para sistemas en tiempo continuo, se pueden aplicar a los estudios de estabilidad de sistemas en tiempo discreto. Una excepción es el criterio de Routh-Hurwitz, el cual en su forma original está restringido solamente al eje imaginario en el plano s como el límite de estabilidad, y por tanto únicamente se puede aplicar a sistemas en tiempo continuo.

6-7-1 Método de transformación bilineal [9]

Aún se puede aplicar el criterio de Routh-Hurwitz a sistemas en tiempo discreto si se puede encontrar una transformación que modifique el círculo unitario en el plano z en el eje imaginario de otro plano complejo. No se puede usar la relación de la transformada $z = \exp(Ts)$ o $s = (\ln z)/T$, ya que transformaría una ecuación algebraica en z en una ecuación no algebraica en s, y la prueba de Routh no se puede aplicar todavía. Sin embargo, existen muchas transformaciones bilineales de la forma:

$$z = \frac{ar + b}{cr + d} \tag{6-44}$$

en donde a, b, c, d son constantes reales, y r es una variable compleja, esto transformará los círculos en el plano z en líneas rectas en el plano r. Una de estas transformadas que convierte el interior del círculo unitario del plano z en el semiplano izquierdo del plano r es:

$$z = \frac{1 + r}{1 - r} \tag{6-45}$$

que se conoce como **transformada *r*.** Una vez que la ecuación característica en z se transforma en el dominio r mediante el empleo de la ecuación (6-45), el criterio de Routh-Hurwitz se puede aplicar nuevamente a la ecuación en r.

La transformada r dada en la ecuación (6-45) es probablemente la forma más simple que puede emplearse en forma manual, para transformar una ecuación $F(z)$ en una ecuación en r. Otra transformada que a menudo se utiliza en el diseño de sistemas de control en tiempo discreto en el dominio de la frecuencia es:

$$z = \frac{(2/T) + w}{(2/T) - w} \tag{6-46}$$

o

$$w = \frac{2}{T}\frac{z - 1}{z + 1} \tag{6-47}$$

que se conoce como **transformada *w*.** Observe que la transformada w se convierte en la transformada r cuando $T = 2$. La ventaja de la transformada w sobre la transformada r es que el eje imaginario del plano w se parece al del plano s. Para demostrar esto, se sustituye:

Ejer
6-9

$$z = e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \operatorname{sen} \omega T \quad (6\text{-}48)$$

en la ecuación (6-47); se obtiene:

$$w = \frac{2}{T}\frac{\cos wT + j \operatorname{sen} \omega T - 1}{\cos \omega T + j \operatorname{sen} \omega T + 1} \quad (6\text{-}49)$$

Racionalizando la ecuación (6-49) y simplificando, se obtiene:

$$w = j\omega_w = j\frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2} \quad (6\text{-}50)$$

Por lo que el círculo unitario en el plano z se mapea en el del eje imaginario $w = j\omega_w$ en el plano w. La relación entre ω_w, y ω, la frecuencia real, es:

$$\omega_w = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2} = \frac{\omega_s}{\pi}\tan\frac{\pi\omega}{\omega_s} \quad (6\text{-}51)$$

en donde ω_s es la frecuencia de muestreo en rad/segundo. La correlación entre ω y ω_w es que ambas van a 0 y a ∞ al mismo tiempo. Por supuesto, para el criterio de Routh-Hurwitz, es más difícil emplear la transformada w, especialmente, ya que el periodo de muestreo T aparece en la ecuación (6-47). Sin embargo, si existen programas de computadora disponibles para las transformaciones, la diferencia es insignificante.

En el **Programa CC, WPLANE, G1, G2** convierte y transfiere la función $G_1(z)$ en $G_2(w)$ empleando la ecuación (6-46). El programa debe estar primero en el modo digital (DIG), y le preguntará el periodo de muestreo de T.

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de la transformada r a una ecuación característica en z para que la ecuación se pueda probar mediante el criterio de Routh-Hurwitz en el dominio r.

Ejemplo 6-9

Considere que la ecuación característica de un sistema de control en tiempo discreto es:

$$z^3 + 5.94z^2 + 7.7z - 0.368 = 0 \quad (6\text{-}52)$$

Al sustituir la ecuación (6-45) en la ecuación (6-52) y simplificando, se obtiene:

$$3.128r^3 - 11.74r^2 + 2.344r + 14.27 = 0 \quad (6\text{-}53)$$

La tabulación de Routh de la última ecuación es:

	r^3	3.128	2.344
Cambio de signo			
	r^2	−11.74	14.27
Cambio de signo			
	r^1	6.146	0
	r^0	14.27	

Debido a que existen dos cambios de signo en la primera columna de la tabulación, la ecuación (6-53) tiene dos raíces en el semiplano derecho del plano r. Esto corresponde a la ecuación (6-52) que tiene dos raíces fuera del círculo unitario en el plano z. Este resultado se puede verificar al resolver las dos ecuaciones en z y en r. Para la ecuación (6-52), las raíces son: $z = -2.0$, $z = -3.984$ y $z = 0.0461$. Las tres raíces correspondientes en el plano r son: $r = 3.0$, $r = 1.67$, y $r = -0.9117$, respectivamente. ▲

Ejemplo 6-10

Considere un problema de diseño que emplea la transformada bilineal y el criterio de Routh-Hurwitz. La ecuación característica de un sistema de control lineal de datos discretos está dada como:

$$F(z) = z^3 + z^2 + z + K = 0 \tag{6-54}$$

en donde K es una constante real. El problema es encontrar el intervalo de valores de K para que el sistema sea estable. Primero se transforma $F(z)$ en una ecuación en r empleando la transformada bilineal de la ecuación (6-45). El resultado es:

$$(1 - K)r^3 + (1 + 3K)r^2 + 3(1 - K)r + 3 + K = 0 \tag{6-55}$$

La tabulación de Routh de la última ecuación es:

r^3	$1 - K$	$3(1 - K)$
r^2	$1 + 3K$	$3 + K$
r^1	$\dfrac{8K(1 - K)}{1 + 3K}$	0
r^0	$3 + K$	

Para un sistema estable, los números en la primera columna de la tabulación deben ser del mismo signo. Se puede demostrar que estos números no pueden ser todos negativos, ya que las condiciones se contradicen unas a otras. Entonces, para que todos los números sean positivos, se tienen las siguientes condiciones:

$$1 - K > 0 \qquad 1 + 3K > 0 \qquad K > 0 \qquad 3 + K > 0$$

lo cual conlleva a la condición de estabilidad:

$$0 < K < 1 \tag{6-56}$$

▲

6-7-2 Pruebas de estabilidad directas

Existen pruebas de estabilidad que se pueden aplicar directamente a la ecuación característica en z, con referencia al círculo unitario en el plano z. Uno de los primeros métodos que proveen las condiciones necesarias y suficientes para que las raíces de la ecuación característica caigan dentro del círculo unitario es el criterio de Schur-Cohn [5]. Un método tabular más sencillo fue creado por Jury y Blanchard [6,7] y se conoce como **criterio de estabilidad de Jury** [10]. Routh. H. Raible [8] diseñó una forma alterna de tabular la prueba de estabilidad de Jury. Desafortunadamente, estas pruebas analíticas se vuelven muy tediosas para ecuaciones mayores a las de segundo orden, especialmente cuando la ecuación tiene parámetros desconocidos. Entonces, no existe razón para utilizar cualquiera de estas pruebas si se conocen todos los coeficientes de la ecuación, ya que siempre se puede utilizar una computadora y el programa para encontrar las raíces. Sopesando todos los pros y los contras, este autor cree que cuando la ecuación característica tiene al menos un parámetro desconocido, el método de la transformada bilineal es aún el mejor método manual para determinar la estabilidad de sistemas lineales en tiempo discreto. Sin embargo, es útil introducir la condición necesaria de estabilidad que se puede verificar por inspección.

Considere que la ecuación característica de un sistema lineal e invariante con el tiempo en tiempo discreto es:

$$F(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \qquad (6\text{-}57)$$

en donde todos los coeficientes son reales. Entre todas las condiciones dadas en la prueba de Jury, las siguientes condiciones *necesarias* se deben satisfacer para que $F(z)$ no tenga raíces sobre o fuera del círculo unitario.

$$\begin{aligned} &F(1) > 0 \\ &F(-1) > 0 \quad \text{si } n = \text{entero par} \\ &F(-1) < 0 \quad \text{si } n = \text{entero impar} \\ &|a_0| < a_n \end{aligned} \qquad (6\text{-}58)$$

Si una ecuación de la forma de la ecuación (6-57) viola cualquiera de las condiciones señaladas, no todas las raíces están dentro del círculo unitario, y el sistema no sería estable. Aparentemente, estas condiciones necesarias se pueden verificar fácilmente mediante inspección.

Ejemplo 6-11

Considere la ecuación:

$$F(z) = z^3 + z^2 + 0.5z + 0.25 = 0 \qquad (6\text{-}59)$$

Aplicando las condiciones en la ecuación (6-58), se tiene:

$F(1) = 2.75 > 0$ y $F(-1) = -0.25 < 0$ para $n = 3$, que es impar

$|a_0| = 0.25 < a_3 = 1$

Por lo que se satisfacen todas las condiciones en la ecuación (6-58), pero nada puede decirse acerca de la estabilidad del sistema. ▲

Ejemplo 6-12

Considere la ecuación:

$$F(z) = z^3 + z^2 + 0.5z + 1.25 = 0 \quad (6\text{-}60)$$

Las condiciones en la ecuación (6-58) son:

$F(-1) = 0.75 > 0$ para $n = 3$, que es impar

$|a_0| = 1.25$ que no es menor que a_3, que es igual a 1

Debido a que para n impar, F(−1) debe ser negativa, la ecuación en la ecuación (6-60) tiene por lo menos una raíz fuera del círculo unitario. Tampoco se cumple la condición en el valor absoluto de a_0. ▲

Sistemas de segundo orden

Las condiciones en la ecuación (6-58) se convierten en *necesarias y suficientes* cuando el sistema es de segundo orden. Esto es, las condiciones necesarias y suficientes para que la ecuación de segundo orden:

$$F(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \quad (6\text{-}61)$$

no tenga raíces sobre o fuera del círculo unitario, son:

$$F(1) > 0$$
$$F(-1) > 0 \quad (6\text{-}62)$$
$$|a_0| < a_2$$

Ejemplo 6-13

Considere la ecuación:

$$F(z) = z^2 + z + 0.25 = 0 \quad (6\text{-}63)$$

Aplicando las condiciones en la ecuación (6-62), se tiene:

$F(1) = 2.25 > 0$ $F(-1) = 0.25 > 0$ para $n = 2$, que es par

$|a_0| = 0.25 < a_2 = 1$

Por lo que todas las condiciones en la ecuación (6-62) se satisfacen. Las dos raíces en la ecuación (6-63) están dentro del círculo unitario, y el sistema es estable. ▲

6-8 Resumen

En este capítulo se dieron las definiciones de la estabilidad BIBO, a entrada cero y asintótica de sistemas en tiempo discreto lineales, e invariantes en el tiempo y en tiempo continuo. Se demostró que la condición para estos tipos de estabilidad se relaciona directamente con las raíces de la ecuación característica. Para que un sistema en tiempo continuo sea estable, las raíces de la ecuación característica deben localizarse en el semiplano izquierdo del plano s. Para que un sistema en tiempo discreto sea estable, las raíces de la ecuación característica deben estar dentro del círculo unitario $|z| = 1$ en el plano z.

La condición necesaria para que un polinomio $F(s)$ no tenga ceros sobre el eje $j\omega$ y en el semiplano derecho del plano s es que todos sus coeficientes deben ser del mismo signo y ninguno puede ser cero. Mediante el criterio de Routh-Hurwitz, se verifican las condiciones necesaria y suficiente para que $F(s)$ tenga ceros solamente en el semiplano izquierdo del plano s. El valor del criterio de Routh-Hurwitz se reduce si la ecuación característica se puede resolver utilizando un programa de computadora que encuentre raíces.

Para sistemas en tiempo discreto, se debe verificar la ecuación característica $F(z)$ para raíces sobre y fuera del círculo unitario en el plano z. El criterio de Routh-Hurwitz **no puede** aplicarse directamente a esta situación. Sin embargo existen métodos directos similares al criterio de Routh-Hurwitz que se pueden emplear para verificar las raíces en el plano z con respecto al límite de la estabilidad, esto se convierte en algo molesto, excepto para sistemas de segundo orden. Un método confiable es utilizar la transformada bilineal, que transforma el círculo unitario en el plano z en el eje imaginario de otro plano de variable compleja, por lo que el criterio de Routh-Hurwitz se puede aplicar a la ecuación transformada.

Preguntas de repaso

1. ¿Puede aplicarse directamente el criterio de Routh-Hurwitz al análisis de estabilidad de los siguientes sistemas?

(a) Sistema en tiempo continuo con la ecuación característica

$$s^4 + 5s^3 + 2s^2 + 3s + 2e^{-2s} = 0$$

(b) Sistema en tiempo continuo con la ecuación característica

$$s^4 - 5s^3 + 3s^2 + Ks + K^2 = 0$$

(c) Sistema en tiempo discreto con la ecuación característica

$$z^3 + 2z^2 + 0.5z + 0.1 = 0$$

2. Los primeros dos renglones de la tabulación de Routh de un sistema de tercer orden son:

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 2 & 2 \\ s^2 & 4 & 4 \end{array}$$

Seleccione la respuesta correcta de las siguientes alternativas:

(a) La ecuación tiene una raíz en el semiplano izquierdo del plano s.

(b) La ecuación tiene dos raíces sobre el eje $j\omega$ en $s = j$ y $s = -j$. La tercera raíz está en el semiplano izquierdo del plano.

(c) La ecuación tiene dos raíces sobre el eje $j\omega$ en $s = 2j$ y $s = -2j$. La tercera raíz está en el semiplano izquierdo.

(d) La ecuación tiene dos raíces sobre el eje $j\omega$ en $s = 2j$ y $s = -2j$. La tercera raíz está en el semiplano derecho.

3. Si los números en la primera columna de la tabulación de Routh se convierten en negativos, la ecuación para la cual fue hecha la tabulación tiene por lo menos una raíz en el semiplano izquierdo del plano s. (V) (F)
4. Las raíces de la ecuación auxiliar, $A(s) = 0$, de la tabulación de Routh de una ecuación característica deben también ser las raíces de ésta última. (V) (F)
5. La siguiente ecuación característica del sistema en tiempo discreto representa un sistema inestable, ya que contiene un coeficiente negativo.

$$z^3 - z^2 + 0.1z + 0.5 = 0 \qquad \text{(V)} \quad \text{(F)}$$

6. La siguiente ecuación característica de un sistema en tiempo continuo representa un sistema inestable, ya que contiene un coeficiente negativo.

$$s^3 - s^2 + 5s + 10 = 0 \qquad \text{(V)} \quad \text{(F)}$$

7. La siguiente ecuación característica de un sistema en tiempo discreto representa un sistema inestable, ya que el coeficiente del término z es cero.

$$z^2 - 0.5 = 0 \qquad \text{(V)} \quad \text{(F)}$$

8. La siguiente ecuación característica de un sistema en tiempo continuo representa un sistema inestable, ya que existe un coeficiente cero.

$$s^3 + 5s^2 + 4 = 0 \qquad \text{(V)} \quad \text{(F)}$$

9. Cuando un renglón de la tabulación de Routh contiene todos sus elementos cero antes del final de la tabulación, esto significa que la ecuación tiene raíces sobre el eje imaginario del plano s. (V) (F)
10. Sin realizar pruebas detalladas, es fácil observar que la siguiente ecuación característica de la transformada z debe tener al menos una raíz fuera del círculo unitario en el plano z.

$$z^4 + 5z^3 + z^2 + z + 2 = 0 \qquad \text{(V)} \quad \text{(F)}$$

Las respuestas a las preguntas de falso y verdadero se dan después de la sección de los Problemas.

Referencias

1. **F. R. GANTMACHER,** *Matrix Theory,* Vol. II, Chelsea Publishing Company, New York, 1964.
2. **K. J. KHATWANI,** "On Routh–Hurwitz Criterion," *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-26, p. 583, Apr. 1981.

3. **S. K. PILLAI,** "The ε Method of the Routh–Hurwitz Criterion," *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-26, p. 584, Apr. 1981.
4. **E. I. JURY,** "The Number of Roots of a Real Polynomial Inside (or Outside) the Unit Circle Using the Determinant Method," *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-10, pp. 371–372, July 1965.
5. **M. L. COHEN,** "A Set of Stability Constraints on the Denominator of a Sampled-Data Filter," *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-11, pp. 327–328, Apr. 1966.
6. **E. I. JURY and J. BLANCHARD,** "A Stability Test for Linear Discrete Systems in Table Form," *IRE Proc.,* Vol. 49, No. 12, pp. 1947–1948, Dec. 1961.
7. **E. I. JURY and B. D. O. ANDERSON,** "A Simplified Schur-Cohen Test," *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-18, pp. 157–163, Apr. 1973.
8. **R. H. RAIBLE,** "A Simplification of Jury's Tabular Form," *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-19, pp. 248–250, June 1974.
9. **B. C. KUO,** *Digital Control Systems,* 2nd ed., Saunders College Publishing, Philadelphia, 1992.
10. **E. I. JURY,** *Theory and Application of the z-Transform Method,* John Wiley & Sons, New York, 1964.

Problemas

▲ Estabilidad del sistema

6-1. Sin utilizar el criterio de Routh-Hurwitz, determine si los siguientes sistemas son asintóticamente estables, marginalmente estables o inestables. En cada caso se proporciona la función de transferencia del sistema en lazo cerrado.

(a) $M(s) = \dfrac{10(s+2)}{s^3 + 3s^2 + 5s}$ **(b)** $M(s) = \dfrac{s-1}{(s+5)(s^2+2)}$

(c) $M(s) = \dfrac{K}{s^3 + 5s + 5}$ **(d)** $M(s) = \dfrac{100(s-1)}{(s+5)(s^2+2s+2)}$

(e) $M(s) = \dfrac{100}{s^3 - 2s^2 + 3s + 10}$ **(f)** $M(s) = \dfrac{10(s+12.5)}{s^4 + 3s^3 + 50s^2 + s + 10^6}$

▲ Criterio de Routh-Hurwitz

6-2. Utilizando el criterio de Routh-Hurwitz, determine la estabilidad del sistema en lazo cerrado que tienen las siguientes ecuaciones características. Determine el número de raíces de cada ecuación que están en el semiplano derecho del plano s y en el eje $j\omega$.

(a) $s^3 + 25s^2 + 10s + 450 = 0$
(b) $s^3 + 25s^2 + 10s + 50 = 0$
(c) $s^3 + 25s^2 + 250s + 10 = 0$
(d) $2s^4 + 10s^3 + 5.5s^2 + 5.5s + 10 = 0$
(e) $s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 15s^3 + 20s^2 + 16s + 16 = 0$
(f) $s^4 + 2s^3 + 10s^2 + 20s + 5 = 0$

▲ Criterio de Routh-Hurwitz sobre el margen de estabilidad

6-3. Para cada ecuación característica de los sistemas de control realimentados proporcionados, determine el límite de K para que el sistema sea asintóticamente estable. Determine el valor de K para que el sistema sea marginalmente estable y la frecuencia de la oscilación sostenida si es aplicable.

(a) $s^4 + 25s^3 + 15s^2 + 20s + K = 0$
(b) $s^4 + Ks^3 + 2s^2 + (K + 1)s + 10 = 0$
(c) $s^3 + (K + 2)s^2 + 2Ks + 10 = 0$
(d) $s^3 + 20s^2 + 5s + 10K = 0$
(e) $s^4 + Ks^3 + 5s^2 + 10s + 10K = 0$
(f) $s^4 + 125s^3 + s^2 + 5s + K = 0$

▲ Región de estabilidad en el plano de parámetros.

6-4. La función de transferencia en lazo de un sistema de control realimentado de un solo lazo está dada como:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+5)}{s(s+2)(1+Ts)}$$

Los parámetros K y T pueden estar representados en el plano con K como el eje horizontal y T como el eje vertical. Determine las regiones en el plano de parámetros de T contra K en el cual el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable, e inestable. Indique el límite en el que el sistema es marginalmente estable.

▲ Margen de estabilidad, oscilación sostenida

6-5. Dada la función de transferencia de la trayectoria directa de sistemas de control de realimentación unitaria:

(a) $G(s) = \dfrac{K(s+4)(s+20)}{s^3(s+100)(s+500)}$ **(b)** $G(s) = \dfrac{K(s+10)(s+20)}{s^2(s+2)}$

(c) $G(s) = \dfrac{K}{s(s+10)(s+20)}$ **(d)** $G(s) = \dfrac{K(s+1)}{s^3+2s^2+3s+1}$

Aplique el criterio de Routh-Hurwitz para determinar la estabilidad del sistema en lazo cerrado como una función de K. Determine el valor de K que causará oscilaciones sostenidas de amplitud constante en el sistema. Determine la frecuencia de la oscilación.

▲ Estabilidad del sistema en la forma de ecuación de estado, control por realimentación de estado

6-6. Un proceso controlado está modelado por las siguientes ecuaciones de estado.

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) - 2x_2(t) \qquad \frac{dx_2(t)}{dt} = 10x_1(t) + u(t)$$

El control $u(t)$ se obtiene de la realimentación de estado, tal que:

$$u(t) = -k_1x_1(t) - k_2x_2(t)$$

en donde k_1 y k_2 son constantes reales. Determine la región en el plano de parámetros de k_1 contra k_2, en el cual el sistema de lazo cerrado es asintóticamente estable.

▲ Estabilidad del sistema en la forma de ecuación de estado, control por realimentación de estado

6-7. Un sistema lineal e invariante con el tiempo se describe mediante las siguientes ecuaciones de estado:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

en donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El sistema en lazo cerrado se implanta mediante la realimentación del estado, de tal forma que $u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$, en donde $\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$; y k_1, k_2 y k_3 son constantes reales. Determine las restricciones de los elementos de **K** de tal forma que el sistema en lazo cerrado sea asintóticamente estable.

▲ Estabilización con realimentación de estado

6-8. Dado el sistema en forma de ecuación de estado:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

en donde:

$$\text{(a)} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{(b)} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

¿Se puede estabilizar el sistema mediante la realimentación de estado $u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$, en donde $\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$?

▲ Sistema con realimentación por tacómetro

6-9. En la Fig. 6P-9 se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control de un motor con realimentación por tacómetro. Encuentre el intervalo de la constante del tacómetro K_t para que el sistema sea asintóticamente estable.

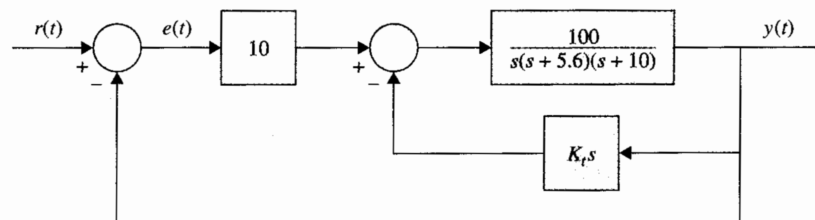


Figura 6P-9

▲ Estabilidad en el plano de parámetros

6-10. En la Fig. 6P-10 se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control. Encuentre la región en el plano K contra α para que el sistema sea asintóticamente estable. (Utilice K como el eje vertical y α como el eje horizontal.)

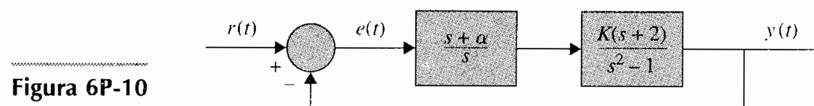
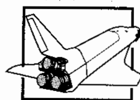


Figura 6P-10



▲ Estabilidad del control de altitud de un misil

6-11. El control de altitud de un misil que se muestra en la Fig. 4P-13, se logra mediante el empuje vectorial. La función de transferencia entre el ángulo de empuje $\Delta(s)$ y el ángulo de ataque $\Theta(s)$ está representada por:

$$G_p(s) = \frac{\Theta(s)}{\Delta(s)} = \frac{K}{s^2 - a}$$

en donde K y α son constantes reales positivas. El diagrama de bloque del sistema de control se muestra en la Fig. 6P-11.

(**a**) En la Fig. 6P-11, considere que solamente el lazo del detector de altitud está en operación, pero $K_t = 0$. Determine la relación entre K, K_s, y α, de tal forma que el misil oscilará hacia adelante y atrás (marginalmente estable). Encuentre la condición para que el misil caiga (inestable).

(**b**) Considere que ambos lazos están en operación. Determine la relación entre K, K_s, K_t y α, para que el misil oscile hacia adelante y atrás . Repita para que el misil caiga.

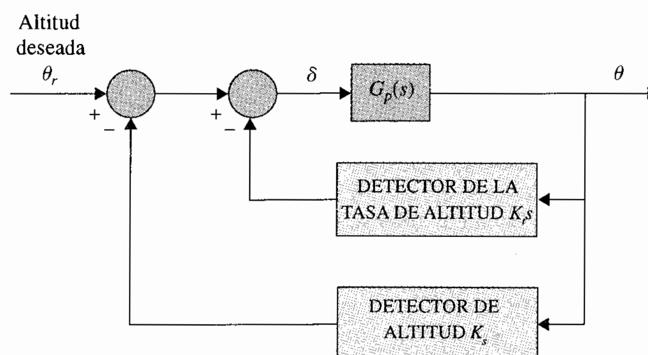


Figura 6P-11

▲ Aplicación del criterio Routh-Hurwitz para la estabilidad relativa

6-12. El criterio convencional de Routh-Hurwitz provee solamente información sobre la localización de los ceros de un polinomio $F(s)$, con respecto a los semiplanos izquierdo y derecho del plano s. Visualice una transformación lineal $s = f(p, \alpha)$ en donde p es una variable compleja, para que el criterio de Routh-Hurwitz se pueda aplicar para determinar si $F(s)$ tiene ceros a la

derecha de la línea $s = -\alpha$, en donde α es un número real positivo. Aplique la transformación a las siguientes ecuaciones características para determinar cuántas raíces están a la derecha de la línea s = −1 en el plano s.

(a) $F(s) = s^2 + 5s + 3 = 0$ (b) $s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = 0$
(c) $F(s) = s^3 + 4s^2 + 3s + 10 = 0$ (d) $s^3 + 4s^2 + 4s + 4 = 0$

▲ Estabilidad de un sistema de control de nivel de líquido

6-13. La Fig. 6P-13 muestra la versión en lazo cerrado del sistema de control de nivel de líquido descrito en el problema 5-40. En este problema se proporcionan todos los parámetros y ecuaciones del sistema. El detector de error se modela como:

$$K_s = 1 \text{ V/ft} \qquad e(t) = K_s[r(t) - h(t)]$$

(a) Dibuje un diagrama de bloques funcional para todo el sistema, mostrando la relación de funcionalidad entre las funciones de transferencia.

(b) Considere que la función de transferencia del controlador, $G_c(s)$, es la unidad. Encuentre la función de transferencia en lazo abierto $G(s) = H(s)/E(s)$ y la función de transferencia de lazo cerrado $M(s) = H(s)/R(s)$. Encuentre la ecuación característica del sistema en lazo cerrado. Observe que se especifican todos los parámetros del sistema, excepto el de N, el número de válvulas de entrada.

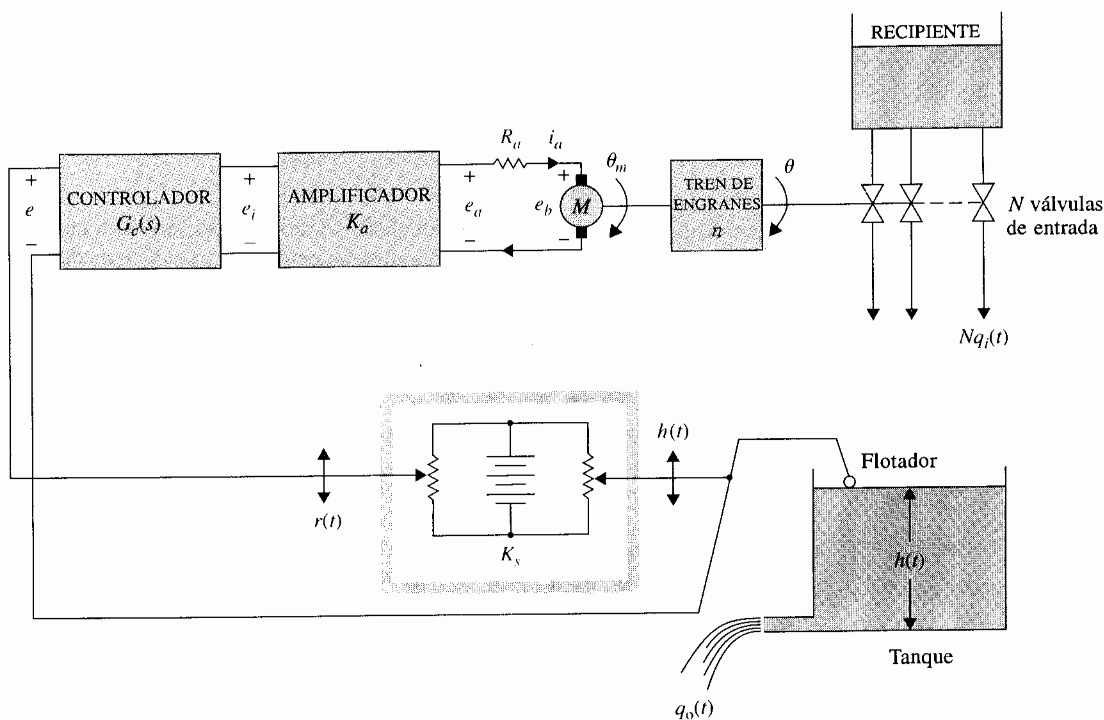


Figura 6P-13

(c) Aplique el criterio de Routh-Hurwitz a la ecuación característica y determine el número máximo de válvulas de admisión (entero positivo) para que el sistema sea asintóticamente estable. Considere que $G_c(s) = 1$.

▲ Estabilidad del sistema de control de nivel de líquido

6-14. El diagrama de bloques que se muestra en la Fig. 6P-14 representa el sistema de control de nivel de líquido descrito en el problema 6-13. Se proporciona la siguiente información: K_a = 50, K_I = 50, K_b = 0.0706, J = 0.006, R_a = 10, K_i = 10, y n = 1/100. Los valores de A, N y K_o se asignarán a continuación.

(a) Suponga que el número de válvulas de admisión, N, y el área del tanque, A, son parámetros variables, y K_o = 40. Encuentre los intervalos de N y A de tal forma que el sistema en lazo cerrado sea asintóticamente estable. Indique la región en el plano N contra A en donde el sistema es estable. Utilice el hecho de que N es un entero. Si el área de sección transversal del tanque, A es infinitamente larga, ¿cuál es el valor máximo de N (entero) para la estabilidad?

(b) Es útil investigar la relación entre la relación de engranes n y K_o, que controla la entrada y salida del líquido, respectivamente. Encuentre la región estable en el plano N contra K_o para K_o arriba de 100. Considere que A = 50.

(c) Considere que N = 10 y A = 50. K_I y K_o son parámetros variables. Encuentre la región estable en el plano de K_I contra K_o.

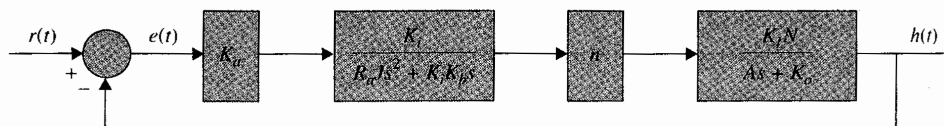
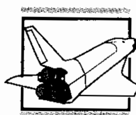


Figura 6P-14



▲ Estabilidad del sistema de control de posición de un transbordador espacial

6.15. El compartimiento de carga del sistema de control de posición del transbordador espacial se modela como una masa pura M. El compartimiento está suspendido mediante sostenes magnéticos para que no exista fricción en el control. La altura del compartimiento en la dirección y se controla mediante los actuadores magnéticos localizados en la base. La fuerza total producida por los actuadores magnéticos es $f(t)$. Los controles de otros grados de movimiento son independientes y aquí no se consideran. Debido a que existen experimentos ubicados dentro del compartimiento, se le debe suministrar corriente eléctrica a través de cables. El resorte lineal con la constante de resorte K_s se utiliza para modelar los cables añadidos. El modelo de sistema dinámico para el control de movimiento en el eje y se muestra en la Fig. 6P-15. La ecuación de fuerza del movimiento en la dirección y es:

$$f(t) = K_s y(t) + M\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

en donde K_s = 0.5 N-m/m y M = 500 kg. Los actuadores magnéticos se controlan a través de realimentación del estado, por lo que:

$$f(t) = -K_p y(t) - K_D\frac{dy(t)}{dt}$$

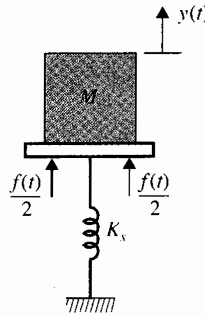


Figura 6P-15

(a) Dibuje un diagrama de bloques funcional para el sistema.
(b) Encuentre la ecuación característica del sistema en lazo cerrado.
(c) Encuentre la región en el plano K_D contra K_p en donde el sistema es asintóticamente estable.

▲ Estabilidad del sistema de control de inventario

6-16. Un sistema de control de inventario se modela mediante las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -x_2(t) + u(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -Ku(t)$$

en donde $x_1(t)$ es el nivel de inventario, $x_2(t)$ es la tasa de venta de los productos, $u(t)$ es la tasa de producción y K una constante real. Considere que la salida del sistema es $y(t)$ $x_1(t)$, y $r(t)$ es el punto de ajuste de referencia del nivel de inventario deseado. Considere $u(t) = r(t) - y(t)$. Determine las restricciones en K para que el sistema en lazo cerrado sea asintóticamente estable.

▲ Estabilidad de sistemas en tiempo discreto

6-17. Aplique la transformada w a las siguientes ecuaciones características de sistemas de control en tiempo discreto, y determine las condiciones de estabilidad (asintóticamente estable, marginalmente estable o inestable) por medio del criterio de Routh-Hurwitz.

(a) $z^2 + 1.5z - 1 = 0$ **(b)** $z^3 + z^2 + 3z + 0.2 = 0$
(c) $z^3 - 1.2z^2 - 2z + 3 = 0$ **(d)** $z^3 - z^2 - 2z + 0.5 = 0$

Verifique las respuestas resolviendo las raíces de las ecuaciones utilizando un programa de computadora para la búsqueda de raíces.

▲ Estabilidad del sistema de control digital

6-18. Un sistema de control digital se describe mediante la ecuación de estado:

$$x(k + 1) = (0.368 - 0.632K)x(k) + Kr(k)$$

en donde $r(k)$ es la entrada y $x(k)$ es la variable de estado. Determine los valores de K para que el sistema sea asintóticamente estable.

▲ Estabilidad del sistema de control digital

6-19. La ecuación característica de un sistema de control lineal digital es:

$$z^3 + z^2 + 1.5Kz - (K + 0.5) = 0$$

Determine los valores de K para que el sistema sea asintóticamente estable.

▲ Estabilidad del sistema de control en tiempo discreto

6-20. En la Fig. 6P-20, se muestra el diagrama de bloque de un sistema de control en tiempo discreto.

(a) Para $T = 0.1$ segundos, encuentre los valores de K de tal forma que el sistema sea asintóticamente estable.
(b) Repita la parte (a) cuando el periodo de muestreo es de 0.5 segundos.
(c) Repita la parte (a) cuando el periodo de muestreo es de 1.0 segundos.

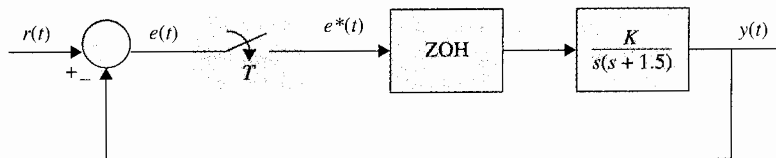


Figura 6P-20

Problemas adicionales para computadora

6-21. Utilice un programa para la búsqueda de raíces para encontrar las raíces de las siguientes ecuaciones características de sistemas lineales en tiempo continuo, y determine la condición de estabilidad de los mismos.

(a) $s^3 + 10s^2 + 10s + 130 = 0$ **(b)** $s^4 + 12s^3 + s^2 + 2s + 10 = 0$
(c) $s^4 + 12s^3 + 10s^2 + 10s + 10 = 0$ **(d)** $s^4 + 12s^3 + s^2 + 10s + 1 = 0$
(e) $s^6 + 6s^5 + 125s^4 + 100s^3 + 100s^2 + 20s + 10 = 0$
(f) $s^5 + 125s^4 + 100s^3 + 100s^2 + 20s + 10 = 0$

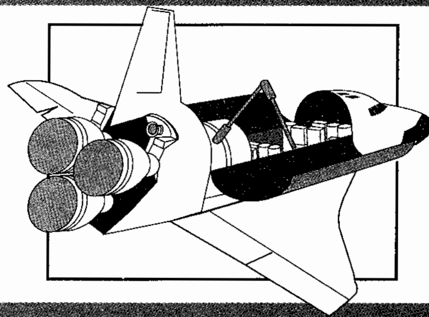
6-22. Utilice un programa para la búsqueda de raíces para encontrar las raíces de las siguientes ecuaciones características de sistemas de control lineales de datos discretos, y determine la condición de estabilidad de los sistemas.

(a) $z^3 + 2z^2 + 1.2z + 0.5 = 0$ **(b)** $z^3 + z^2 + z - 0.5 = 0$
(c) $0.5z^3 + z^2 + 1.5z + 0.5 = 0$
(d) $z^4 + 0.5z^3 + 0.25z^2 + 0.1z - 0.25 = 0$

Respuestas a las preguntas de repaso de falso y verdadero

3. **(F)** **4.** **(V)** **5.** **(F)** **6.** **(V)** **7.** **(F)** **8.** **(V)** **9.** **(F)**
10. **(V)**

7 Análisis de sistemas de control en el dominio del tiempo



PALABRAS CLAVE Y TEMAS

- ▲ Señales de prueba
- ▲ Error en estado estable
- ▲ Constantes de error
- ▲ Respuesta transitoria
- ▲ Factor de amortiguamiento relativo
- ▲ Frecuencia natural no amortiguada
- ▲ Amortiguamiento crítico
- ▲ Respuesta al escalón unitario
- ▲ Efectos de la adición de polos y ceros en la función de transferencia
- ▲ Aproximación de sistemas de orden superior mediante sistemas de orden bajo

7-1 Respuesta en el tiempo de sistemas en tiempo continuo: Introducción

Ya que el tiempo es la variable independiente empleada en la mayoría de los sistemas de control, es usualmente de interés evaluar las respuestas del estado y la salida con respecto al tiempo, o simplemente, **la respuesta en el tiempo.** En el problema de análisis, una señal de

entrada de referencia se aplica al sistema, y el desempeño del sistema se evalúa al estudiar la respuesta del sistema en el dominio del tiempo. Por ejemplo, si el objetivo de control es hacer que la variable de salida siga a la señal de entrada, a partir de algún tiempo inicial y algunas condiciones iniciales, es necesario comparar la entrada y la respuesta a la salida como funciones del tiempo. Por tanto, en la mayoría de los sistemas de control, la evaluación final del desempeño de un sistema se basa en las respuestas en el tiempo.

La respuesta en el tiempo de un sistema de control se divide normalmente en dos partes: la **respuesta transitoria** y la **respuesta en estado estable.** Sea $y(t)$ la respuesta en el tiempo de un sistema en tiempo continuo; entonces, en general, se puede escribir:

$$y(t) = y_t(t) + y_{ss}(t) \tag{7-1}$$

en donde $y_t(t)$ indica la respuesta transitoria; $y_{ss}(t)$ indica la respuesta en estado estable.

▲ La respuesta transitoria se define como la parte de la respuesta en el tiempo que se hace cero cuando el tiempo va a infinito.

En sistemas de control, *la respuesta transitoria está definida como la parte de la respuesta en el tiempo que tiende a cero cuando el tiempo se hace muy grande.* Por tanto, $y_t(t)$ tiene la propiedad de que:

$$\lim_{t\to\infty} y_t(t) = 0 \tag{7-2}$$

▲ La respuesta en estado estable es la parte de la respuesta total que permanece después de que la transitoria se ha desvanecido.

La respuesta en estado estable es la parte de la respuesta total que permanece después que la transitoria ha desaparecido. Por tanto, la respuesta en estado estable puede variar en un patrón establecido, ya sea como una onda senoidal, o como una función rampa que se incrementa con el tiempo.

Todos los sistemas de control estables reales presentan un fenómeno transitorio antes de alcanzar la respuesta en estado estable. Como la masa, la inercia y la inductancia son inevitables en los sistemas físicos, las respuestas de un sistema de control típico no pueden seguir cambios súbitos en la entrada en forma instantánea, y normalmente se observan transitorios. En consecuencia, la respuesta transitoria de un sistema de control es necesariamente importante, ya que es una parte significativa del comportamiento dinámico del sistema; y la desviación entre la respuesta de la salida y la entrada o respuesta deseada se debe controlar cuidadosamente antes de alcanzar el estado estable.

La respuesta en estado estable de un sistema de control es también muy importante, ya que indica en dónde termina la salida del sistema cuando el tiempo se hace grande. Para un sistema de control de posición, la respuesta en estado estable cuando se compara con la posición de re-ferencia deseada da una indicación de la exactitud final del sistema. En general, si la respuesta en estado estable de la salida no concuerda exactamente con la referencia deseada, se dice que el sistema tiene un **error en estado estable.**

El estudio de un sistema de control en el dominio del tiempo involucra esencialmente la evaluación de las respuestas transitoria y en estado estable del sistema. En el problema de diseño, las especificaciones se proporcionan normalmente en términos del desempeño transitorio y en estado estable, y los controladores se diseñan para que todas esas especificaciones sean cumplidas por el sistema diseñado.

7-2 Señales de prueba típicas para obtener la respuesta en el tiempo de sistemas de control

Contrario a los circuitos eléctricos y a los sistemas de comunicaciones, las entradas a muchos sistemas de control prácticos no se conocen con anticipación. En muchos casos, las entradas de un sistema de control pueden variar en forma aleatoria con respecto al tiempo. Por ejemplo, en un sistema de rastreo por radar de misiles antiaéreos, la posición y la velocidad del blanco a rastrear puede variar en forma impredecible, por lo que no se puede predeterminar. Esto provoca un problema para el diseñador, ya que es difícil diseñar un sistema de control que tenga un desempeño satisfactorio para todas las formas posibles de señales de entrada. Para propósitos de análisis y diseño, es necesario suponer algunos tipos básicos de entradas de prueba para evaluar el desempeño de un sistema. Mediante la selección adecuada de estas señales de prueba básicas, no sólo se sistematiza el tratamiento matemático del problema, sino que la respuesta a este tipo de entradas permite la predicción del desempeño del sistema con otras entradas más complejas. En el problema de diseño, los criterios de desempeño se pueden especificar con respecto a estas señales de prueba, en tal forma que el sistema se pueda diseñar para cumplir con dichos criterios. Este enfoque es particularmente útil para sistemas lineales, ya que la respuesta a señales complejas se puede determinar al sobreponer aquéllas debido a señales de pruebas simples.

Cuando la respuesta de un sistema lineal e invariante con el tiempo se analiza en el dominio de la frecuencia, se emplea una entrada senoidal con frecuencia variable. Cuando la frecuencia de entrada se barre desde cero hasta el valor significativo de las características del sistema, las curvas en términos de la relación de amplitudes y fases entre la entrada y la salida se dibujan como funciones de frecuencia. Es posible predecir el comportamiento del sistema en el dominio del tiempo a partir de sus características en el dominio de la frecuencia.

Para facilitar el análisis en el dominio del tiempo, se utilizan las siguientes señales de prueba determinísticas.

Entrada función escalón. La entrada función escalón representa un cambio instantáneo en la entrada de referencia. Por ejemplo, si la entrada es una posición angular de un eje mecánico, una entrada escalón representa una rotación súbita del eje. La representación matemática de una función escalón de magnitud R es:

$$r(t) = \begin{cases} R & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{7-3}$$

en donde R es una constante real. O bien,

$$r(t) = Ru_s(t) \tag{7-4}$$

en donde $u_s(t)$ es la función escalón unitario. La función escalón como función del tiempo se muestra en la Fig. 7-1(a). La función escalón es muy útil como señal de prueba, ya que su

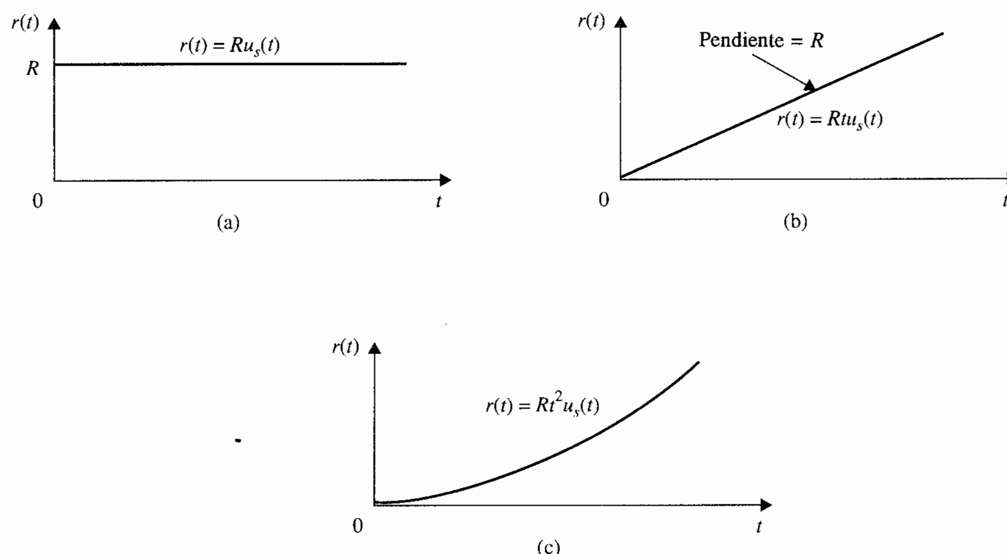


Figura 7-1 Señales básicas de prueba en el dominio del tiempo para sistemas de control (a) Función escalón (b) Función rampa (c) Función parábola.

brinco instantáneo inicial de amplitud revela qué tan rápido responde un sistema a entradas con cambios abruptos. Además, como la función escalón contiene, en principio, un espectro con una banda ancha de frecuencias como resultado de la discontinuidad del salto, es equivalente a la aplicación de un sinnúmero de señales senoidales con un intervalo de frecuencias grande.

Entrada función rampa. La función rampa es una señal que cambia constantemente con el tiempo. Matemáticamente, una función rampa se representa mediante:

$$r(t) = Rtu_s(t) \qquad (7\text{-}5)$$

en donde R es una constante real. La función rampa se muestra en la Fig. 7-1(b). Si la variable de entrada representa el desplazamiento angular de un eje, la entrada rampa denota la velocidad de rotación constante del eje. La función rampa tiene la habilidad de probar cómo responde el sistema a señales que cambian linealmente con el tiempo.

Entrada función parabólica. La función parabólica representa una señal que tiene un orden más rápido que la función rampa. Matemáticamente, se representa como:

$$r(t) = \frac{Rt^2}{2} u_s(t) \qquad (7\text{-}6)$$

en donde R es una constante real, y el factor $\frac{1}{2}$ se añade por conveniencia matemática, ya que la transformada de Laplace de $r(t)$ es simplemente R/s^3. La representación gráfica de la función parabólica se muestra en la Fig. 7-1(c).

Estas señales tienen la característica común de que son simples de describir en forma matemática. De la función escalón a la función parabólica, las señales se vuelven progresivamente más rápidas con respecto al tiempo. En teoría se pueden definir señales con velocidades aún más rápidas, como t^3, que se denomina la *función tirón*, y así sucesivamente. Sin embargo, en realidad rara vez es necesario o factible emplear señales de prueba más rápidas que una función parabólica. Esto se debe a que, como se verá posteriormente, para seguir una entrada de orden superior en forma exacta, el sistema debe tener integraciones de orden superior en el lazo, lo que normalmente conlleva serios problemas de estabilidad.

7-3 Error en estado estable

Uno de los objetivos de la mayoría de los sistemas de control es que la respuesta de salida del sistema siga una señal de referencia específica en forma exacta en el estado estable. La diferencia entre la salida y la referencia en estado estable se definió anteriormente como **error en estado estable.** En el mundo real, debido a la fricción y otras imperfecciones, y a la composición natural del sistema, la respuesta de salida en estado estable rara vez concuerda exactamente con la referencia. En consecuencia, los errores en estado estable en sistemas de control son casi inevitables. En un problema de diseño, uno de los objetivos es mantener el error en estado estable al mínimo, o por debajo de cierto valor tolerable, y al mismo tiempo hacer que la respuesta transitoria satisfaga cierto conjunto de especificaciones.

El requisito de exactitud de sistemas de control depende en gran medida de los objetivos del control del sistema. Por ejemplo, la exactitud en la posición final de un elevador debería ser mucho menos estricta que la de apuntar exactamente el control de un Telescopio Espacial Grande (LST), que es un telescopio montado sobre una nave espacial. La exactitud del control de posición de dicho sistema a menudo se mide en microrradianes.

7-3-1 Error en estado estable causado por elementos no lineales

En muchas ocasiones, los errores en estado estable de sistemas de control se atribuyen a algunas características no lineales, tales como la fricción no lineal o la zona muerta. Por ejemplo, si un amplificador empleado en un sistema de control tiene las características de entrada/salida mostrada en la Fig. 7-2, entonces, cuando la amplitud de la señal de entrada cae dentro de la zona muerta, la salida del amplificador sería cero, y el control no sería capaz de corregir en el caso de existir algún error. Las características de no linealidad de zona muerta que se muestran en la Fig. 7-2 no están limitadas a los amplificadores. La relación flujo a corriente del campo magnético de un motor eléctrico puede presentar una característica similar. Cuando la corriente del motor cae por abajo de la zona muerta D, no hay flujo magnético, y por tanto el motor no producirá el par que mueva la carga.

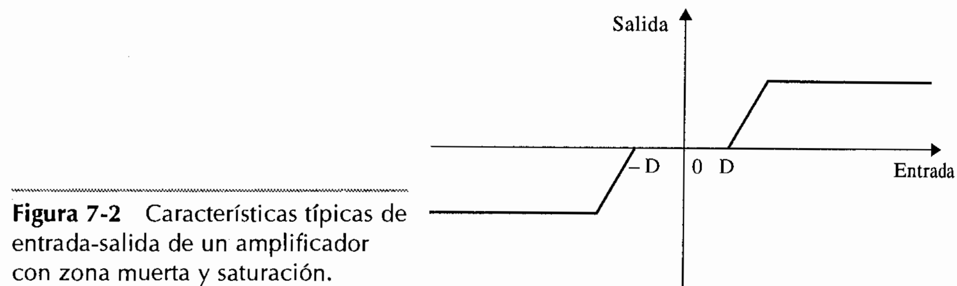


Figura 7-2 Características típicas de entrada-salida de un amplificador con zona muerta y saturación.

Las señales de salida de componentes digitales empleados en sistemas de control, tales como un microprocesador, pueden adoptar sólo niveles discretos o cuantizados. Esta propiedad se ilustra por la característica de cuantización que se muestra en la Fig. 7-3. Cuando la entrada al cuantizador es $\pm q/2$, la salida es cero, y el sistema puede generar un error en la

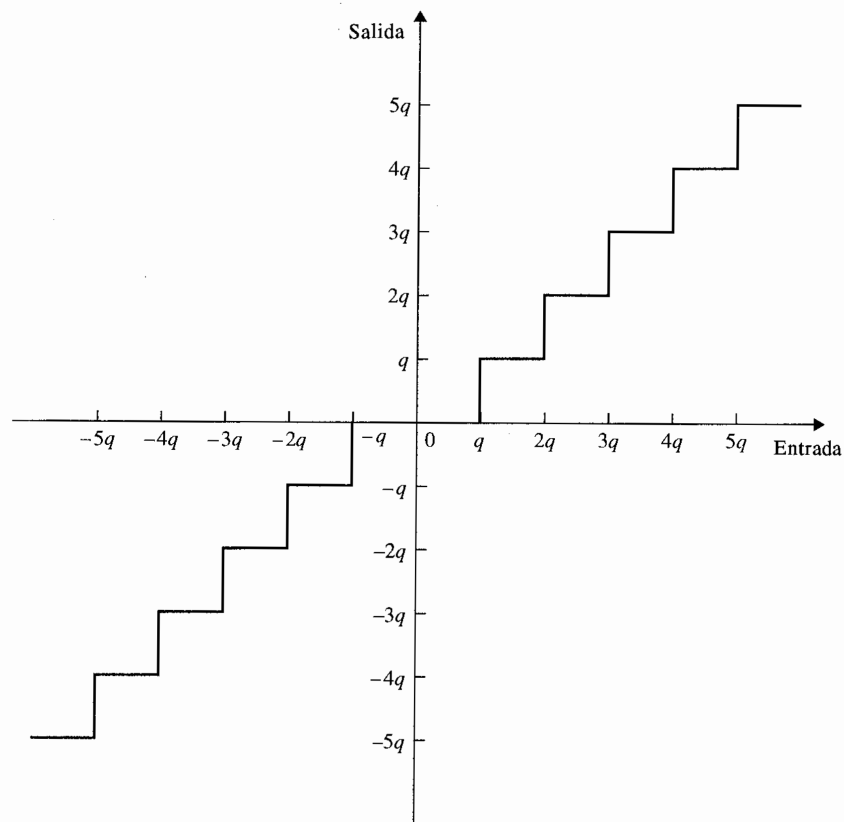


Figura 7-3 Características típicas de entrada-salida de un cuantizador.

salida cuya magnitud está relacionada con $\pm q/2$. Este tipo de error se conoce como **error de cuantización** en sistemas de control digital.

Cuando se trata del control de objetos físicos, la fricción casi siempre está presente. La fricción de Coulomb es una causa común de errores de posición en estado estable en sistemas de control. La Fig. 7-4 muestra el restablecimiento de una curva par posición de un sistema de control. La curva de par típica se puede generar con un motor de pasos o un motor de reluctancia conmutada, o a partir de un sistema en lazo cerrado con un codificador de posición. El punto 0 designa un punto de equilibrio estable sobre la curva de par, así como los otros puntos de interés periódicos a lo largo del eje donde la pendiente de la curva del par es negativa. El par en ambos lados del punto cero representa un par que tiende a regresar la salida al punto de equilibrio cuando se presenta alguna perturbación de desplazamiento angular. Cuando no hay fricción, el error de posición debe ser cero, ya que siempre hay un par mientras la posición no esté en el punto de equilibrio estable. Si el rotor del motor ve un par de fricción de Coulomb T_F, el par del motor debe primero superar este par de fricción antes de producir movimiento. Por tanto, cuando el par del motor cae por debajo de T_F mientras la posición del rotor se aproxima al punto de equilibrio estable, se puede detener en cualquier posición dentro de una banda de error acotada por $\pm\ \theta_e$, como se muestra en la Fig. 7-4.

Aunque es relativamente simple comprender los efectos de las no linealidades sobre los errores y establecer límites superiores máximos para las magnitudes de los errores, es difícil establecer soluciones generales y en forma cerrada para sistemas no lineales. Normalmente, el análisis detallado y exacto de sistemas de control no lineales se lleva a cabo solamente mediante simulación en computadora.

7-3-2 Error en estado estable de sistemas de control lineales en tiempo continuo

Los sistemas de control lineales están sujetos a errores en estado estable por causas diferentes a las de los sistemas no lineales, aunque la razón es que el sistema aún no "ve" el error, y no genera ningún esfuerzo correctivo. En general, los errores en estado estable de sistemas de control lineales dependen del tipo de la señal de referencia y del tipo del sistema.

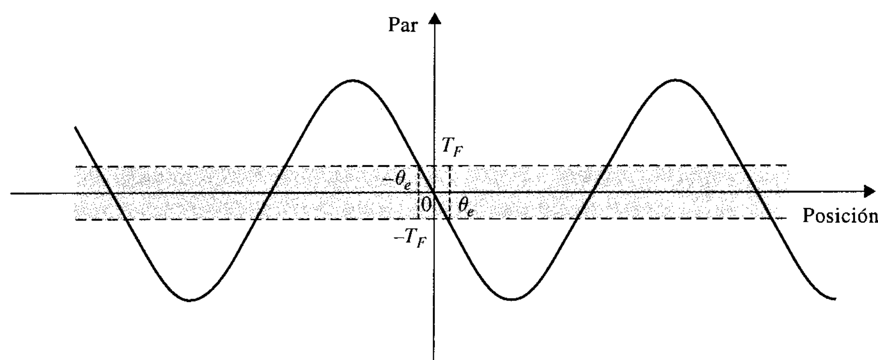


Figura 7-4 Curva del ángulo par de un motor o sistema en lazo cerrado con fricción Coulomb.

Definición del error en estado estable en función de la configuración del sistema

Antes de emprender el análisis del error en estado estable, se debe clarificar cuál es el significado de error del sistema. En general, el error se puede ver como una señal que rápidamente debe ser reducida a cero, si esto es posible. Con referencia al sistema en lazo cerrado de la Fig. 7-5, en donde $r(t)$ es la entrada, $u(t)$ es la señal actuante, $b(t)$ es la señal de realimentación, y $y(t)$ es la salida. El error del sistema se puede definir como:

$$e(t) = \text{signo de referencia} - y(t) \tag{7-7}$$

en donde la *señal de referencia* es la señal que la salida $y(t)$ está siguiendo. Cuando el sistema tiene realimentación unitaria [*i.e.*, $H(s) = 1$], la entrada $r(t)$ es la señal de referencia, y el error es simplemente:

$$e(t) = r(t) - y(t) \tag{7-8}$$

El error en estado estable se define como:

$$e_{ss} = \lim_{s\to\infty} e(t) \tag{7-9}$$

Cuando $H(s)$ no es unitaria, la señal actuante $u(t)$ en la Fig. 7-5 puede o no ser el error, en función de la forma y propósito de $H(s)$. Suponiendo que el objetivo del sistema de la Fig. 7-5 es hacer que la salida $y(t)$ siga a la entrada $r(t)$ tan cerca como sea posible, y que las funciones de transferencia del sistema sean:

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+12)} \qquad H(s) = \frac{5(s+1)}{s+5} \tag{7-10}$$

Se puede mostrar que si $H(s) = 1$, la ecuación característica es:

$$s^3 + 12s^2 + 1 = 0 \tag{7-11}$$

la cual tiene raíces en el semiplano derecho del plano s, y el sistema en lazo cerrado es inestable. Se puede probar que la $H(s)$ dada por la ecuación (7-10) estabiliza al sistema y la

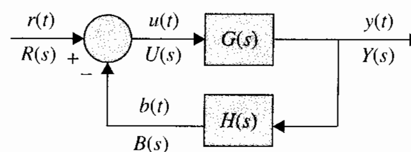


Figura 7-5 Sistema de control con realimentación no unitaria.

ecuación característica se convierte en

$$s^4 + 17s^3 + 60s^2 + 5s + 5 = 0 \tag{7-12}$$

En este caso el error del sistema se puede aún definir como en la ecuación (7-8).

Sin embargo, considere un sistema de control de velocidad, en cuyo caso la entrada escalón se emplea para controlar la salida del sistema, la cual es una rampa en estado estable. Las funciones de transferencia del sistema pueden ser de la forma:

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s + 12)} \qquad H(s) = K_t s \tag{7-13}$$

en donde $H(s)$ es la función de transferencia de un tacómetro electromecánico o electrónico, K_t es la constante del tacómetro. El error del sistema se debe definir como en la ecuación (7-7), donde la *señal de referencia* es la *velocidad deseada*, y no es $r(t)$. En este caso, como $r(t)$ y $y(t)$ no tienen las mismas dimensiones, no tiene sentido definir el error como en la ecuación (7-8). Para ilustrar el sistema anterior, sea $K_t = 10$ V/rad/s. Esto significa que para una entrada escalón unitario de 1 V, la velocidad deseada en estado estable es 1/10 o 0.1 rad/s, ya que cuando dicha velocidad sea alcanzada, la salida de voltaje del tacómetro será de 1 V, y el error en estado estable será cero. La función de transferencia del sistema en lazo cerrado es:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{s(s^2 + 12s + 10)} \tag{7-14}$$

Si la entrada es un escalón unitario, $R(s) = 1/s$. La respuesta en tiempo de la salida es:

$$y(t) = 0.1t - 0.12 - 0.000796e^{-11.1t} + 0.1208e^{-0.901t} \qquad t \geq 0 \tag{7-15}$$

Ya que los términos exponenciales de $y(t)$ en la ecuación (7-15) se desaparecen como $t \to \infty$, la parte en estado estable de $y(t)$ es $0.1t - 0.12$. Por tanto el error en estado estable del sistema es:

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} [0.1t - y(t)] = 0.12 \tag{7-16}$$

Posteriormente se darán más explicaciones de cómo definir la señal de referencia cuando $H(s) \neq 1$ cuando se dé la discusión general sobre el error en estado estable de sistemas con realimentación no unitaria.

No todos los errores de sistemas se definen con respecto a la respuesta debido a la entrada. La Fig. 7-6 muestra un sistema con un disturbio $d(t)$, en adición a la entrada $r(t)$. La salida debido a $d(t)$ actuando sola puede considerarse también como un error. Por estas razones, la definición de error del sistema no se ha unificado en la literatura.

Para establecer un estudio sistemático del error en estado estable para sistemas lineales, se clasificarán tres sistemas que se tratarán en forma separada.

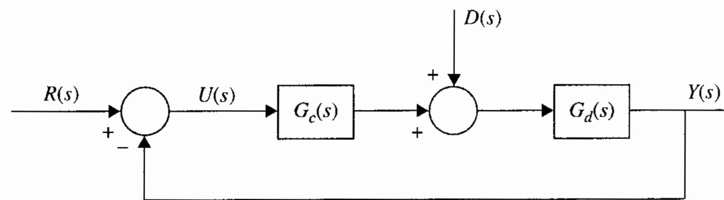


Figura 7-6 Sistema con entrada perturbada.

1. Sistemas con realimentación unitaria; $H(s) = 1$.
2. Sistemas con realimentación no unitaria, pero $H(0) = K_H$ = constante.
3. Sistemas con realimentación no unitaria, y $H(s)$ tiene ceros en $s = 0$ de orden N.

El objetivo aquí es establecer una definición del error con respecto a una configuración básica del sistema de tal forma que se pueda determinar una relación fundamental entre el error en estado estable y los parámetros del sistema.

Tipos de sistemas de control: sistemas con realimentación unitaria

Considere que un sistema de control con realimentación unitaria se puede representar o simplificar por el diagrama de bloques de la Fig. 7-7. El error en estado estable del sistema se escribe como:

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} \tag{7-17}$$

▲ El **tipo** de sistema se define aquí solamente para sistemas con realimentación unitaria.

Claramente, e_{ss} depende de las características de $G(s)$. Más específicamente, se puede mostrar que e_{ss} depende del número de polos que $G(s)$ tiene en $s = 0$. Este número se conoce como el **tipo** de un sistema de control, o simplemente, **tipo** de sistema. Ahora se puede mostrar que el error en estado estable e_{ss} depende del **tipo** de sistema de control. Se formaliza el **tipo** de sistema con referencia a la forma de la función de transferencia de la trayectoria directa $G(s)$.

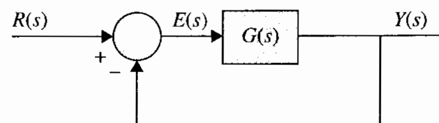


Figura 7-7 Sistema con realimentación unitaria.

En general, $G(s)$ se puede expresar por conveniencia como:

$$G(s) = \frac{K(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots (1 + T_{m1} s + T_{m2} s^2)}{s^j (1 + T_a s)(1 + T_b s) \cdots (1 + T_{n1} s + T_{n2} s^2)} e^{-T_d s} \quad (7\text{-}18)$$

en donde K y todas las T son constantes reales. El **tipo** de sistema se refiere al **orden** de los polos de $G(s)$ en $s = 0$. Por tanto, el sistema en lazo cerrado que tiene la función de transferencia de la trayectoria directa de la ecuación (7-18) es de tipo j, en donde $j = 0, 1, 2, \ldots$. El número total de términos en el numerador y en el denominador y los valores de los coeficientes no son importantes para el tipo del sistema, ya que el tipo del sistema sólo se refiere al número de polos de $G(s)$ en $s = 0$. El siguiente ejemplo ilustra el tipo de sistema con referencia a la forma de $G(s)$.

Ejemplo 7-1

$$G(s) = \frac{K(1 + 0.5s)}{s(1 + s)(1 + 2s)(1 + s + s^2)} \qquad \text{tipo 1} \quad (7\text{-}19)$$

$$G(s) = \frac{K(1 + 2s)}{s^3} \qquad \text{tipo 3} \quad (7\text{-}20)$$

▲

Ahora se investigan los efectos de los tipos de entradas en el error en estado estable. Se considerarán solamente las entradas escalón, rampa y parábola.

Error en estado estable del sistema con una función escalón a la entrada

Cuando la entrada $r(t)$ al sistema de control de la Fig. 7-7 es una función escalón de magnitud R, $R(s) = R/s$, el error en estado estable se escribe a partir de la ecuación (7-17):

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{R}{1 + G(s)} = \frac{R}{1 + \lim_{s\to 0} G(s)} \quad (7\text{-}21)$$

Por conveniencia se define:

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) \quad (7\text{-}22)$$

▲ La constante de error escalón K_p se define sólo cuando el sistema está sujeto a una entrada escalón.

como la **constante de error escalón.** Entonces la ecuación (7-21) se convierte en:

$$e_{ss} = \frac{R}{1 + K_p} \quad (7\text{-}23)$$

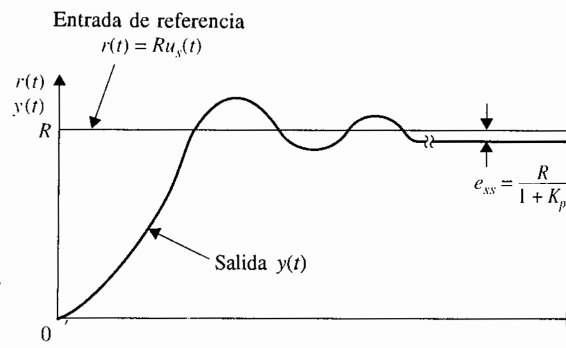


Figura 7-8 Error de estado estable típico, debido a una entrada escalón.

En la Fig. 7-8 se muestra un e_{ss} típico debido a una entrada escalón cuando K_p es finita y no cero. En la ecuación (7-23) se observa que para que e_{ss} sea cero, cuando la entrada es una función escalón, K_p debe ser infinita. Si $G(s)$ está descrita por la ecuación (7-18), se observa que para que K_p sea infinita, j debe ser al menos igual a uno; esto es, $G(s)$ debe tener al menos un polo en $s = 0$. Por tanto, se puede resumir el error en estado estable debido a una entrada función escalón como sigue:

▲ Sistema tipo 0: $e_{ss} = \dfrac{R}{1+K_p}$ = constante

▲ Sistema tipo 1 o mayor: $e_{ss} = 0$

Error en estado estable de un sistema con una función rampa a la entrada

Cuando la entrada al sistema de control de la Fig. 7-7 es una función rampa con magnitud R,

$$r(t) = Rtu_s(t) \tag{7-24}$$

en donde R es una constante real, la transformada de Laplace de $r(t)$ es:

$$R(s) = \frac{R}{s^2} \tag{7-25}$$

El error en estado estable se escribe empleando la ecuación (7-17),

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{R}{s + sG(s)} = \frac{R}{\lim_{s\to 0} sG(s)} \tag{7-26}$$

▲ La constante de error rampa K_v se define solo cuando el sistema está sujeto a una entrada rampa.

Se define la **constante de error rampa** como:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) \tag{7-27}$$

Entonces la ecuación (7-26) se convierte en:

$$e_{ss} = \frac{R}{K_v} \tag{7-28}$$

que es el error en estado estable cuando la entrada es una función rampa. Un e_{ss} típico debido a una entrada rampa cuando K_v es finita y no cero se ilustra en la Fig. 7-9.

La ecuación (7-28) muestra que para que e_{ss} sea cero cuando la entrada es una función rampa, K_v debe ser infinita. Al emplear las ecuaciones (7-18) y (7-27) se obtiene:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K}{s^{j-1}} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{7-29}$$

Por tanto, para que K_v sea infinita, j deber ser al menos igual a 2, o el sistema debe ser de tipo 2 o mayor. Las siguientes conclusiones se pueden establecer con respecto al error en estado estable de un sistema con entrada rampa:

▲ Sistema tipo 0: $e_{ss} = \infty$

▲ Sistema tipo 1: $e_{ss} = \dfrac{R}{K_v}$ = constante

▲ Sistema tipo 2 o mayor: $e_{ss} = 0$

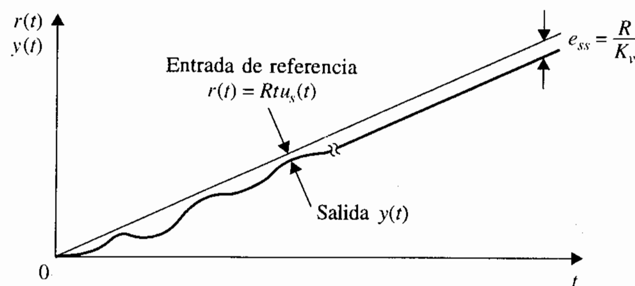


Figura 7-9 Error de estado estable típico debido a una entrada rampa.

Error en estado estable de un sistema con una entrada función parábola

Cuando la entrada está descrita por la forma parabólica estándar,

$$r(t) = \frac{Rt^2}{2} u_s(t) \tag{7-30}$$

la transformada de Laplace de $r(t)$ es:

$$R(s) = \frac{R}{s^3} \tag{7-31}$$

El error en estado estable del sistema de la Fig. 7-7 es:

$$e_{ss} = \frac{R}{\lim_{s \to 0} s^2 G(s)} \tag{7-32}$$

▲ La constante de error parábola K_a se define solo si el sistema está sujeto a una entrada parábola.

Un e_{ss} típico de un sistema con K_a finita y no cero debido a una entrada parábola se muestra en la Fig. 7-10.

Se define la **constante de error parabólico** como:

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) \tag{7-33}$$

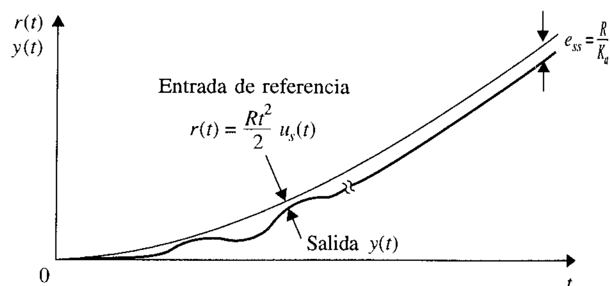


Figura 7-10 Error en estado estable típico debido a una entrada parábola.

y el error en estado estable se convierte en:

$$e_{ss} = \frac{R}{K_a} \tag{7-34}$$

Al seguir el patrón establecido con las entradas escalón y rampa, el error en estado estable debido a la entrada parabólica es cero si el sistema es de tipo 3 o mayor. Las siguientes conclusiones se obtienen al observar al error en estado estable de un sistema con entrada parábola:

- ▲ Sistema tipo 0: $e_{ss} = \infty$
- ▲ Sistema tipo 1: $e_{ss} = \infty$
- ▲ Sistema tipo 2: $e_{ss} = \frac{R}{K_a}$ = constante
- ▲ Sistema tipo 3 o mayor: $e_{ss} = 0$

No se ha enfatizado que para que estos resultados sean válidos, el sistema en lazo cerrado debe ser estable.

Al emplear el método descrito, se puede obtener, si es necesario, el error en estado estable de cualquier sistema lineal en lazo cerrado sujeto a una entrada de orden mayor que la función parábola. Como un resumen del análisis de error, la tabla 7-1 muestra las relaciones

Tabla 7-1 Resumen de errores en estado estable debido a entrada parábola de escalón y rampa para sistemas de unidad de retroalimentación

Tipos de sistema	Constantes de error			Error de estado estable	Entrada de rampa	Entrada parábola
j	K_p	K_v	K_a	$\frac{R}{1+K_p}$	$\frac{R}{K_v}$	$\frac{R}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{R}{1+K}$	∞	∞
1	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$	∞
2	∞	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$
3	∞	∞	∞	0	0	0

entre las constantes de error, los tipos de sistemas con referencia a la ecuación (7-18), y los tipos de entradas.

Como un resumen, los siguientes puntos se deben observar cuando se aplica el análisis de las constantes de error presentadas anteriormente.

1. Las constantes de error escalón, rampa y parábola sólo son significativas en el análisis de error cuando la señal de entrada es una función escalón, una función rampa y una función parábola, respectivamente.
2. Ya que las constantes de error se definen con respecto a la función de transferencia de la trayectoria directa $G(s)$, el método sólo es aplicable a la configuración del sistema de la Fig. 7-7. Ya que el análisis de error se basa en el empleo del teorema del valor final de la transformada de Laplace, es importante primero revisar si $sE(s)$ tiene algún polo sobre el eje $j\omega$ o en el semiplano derecho del plano s.
3. Las propiedades para el error en estado estable que se resumen en la tabla 7-1 son únicamente para sistemas con realimentación unitaria.
4. El error en estado estable de un sistema con una entrada que es una combinación lineal de tres tipos básicos de entradas se puede determinar al sobreponer los errores debido a cada componente de entrada.
5. Cuando la configuración del sistema difiere de aquella de la Fig. 7-7, el sistema se puede simplificar ya sea a la forma de la Fig. 7-7, o establecer la señal de error y aplicar el teorema del valor final. Las constantes de error definidas anteriormente pueden o no aplicarse, dependiendo de la situación individual.

Cuando el error en estado estable es infinito, esto es, cuando el error se incrementa continuamente con el tiempo, el método de las constantes de error no indica cómo varía el error con el tiempo. Ésta es una de las desventajas del método de las constantes de error. El método de la constante de error no se aplica a sistemas con entradas senoidales, ya que el teorema de valor final tampoco puede aplicarse. Los siguientes ejemplos ilustran la utilidad de las constantes de error y sus valores en el cálculo de los errores en estado estable de sistemas de control lineales con realimentación unitaria.

Ejemplo 7-2

Considere que el sistema que se muestra en la Fig. 7-7 tiene las siguientes funciones de transferencia. Las constantes de error y los errores en estado estable se calculan para los tres tipos básicos de entradas empleando las constantes de error:

(a) $G(s) = \dfrac{K(s + 3.15)}{s(s + 1.5)(s + 0.5)} \qquad H(s) = 1$ **Sistema tipo 1**

▲ Entrada escalón:	Constante de error escalón: $K_p = \infty$	$e_{ss} = \dfrac{R}{1+K_p} = 0$
▲ Entrada rampa:	Constante de error rampa: $K_v = 4.2K$	$e_{ss} = \dfrac{R}{K_v} = \dfrac{R}{4.2K}$
▲ Entrada parábola:	Constante de error parabólico: $K_a = 0$	$e_{ss} = \dfrac{R}{K_a} = \infty$

Estos resultados son sólo válidos si K permanece dentro de un intervalo que corresponde a un sistema en lazo cerrado estable, el cual es $0 < K < 1.3043$.

(b) $G(s) = \dfrac{K}{s^2(s+12)}$ $\quad H(s) = 1$ **Sistema tipo 2**

El sistema en lazo cerrado es inestable para todo valor de K, y el análisis de error no tiene sentido.

(c) $G(s) = \dfrac{5(s+1)}{s^2(s+12)(s+5)}$ **Sistema tipo 2**

Se puede mostrar que el sistema en lazo cerrado es estable. Los errores en estado estable se calculan para los tres tipos básicos de entradas.

▲ Entrada escalón:	Constante de error escalón: $K_p = \infty$	$e_{ss} = \dfrac{R}{1+K_p} = 0$
▲ Entrada rampa:	Constante de error rampa: $K_v = \infty$	$e_{ss} = \dfrac{R}{K_v} = 0$
▲ Entrada parábola:	Constante de error parabólico: $K_a = \frac{1}{12}$	$e_{ss} = \dfrac{R}{K_a} = 12R$

Relaciones entre el error en estado estable y la función de transferencia en lazo cerrado: Sistemas con realimentación unitaria y no unitaria

En la sección anterior, el error en estado estable de un sistema en lazo cerrado se relacionó con la función de transferencia de la trayectoria directa del sistema, la cual normalmente es conocida. A menudo, la función de transferencia en lazo cerrado se obtiene en el proceso de análisis, y podría ser de interés establecer la relación entre el error en estado estable y los coeficientes de la función de transferencia en lazo cerrado. La función de transferencia en lazo cerrado se puede emplear para encontrar el error en estado estable de sistemas con realimentación unitaria así como con realimentación no unitaria. Para la discusión presente, se impondrá la siguiente condición:

$$\lim_{s\to 0} H(s) = H(0) = K_H = \text{constante} \tag{7-35}$$

Ya que la señal que es realimentada para ser comparada con la entrada en el estado estable es K_H veces la salida en estado estable, cuando esta señal de realimentación es igual a la entrrada, el error en estado estable podría ser cero. Por tanto, la señal de referencia se puede definir como $r(t)/K_H$ y la señal de error como:

$$e(t) = \frac{1}{K_H} r(t) - y(t) \tag{7-36}$$

o en el dominio de la transformada,

$$E(s) = \frac{1}{K_H} R(s) - Y(s) = \frac{1}{K_H} [1 - K_H M(s)] R(s) \tag{7-37}$$

en donde $M(s)$ es la función de transferencia en lazo cerrado. Observe que el desarrollo anterior incluye el caso de realimentación unitaria para el cual $K_H = 1$. Se supone que $M(s)$ no tiene polos en $s = 0$, y es de la forma:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{7-38}$$

en donde $n > m$. Posteriormente se requerirá que todos los polos de $M(s)$ estén en el semiplano izquierdo del plano s. El error en estado estable del sistema se escribe como:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{K_H} [1 - K_H M(s)] sR(s) \tag{7-39}$$

Al sustituir la ecuación (7-38) por la ecuación (7-39) y simplificando se obtiene:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_H} \lim_{s\to 0} \frac{s^n + \cdots + (a_1 - b_1 K_H)s + (a_0 - b_0 K_H)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} sR(s) \tag{7-40}$$

Se consideran los tres tipos básicos de entradas para $r(t)$.

1. **Entrada escalón.** $R(s) = R/s$.
   Para una entrada función escalón, el error en estado estable en la ecuación (7-40) se convierte en:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_H}\left(1 - \frac{b_0 K_H}{a_0}\right) R \tag{7-41}$$

Por tanto, el error en estado estable debido a una entrada escalón puede ser cero sólo si:

$$a_0 - b_0 K_H = 0 \tag{7-42}$$

o bien:

$$M(0) = \frac{b_0}{a_0} = \frac{1}{K_H} \tag{7-43}$$

▲ Para un sistema con realimentación unitaria, el error en estado estable debido a una entrada escalón es cero sólo si los términos de la constante en el numerador y denominador de la función de transferencia en lazo cerrado son iguales.

Esto significa que *para un sistema con realimentación unitaria, $K_H = 1$, los términos constantes del numerador y denominador de $M(s)$ deben ser iguales para que el error en estado estable sea cero.*

2. **Entrada rampa.** $R(s) = R/s^2$
   Para una entrada función rampa, el error en estado estable en la ecuación (7-40) se convierte en:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_H} \lim_{s\to 0} \frac{s^n + \cdots + (a_1 - b_1 K_H)s + (a_0 - b_0 K_H)}{s(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)} R \tag{7-44}$$

Los siguientes valores de e_{ss} son posibles:

$$e_{ss} = 0 \qquad \text{si } a_0 - b_0 K_H = 0 \text{ y } a_1 - b_1 K_H = 0 \tag{7-45}$$

$$e_{ss} = \frac{a_1 - b_1 K_H}{a_0 K_H} R = \text{constante} \qquad \text{si } a_0 - b_0 K_H = 0 \text{ y } a_1 - b_1 K_H \neq 0 \tag{7-46}$$

$$e_{ss} = \infty \qquad \text{si } a_0 - b_0 K_H \neq 0 \tag{7-47}$$

3. **Entrada parábola.** $R(s) = R/s^3$.
Para una entrada parabólica, el error en estado estable en la ecuación (7-40) se convierte en:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_H} \lim_{s \to 0} \frac{s^n + \cdots + (a_2 - b_2 K_H)s^2 + (a_1 - b_1 K_H)s + (a_0 - b_0 K_H)}{s^2(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)} R \tag{7-48}$$

Los siguientes valores de e_{ss} son posibles:

$$e_{ss} = 0 \quad \text{si } a_i - b_i K_H = 0 \quad \text{para} \quad i = 0, 1 \text{ y } 2 \tag{7-49}$$

$$e_{ss} = \frac{a_2 - b_2 K_H}{a_0 K_H} R = \text{constante} \quad \text{si } a_i - b_i K_H = 0 \quad \text{para} \quad i = 0 \text{ y } 1 \tag{7-50}$$

$$e_{ss} = \infty \quad \text{si } a_i - b_i K_H \neq 0 \quad \text{para} \quad i = 0 \text{ o } 1 \tag{7-51}$$

Ejemplo 7-3

Considere el ejemplo descrito en el ejemplo 7-2(a). La función de transferencia en lazo cerrado del sistema está dado a continuación. Los errores en estado estable para las entradas escalón, rampa y parábola directamente se obtienen de las funciones de transferencia en lazo cerrado.

$$M(s) = \frac{Ks + 3.15K}{s^3 + 2s^2 + (0.75 + K)s + 3.15K} \tag{7-52}$$

Como el sistema tiene realimentación unitaria, $K_H = 1$. Al comparar los coeficientes de $M(s)$ con los de la ecuación (7-38) , se tiene que $a_0 = 3.15K$, $a_1 = 0.75 + K$, $a_2 = 2$, $b_0 = 3.15K$ y $b_1 = K$.

▲ Entrada escalón: $e_{ss} = 0$ ya que los términos constantes en el numerador y el denominador de $M(s)$ son los mismos

▲ Entrada rampa: $e_{ss} = \dfrac{a_1 - b_1 K_H}{a_0 K_H} R = \dfrac{0.75 + K - K}{3.15K} R = \dfrac{R}{4.2K}$

▲ Entrada parábola: $e_{ss} = \infty$ ya que $a_1 - b_1 K_H = 0.75 + K - K \neq 0$

Estos resultados concuerdan con los obtenidos en el ejemplo 7-2(a). ▲

Ejemplo 7-4

La trayectoria directa y las funciones de transferencia de lazo cerrado del sistema que se muestran en la Fig. 7-7, se detallan a continuación. Se asume que el sistema tiene realimentación unitaria, de tal forma que $H(s) = 1$, y por lo tanto $K_H = 1$.

$$G(s) = \frac{5(s+1)}{s^2(s+12)(s+5)} \qquad M(s) = \frac{5(s+1)}{s^4 + 17s^3 + 60s^2 + 5s + 5} \tag{7-53}$$

Comparando los coeficientes de $M(s)$ con los de la ecuación (7-38), se tiene $a_0 = 5$, $a_1 = 5$, $a_2 = 60$, $a_1 = 17$, $b_0 = 5$, $b_1 = 5$, y $b_2 = 0$.

Todos los polos de $M(s)$ se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s. Por lo que el sistema es estable. Los errores en estado estable debido a los tres tipos básicos de entradas se evalúan como sigue:

- ▲ Entrada escalón: $e_{ss} = 0$ ya que $a_0 = b_0$ (= 5)
- ▲ Entrada rampa: $e_{ss} = 0$ ya que $a_0 = b_0$ (= 5) y $a_1 = b_1$ (= 5)
- ▲ Entrada parábola: $e_{ss} = \dfrac{a_2 - b_2 K_H}{a_0 K_H} R = \dfrac{60}{5} R = 12R$

Debido a que éste es un sistema de tipo 2 con realimentación unitaria, los mismos resultados se obtienen con el método de constantes de error como en el ejemplo 7-2(c). ▲

Ejemplo 7-5

Considere que el sistema que se muestra en la Fig. 7-5 tiene las siguientes funciones de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+12)} \qquad H(s) = \frac{5(s+1)}{s+5} \tag{7-54}$$

Por tanto $K_H = 1$. La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{s+5}{s^4 + 17s^3 + 60s^2 + 5s + 5} \tag{7-55}$$

Comparando esta última ecuación con la ecuación (7-38), se tiene $a_0 = 5$, $a_1 = 5$, $a_2 = 60$, $b_0 = 5$, $b_1 = 1$ y $b_2 = 0$. Los errores del sistema en estado estable están calculados para los tres tipos básicos de entradas.

- ▲ Entrada escalón unitario, $r(t) = u_s(t)$: $e_{ss} = \dfrac{a_0 - b_0 K_H}{a_0} = 0$
- ▲ Entrada rampa unitaria, $r(t) = tu_s(t)$: $e_{ss} = \dfrac{a_1 - b_1 K_H}{a_0 K_H} = \dfrac{5-1}{5} = 0.8$
- ▲ Entrada parábola unitaria, $r(t) = tu_s(t)/2$: $e_{ss} = \infty$ ya que $a_1 - b_1 K_H \neq 0$

Sería ilustrativo calcular, por la diferencia entre la entrada y la salida, los errores de estado estable del sistema, y compararlos con los resultados que se obtuvieron anteriormente.

Aplicando las entradas de escalón unitario, rampa unitaria y parábola unitaria al sistema que se describe en la ecuación (7-55) y tomando la transformada inversa de Laplace de $Y(s)$, las salidas son:

Entrada escalón unitario: $$y(t) = 1 - 0.00056e^{-12.05t} - 0.0001381e^{-4.886t} - 0.9993e^{-0.0324t}\cos 0.2898t - 0.1301e^{-0.03024t}\operatorname{sen} 0.2898t \quad t \geq 0 \tag{7-56}$$

Por lo que el valor en estado estable de $y(t)$ es la unidad, y el error en estado estable es cero.

Entrada rampa unitaria: $$y(t) = t - 0.8 + 4.682 \times 10^{-5}e^{-12.05t} + 2.826 \times 10^{-5}e^{-4.886t} + 0.8e^{-0.03024t}\cos 0.2898t - 3.365e^{-0.0302t}\operatorname{sen} 0.2898t \quad t \geq 0 \tag{7-57}$$

Por lo que la porción en estado estable de $y(t)$ es $t - 0.8$, y el error en estado estable a una rampa unitaria es 0.8.

Entrada parábola unitaria: $$y(t) = 0.5t^2 - 0.8t - 11.2 - 3.8842 \times 10^{-6}e^{-12.05t} - 5.784 \times 10^{-6}e^{-4.886t} + 11.2e^{-0.03024t}\cos 0.2898t + 3.9289e^{-0.03024t}\operatorname{sen} 0.2898t \quad t \geq 0 \tag{7-58}$$

La porción en estado estable de $y(t)$ es $0.5t^2 - 0.8t - 11.2$. Por lo que el error en estado estable es $0.8t + 11.2$, que se vuelve infinito cuando el tiempo tiende a infinito.

Es fácil ver que estos resultados concuerdan con los obtenidos utilizando el análisis de error con la función de transferencia en lazo cerrado. ▲

Ejemplo 7-6

Asumiendo que el sistema que se muestra en la Fig. 7-5 tiene las siguientes funciones de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+12)} \qquad H(s) = \frac{10(s+1)}{s+5} \tag{7-59}$$

Por lo que:

$$K_H = \lim_{s \to 0} H(s) = 2 \tag{7-60}$$

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{s+5}{s^4 + 17s^3 + 60s^2 + 10s + 10} \tag{7-61}$$

Comparando los coeficientes de $M(s)$ con los de la ecuación (7-38), se tiene que $a_0 = 10$, $a_1 = 10$, $a_2 = 60$, $a_3 = 17$, $b_0 = 5$, $b_1 = 1$ y $b_2 = 0$. Los errores en estado estable del sistema debido a los tres tipos básicos de entradas se calculan como sigue:

Entrada escalón unitario, $r(t) = u_s(t)$: $$e_{ss} = \frac{1}{K_H}\left(\frac{a_0 - b_0K_H}{a_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{10 - 5 \times 2}{10}\right) = 0 \tag{7-62}$$

Resolviendo para la respuesta al escalón unitario utilizando $M(s)$ en la ecuación (7-61) se obtiene:

$$y(t) = 0.5u_s(t) + \text{términos transitorios} \tag{7-63}$$

Por lo que el valor en estado estable de $y(t)$ es 0.5, y ya que $K_H = 2$, el error en estado estable debido a la entrada de escalón unitario, es cero.

Entrada rampa unitaria, $r(t) = tu_s(t)$: $e_{ss} = \frac{1}{K_H}\left(\frac{a_1 - b_1K_H}{a_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{10 - 1 \times 2}{10}\right) = 0.4$ (7-64)

La respuesta del sistema a rampa unitaria se escribe:

$$y(t) = [0.5t - 0.4]u_s(t) + \text{términos transitorios} \tag{7-65}$$

Por lo que, utilizando la ecuación (7-36), el error en estado estable se calcula como:

$$e(t) = \frac{1}{K_H}r(t) - y(t) = 0.4u_s(t) - \text{términos transitorios} \tag{7-66}$$

El error en estado estable es 0.4 como se calcuó en la ecuación (7-64).

Entrada parábola unitaria, $r(t) = t^2u_s(t)/2$: $e_{ss} = \infty$ ya que: $a_1 - b_1K_H \neq 0$

La entrada parábola unitaria es:

$$y(t) = [0.25t^2 - 0.4t - 2.6]u_s(t) + \text{términos transitorios} \tag{7-67}$$

Por lo que el error en estado estable es $0.4t + 2.6$, que aumenta con el tiempo. ▲

Error en estado estable de realimentación no unitaria:
$H(s)$ tiene un cero de N-ésimo orden en $s = 0$

Cuando $H(s)$ tiene un cero de n-ésimo orden en $s = 0$, esto corresponde a que la salida deseada sea proporcional a la derivada de n-ésimo orden de la entrada en el estado estable. Por lo que la señal de referencia puede definirse como $R(s)/K_Hs^N$ y la señal de error en el dominio de la transformada puede definirse como:

$$E(s) = \frac{1}{K_Hs^N}R(s) - Y(s) \tag{7-68}$$

en donde:

$$K_H = \lim_{s\to 0}\frac{H(s)}{s^N} \tag{7-69}$$

Asúmase que $N = 1$; por lo que la función de transferencia de $M(s)$ en la ecuación (7-38) tendrá un polo en $s = 0$, o $a_0 = 0$. El error en estado estable se escribe, de la ecuación (7-68).

$$e_{ss} = \frac{1}{K_H} \lim_{s \to 0} \left[\frac{s^{n-1} + \cdots + (a_2 - b_1 K_H)s + (a_1 - b_0 K_H)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s} \right] sR(s) \tag{7-70}$$

Para una entrada de escalón de magnitud R, la ecuación (7-70) se escribe:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_H} \lim_{s \to 0} \left[\frac{s^{n-1} + \cdots + (a_2 - b_1 K_H)s + (a_1 - b_0 K_H)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s} \right] R \tag{7-71}$$

Por lo que el error en estado estable es:

$$e_{ss} = 0 \qquad \text{si } a_2 - b_1 K_H = 0 \text{ y } a_1 - b_0 K_H = 0 \tag{7-72}$$

$$e_{aa} = \frac{a_2 - b_1 K_H}{a_1 K_H} R = \text{constante} \qquad \text{si } a_1 - b_0 K_H = 0 \text{ pero } a_2 - b_1 K_H \neq 0 \tag{7-73}$$

$$e_{ss} = \infty \qquad \text{si } a_1 - b_0 K_H \neq 0 \tag{7-74}$$

El siguiente ejemplo se utilizará para ilustrar estos resultados.

Ejemplo 7-7

Asúmase que las funciones de transferencia del sistema que se muestran en la Fig. 7-5 son las siguientes:

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s + 12)} \qquad H(s) = \frac{10s}{s + 5} \tag{7-75}$$

Por lo tanto:

$$K_H = \lim_{s \to 0} \frac{H(s)}{s} = 2 \tag{7-76}$$

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s + 5}{s^4 + 17s^3 + 60s^2 + 10s} \tag{7-77}$$

Aun cuando $M(s)$ tiene un polo en $s = 0$, el sistema de control de velocidad se considera estable, como se define en el Cap. 5, ya que el objetivo es controlar la velocidad con una entrada escalón. Los coeficientes se identifican como: $a_0 = 0$, $a_1 = 10$, $a_2 = 60$, $b_0 = 5$ y $b_1 = 1$.

Para una entrada escalón unitario, el error en estado estable, de la ecuación (7-73) es:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_H}\left(\frac{a_2 - b_1 K_H}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{60 - 1 \times 2}{10}\right) = 2.9 \qquad (7\text{-}78)$$

Para verificar este resultado, se busca la respuesta al escalón unitario utilizando la función de transferencia en lazo cerrado en la ecuación (7-77). El resultado es:

$$y(t) = (0.5t - 2.9)u_s(t) + \text{términos transitorios} \qquad (7\text{-}79)$$

En la ecuación (7-68), la señal de referencia es $tu_s(t)/K_H = 0.5tu_s(t)$ en el estado estable; por lo tanto el error en estado estable es 2.9. ▲

7-4 Respuesta al escalón unitario y especificaciones en el dominio del tiempo

Como se definió anteriormente, la porción transitoria de la respuesta en el tiempo es aquella parte que tiende a cero cuando el tiempo crece. Sin embargo, la respuesta transitoria de un sistema de control es importante, ya que tanto la amplitud como la duración de tiempo en la respuesta transitoria deben mantenerse dentro de los límites tolerables o prescritos. Por ejemplo, en el sistema de control de la velocidad en ralentí del automóvil descrito en el Cap. 1, adicionalmente a forzarse la velocidad baja deseada en el estado estable, la caída transitoria en la velocidad del motor no debe ser excesiva y la recuperación en velocidad debe hacerse tan rápido como sea posible.

Para un sistema de control lineal, la caracterización de la respuesta transitoria frecuentemente se realiza mediante la función al escalón unitario $u_s(t)$ como la entrada. La respuesta de un sistema de control cuando la entrada es una función al escalón unitario se conoce como **respuesta al escalón unitario.** La Fig. 7-11 ilustra una respuesta típica al escalón unitario de un sistema de control lineal. En referencia a la respuesta al escalón unitario, el criterio de desempeño comúnmente utilizado para la caracterización de sistemas de control lineal en el dominio del tiempo se define como:

1. **Sobrepaso máximo.** Asúmase que $y(t)$ es la respuesta al escalón unitario. también que $y_{máx}$ enuncia el valor máximo de $y(t)$, y y_{ss} es el valor en estado estable de $y(t)$ y de $y_{máx} \geq y_{ss}$. El sobrepaso máximo de $y(t)$ se define como:

$$\text{sobrepaso máximo} = y_{máx} - y_{ss} \qquad (7\text{-}80)$$

El sobrepaso máximo se representa como un porcentaje del valor final de la respuesta al escalón; esto es:

$$\text{porcentaje máximo de sobrepaso} = \frac{\text{sobrepaso máximo}}{y_{ss}} \times 100\% \qquad (7\text{-}81)$$

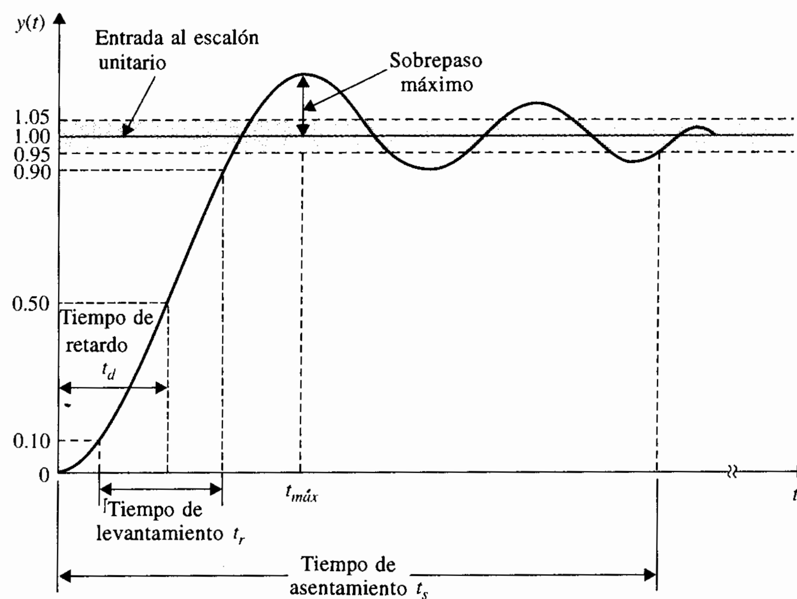


Figura 7-11 Respuesta típica al escalón unitario de un sistema de control.

Frecuentemente el sobrepaso máximo se usa para medir la estabilidad relativa de un sistema de control. Comúnmente un sistema con gran sobrepaso es indeseable. Para fines de diseño, el sobrepaso máximo se da como una especificación en el dominio en el tiempo. En la Fig. 7-11 se ilustra el escalón unitario que muestra que el máximo sobrepaso ocurre en el primero. Para algunos sistemas, el sobrepaso máximo puede ocurrir en un pico posterior, y si la función de transferencia del sistema tiene un número impar de ceros en el semiplano derecho del plano s, puede incluso ocurrir un sobrepaso negativo [3,4] (problema 7-23).

2. **Tiempo de retardo.** El tiempo de retardo t_d se define como el tiempo requerido para que la respuesta al escalón alcance el 50% de su valor final. Esto se muestra en la Fig. 7-11.

3. **Tiempo de levantamiento.** El tiempo de levantamiento t_r se define como el tiempo requerido para que la respuesta al escalón se eleve del 10 al 90% de su valor final, como se muestra en la Fig. 7-11. Una medida alternativa es representar el tiempo de levantamiento como recíproco de la pendiente de la respuesta al escalón en el instante en que la respuesta es igual al 50% de su valor final.

4. **Tiempo de asentamiento.** El tiempo de asentamiento t_s se define como el tiempo requerido para que la respuesta al escalón disminuya y permanezca dentro de un porcentaje específico de su valor final. Una cifra de uso frecuente es 5%.

Estas cuatro cantidades definidas dan una medida directa de las características transitorias de un sistema de control en términos de la respuesta al paso unitario. Como se muestra en la Fig. 7-11, estas especificaciones de dominio en el tiempo son relativamente fáciles de medir cuando está bien definida la respuesta al escalón. Analíticamente, estas cantidades son difíciles de establecer, excepto para sistemas sencillos de primero y segundo orden.

7-5 Respuesta transitoria de un sistema prototipo de segundo orden

Si bien cuando los sistemas de control de segundo orden son raros en la práctica, su análisis generalmente ayuda a formar una base para el entendimiento del análisis y diseño de sistemas de órdenes más altos, especialmente aquellos que pueden aproximarse mediante sistemas de segundo orden. Considérese que un sistema de control de segundo orden con realimentación unitaria se representa mediante el diagrama de bloque que se muestra en la Fig. 7-12. La función de transferencia en lazo abierto del sistema es:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \tag{7-82}$$

en donde ζ y ω_n son constantes reales. La función de transferencia en lazo cerrado del sistema es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{7-83}$$

El sistema de la Fig. 7-12 con las funciones de transferencia dadas en las ecuaciones (7-82) y (7-83) se definen como **sistema prototipo de segundo orden.**

La ecuación característica del sistema prototipo de segundo orden se obtiene estableciendo el denominador de la ecuación (7-83) a cero:

$$\Delta(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \tag{7-84}$$

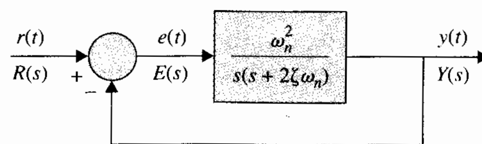


Figura 7-12 Sistema de control prototipo de segundo orden.

Para una entrada de función al escalón unitario, $R(s) = 1/s$, la respuesta de salida del sistema se obtiene tomando la transformada inversa de Laplace de la transformada de salida.

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \qquad (7\text{-}85)$$

Esto puede realizarse refiriéndose a la tabla de la transformada de Laplace en el Apéndice B. El resultado es:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \cos^{-1}\zeta) \qquad t \geq 0 \qquad (7\text{-}86)$$

La Fig. 7-13 muestra las respuestas al escalón unitario de la ecuación (7-86) graficadas como funciones del tiempo normalizado $\omega_n t$ para varios valores de ζ. Como se observa, la respuesta se vuelve más oscilatoria con sobrepasos mayores, mientras ζ disminuye. Cuando $\zeta \geq 1$, la respuesta al escalón no muestra ningún sobrepaso, esto es, $y(t)$ nunca excede su valor final durante la transitoria. Las respuestas también muestran que ω_n tiene un efecto directo sobre el tiempo de levantamiento, el tiempo de retardo , y el tiempo de asentamiento, pero no afecta el sobrepaso. Esto se presentará con mayor detalle en las siguientes secciones.

7-5-1 Factor de amortiguamiento relativo y factor de amortiguamiento

Los efectos de los parámetros del sistema ζ y ω_n en la respuesta al escalón $y(t)$ del sistema prototipo de segundo orden se refieren a las raíces de la ecuación característica en la ecuación (7-84). Las dos raíces pueden expresarse como:

$$\begin{aligned} s_1, s_2 &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\ &= -\alpha \pm j\omega \end{aligned} \qquad (7\text{-}87)$$

en donde:

$$\alpha = \zeta\omega_n \qquad (7\text{-}88)$$

y

$$\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \qquad (7\text{-}89)$$

Ahora que ya se investigó el significado físico de ζ y α, y como puede observarse en las ecuaciones (7-86) y (7-88), α aparece como la constante que se multiplica por t en el término exponencial de $y(t)$. Por lo tanto, α controla la velocidad de crecimiento o decaimiento de la respuesta al escalón unitario $y(t)$. En otras palabras, α controla el "amortiguamiento" del sistema y se conoce como **factor de amortiguamiento, o constante de amortiguamiento.** La inversa de α, $1/\alpha$, es proporcional a la constante de tiempo del sistema.

▲ Cuando el amortiguamiento es crítico, $\zeta = 1$.

Cuando las dos raíces de la ecuación característica son reales e iguales, el sistema se conoce como **amortiguamiento crítico.** De la ecuación (7-87) se observa que el amortiguamiento

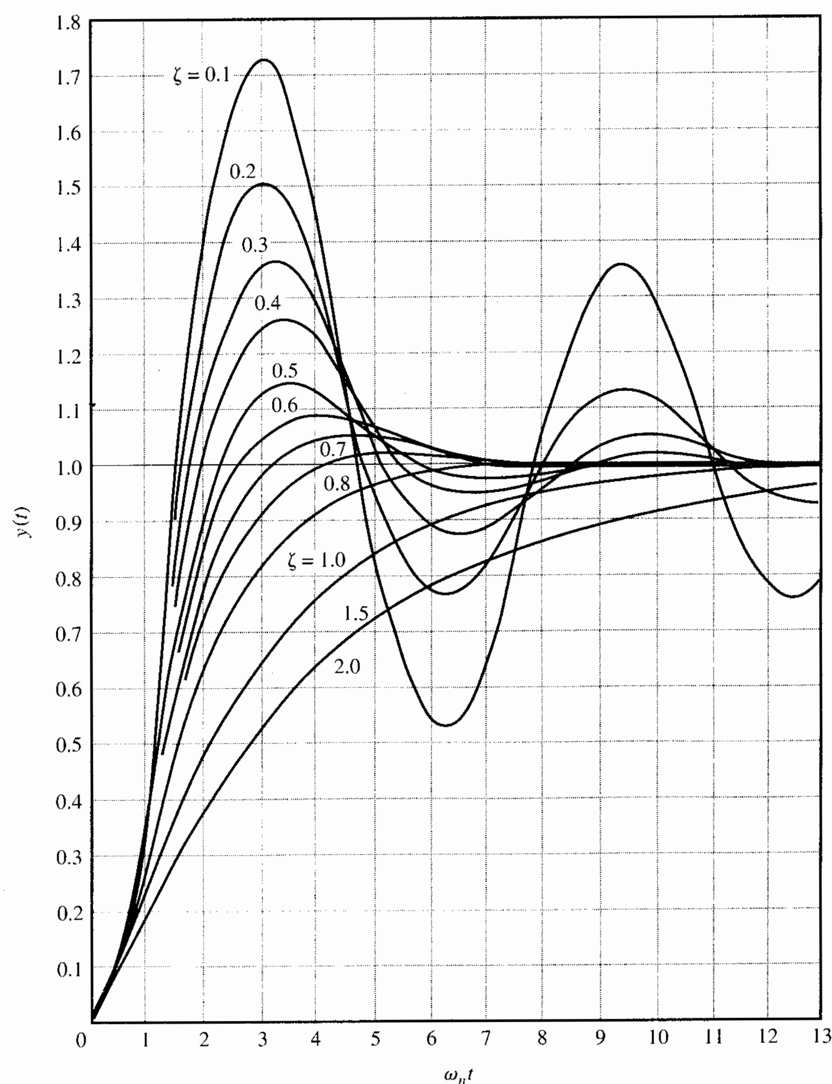


Figura 7-13 Respuestas al escalón unitario del sistema prototipo de segundo orden con varios factores de amortiguamiento relativo.

crítico sucede cuando $\zeta = 1$. Bajo esta condición, el factor de amortiguamiento es $\alpha = \omega_n$. Por lo tanto ζ se enuncia como el factor de amortiguamiento relativo, esto es:

$$\zeta = \text{factor de amortiguamiento relativo} = \frac{\alpha}{\omega_n} = \frac{\text{factor de amortiguamiento real}}{\text{factor de amortiguamiento en amortiguamiento crítico}} \tag{7-90}$$

7-5-2 Frecuencia natural no amortiguada

El parámetro ω_n se define como la **frecuencia natural no amortiguada.** Como se observa en la ecuación (7-87), cuando $\zeta = 0$, el amortiguamiento es cero, las raíces de la ecuación característica son imaginarias, y la ecuación (7-86) muestra que la respuesta al escalón unitario es puramente senoidal. Por lo tanto, ω_n corresponde a la frecuencia de la respuesta senoidal no amortiguada. La ecuación (7-87) muestra que cuando $0 < \zeta < 1$, las partes imaginarias de las raíces tienen la magnitud de ω. Ya que cuando $\zeta \neq 0$, la respuesta de $y(t)$ no es una función periódica, la ω que se define en la ecuación (7-89) no es una frecuencia. Para el propósito de referencia, ω algunas veces se define como **frecuencia condicional (oscilación)** o **frecuencia de amortiguamiento.**

La Fig. 7-14 ilustra la relación entre la localización de las raíces de la ecuación característica y α, ζ, ω_n y ω. Para las raíces de conjugación compleja que se muestran:

- ▲ ω_n es la distancia radial de las raíces al origen del plano s.
- ▲ α es la parte real de las raíces.
- ▲ ω es la parte imaginaria de las raíces.
- ▲ ζ es el coseno del ángulo entre la línea radial de las raíces y el eje negativo cuando las raíces están en el semiplano izquierdo del plano s, o

$$\zeta = \cos\theta \tag{7-91}$$

La Fig. 7-15 muestra en el plano s, (a) el lugar geométrico de ω_n constante, (b) el lugar geométrico de ζ constante, (c) el lugar geométrico de α constante y (d) el lugar geométrico de

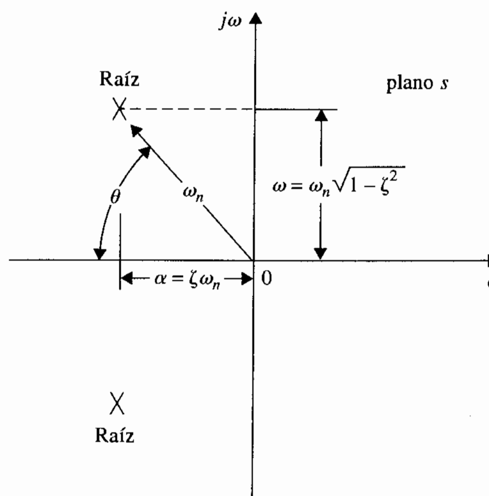


Figura 7-14 Relación entre las raíces de la ecuación característica del sistema prototipo de segundo orden y α, ζ, ω_n y ω.

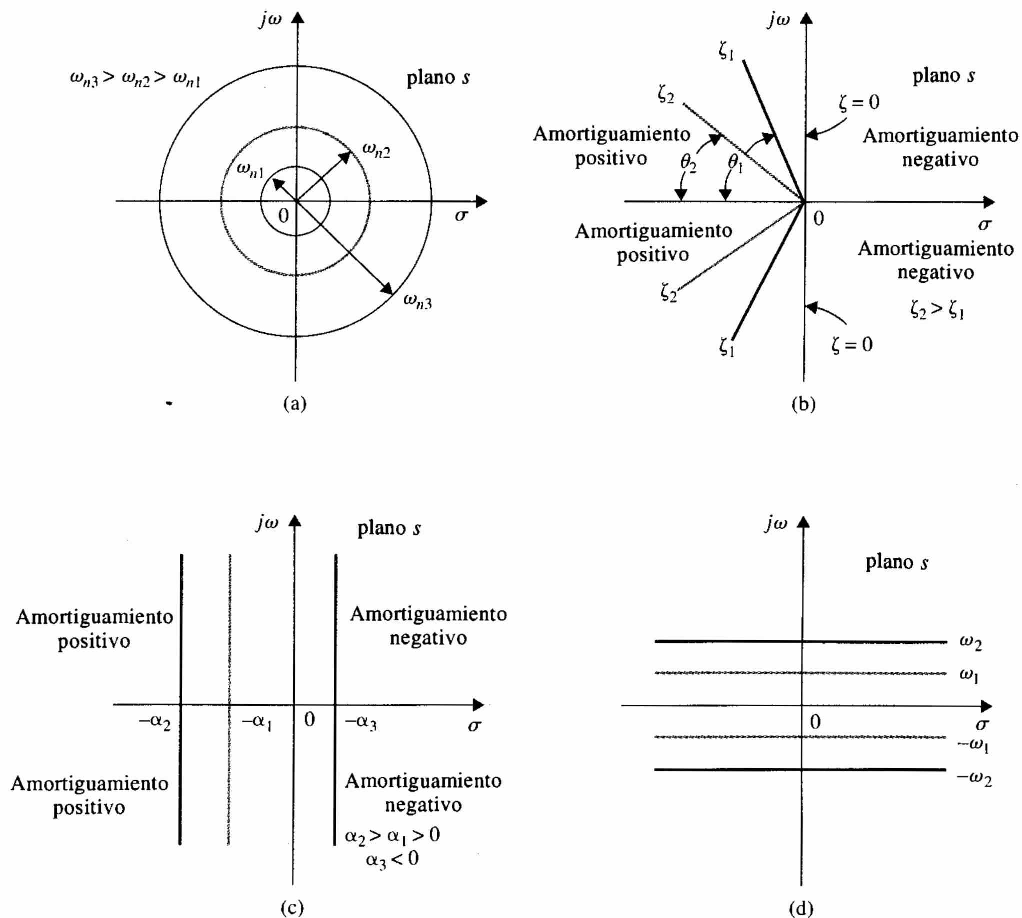


Figura 7-15 (a) Lugar geométrico de la frecuencia natural no amortiguada constante. (b) Lugar geométrico del factor de amortiguamiento relativo constante. (c) Lugar geométrico del factor de amortiguamiento constante. (d) Lugar geométrico de la frecuencia de oscilación constante.

ω constante. Las regiones en el plano s se identifican con el amortiguamiento del sistema como sigue:

- ▲ El semiplano izquierdo del plano s corresponde al amortiguamiento positivo (es decir, el factor de amortiguamiento o el factor de amortiguamiento relativo es positivo). El amortiguamiento positivo causa que la respuesta al escalón unitario establezca un valor final constante en el estado estable debido al exponente negativo de la $\exp(-\zeta\omega_n t)$. El sistema es estable.
- ▲ El semiplano derecho del plano s corresponde al amortiguamiento negativo. El amortiguamiento negativo da una respuesta que crece en magnitud sin límite en el tiempo, y el sistema es inestable.

▲ El eje imaginario corresponde a cero amortiguamientos ($\alpha = 0$ o $\zeta = 0$). El amortiguamiento cero resulta en una respuesta de oscilación sostenida, y el sistema es marginalmente estable o marginalmente inestable.

Por lo que se ha demostrado con la ayuda de un sistema prototipo de segundo orden que la localización de las raíces de la ecuación característica juega un papel importante en la respuesta transitoria del sistema.

En las Figs. 7-16 y 7-17 se ilustra el efecto de las raíces de la ecuación característica en el amortiguamiento del sistema de segundo orden. En la Fig. 7-16, ω_n se mantiene constante, mientras que ζ varía de $-\infty$ a $+\infty$. Las dinámicas del sistema con respecto al valor de ζ se clasifican como sigue:

▲ $0 < \zeta < 1$: $s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ $(-\zeta\omega_n < 0)$ *bajo amortiguamiento*

▲ $\zeta = 1$: $s_1, s_2 = -\omega_n$ *amortiguamiento crítico*

▲ $\zeta > 1$: $s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$ *sobre amortiguamiento*

▲ $\zeta = 0$: $s_1, s_2 = \pm j\omega_n$ *no amortiguado*

▲ $\zeta < 0$: $s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ $(-\zeta\omega_n < 0)$ *amortiguamiento negativo*

La Fig. 7-17 ilustra las respuestas típicas al escalón unitario correspondientes a varias localizaciones de las raíces antes mencionadas.

En aplicaciones prácticas, son de interés solamente los sistemas estables que correspondan a $\zeta > 0$. La Fig. 7-13 da las respuestas al escalón unitario de la ecuación (7-86) graficadas como funciones del tiempo normalizado $\omega_n t$ para varios valores del factor de amortiguamiento relativo ζ. Como se ha visto, la respuesta se vuelve más oscilatoria cuando ζ disminuye en valor. Cuando $\zeta \geq 1$, la respuesta al escalón no muestra ningún sobrepaso; esto es, $y(t)$ nunca excede su valor final durante la transitoria.

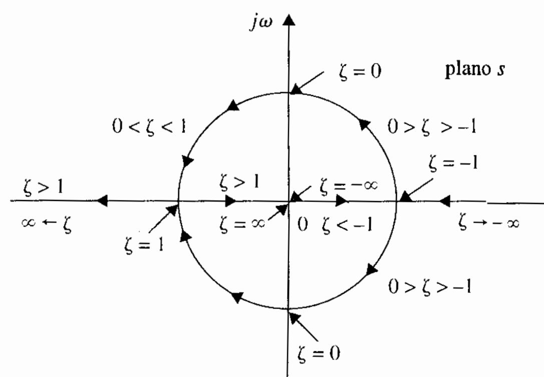


Figura 7-16 Lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica del sistema prototipo de segundo orden, ecuación (7-84), cuando ω_n se mantiene constante cuando el factor de amortiguamiento relativo varía desde $-\infty$ hasta ∞.

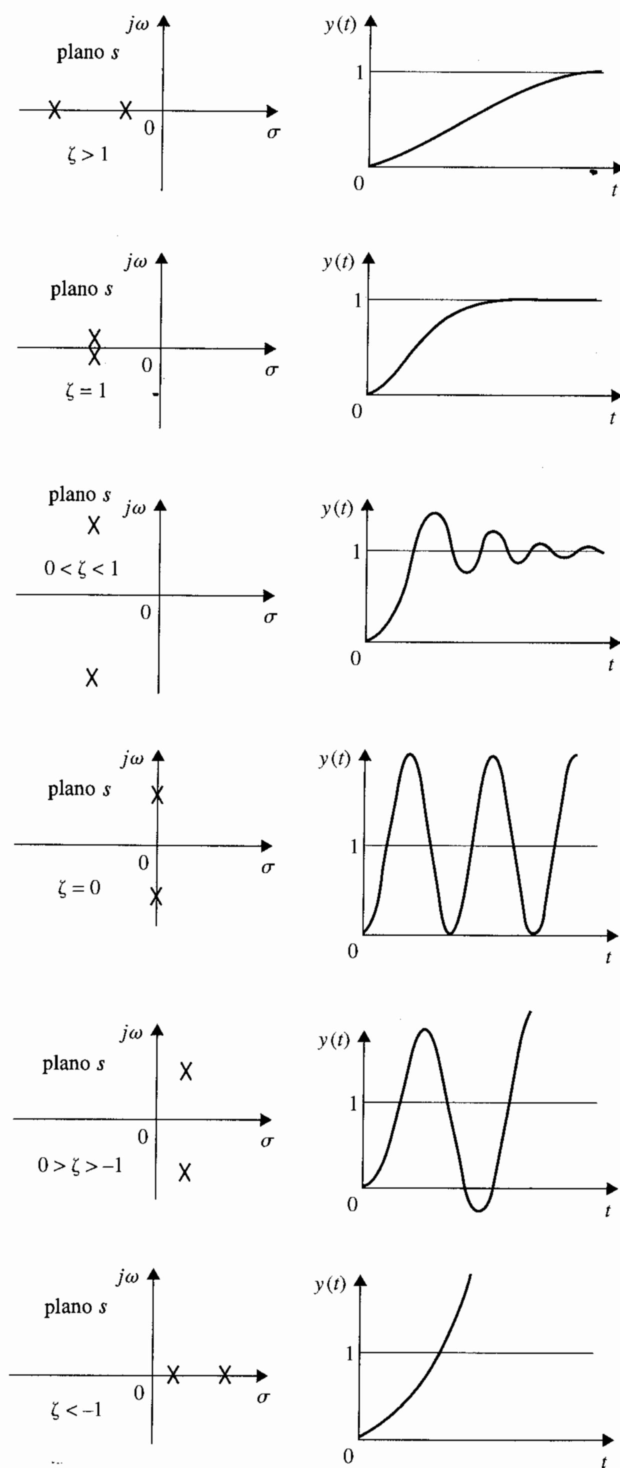


Figura 7-17 Comparación de la respuesta al escalón para varios sitios del lugar geométrico de las raíces en el plano *s*.

7-5-3 Sobrepaso máximo

La relación exacta entre el factor de amortiguamiento relativo y la cantidad de sobrepaso se obtiene tomando la derivada de la ecuación (7-86) con respecto a t y estableciento el resultado a cero. Por lo tanto:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}[\zeta \operatorname{sen}(\omega t + \theta) - \sqrt{1-\zeta^2}\cos(\omega t + \theta)] \qquad t \geq 0 \qquad (7\text{-}92)$$

▲ El sobrepaso máximo se define sólo para una entrada de función escalón.

en donde ω y θ se definen en las ecuaciones (7-89) y (7-91), respectivamente. Se demuestra que la cantidad entre corchetes en la ecuación (7-92) puede reducirse al sen ωt. Por lo que la ecuación (7-92) se simplifica a:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen} \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t \qquad t \geq 0 \qquad (7\text{-}93)$$

Estableciendo $dy(t)/dt$ a cero, se obtienen las soluciones $t = \infty$ y:

$$\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t = n\pi \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (7\text{-}94)$$

de la cual se obtiene:

$$t = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (7\text{-}95)$$

La solución en $t = \infty$ es el máximo de $y(t)$ solamente cuando $\zeta \geq 1$. Para las respuestas al escalón unitario que se muestran en la Fig. 7-13, el primer sobrepaso es el sobrepaso máximo. Esto corresponde a $n = 1$ en la ecuación (7-95). Por lo que el tiempo en el que el sobrepaso máximo se presenta es:

$$t_{max} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (7\text{-}96)$$

Con referencia a la Fig. 7-13, los sobrepasos se presentan en valores impares de n, esto es, $n = 1, 3, 5, \ldots$, y los sobrepasos negativos ocurren en valores pares de n. Ya sea que el extremo sea un sobrepaso o un sobrepaso negativo, el tiempo en el que se presenta está dado por la ecuación (7-95). Debe hacerse notar que *si bien cuando la respuesta al escalón unitario para $\zeta \neq 0$ no es periódica, los sobrepasos y los sobrepasos negativos de la respuesta se presentan a intervalos periódicos, como se muestra en la Fig. 7-18.*

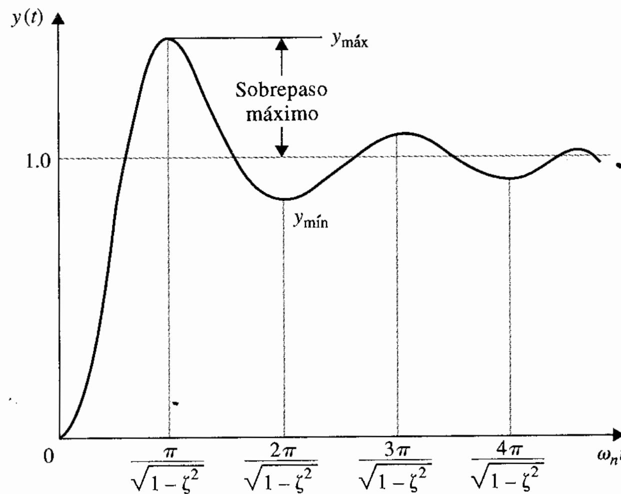


Figura 7-18 Respuestas al escalón unitario que ilustran que el máximo y el mínimo ocurren en intervalos periódicos.

Las magnitudes de los sobrepasos y los sobrepasos negativos pueden determinarse mediante la substitución de la ecuación (7-95) en la ecuación (7-86). El resultado es:

$$y(t)\big|_{\text{máx o mín}} = 1 - \frac{e^{-n\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\text{sen}(n\pi + \theta) \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (7\text{-}97)$$

o

$$y(t)\big|_{\text{máx o mín}} = 1 + (-1)^{n-1}e^{-n\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (7\text{-}98)$$

El sobrepaso máximo se obtiene asumiendo que $n = 1$ en la ecuación (7-98). Por lo tanto,

$$\text{sobrepaso máximo} = y_{\text{máx}} - 1 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (7\text{-}99)$$

y el porcentaje de sobrepaso máximo es:

$$\text{porcentaje de sobrepaso máximo} = 100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (7\text{-}100)$$

La ecuación (7-99) muestra que el sobrepaso máximo de la respuesta al escalón del sistema prototipo de segundo orden es una función del factor de amortiguamiento relativo ζ. La relación entre el porcentaje de sobrepaso máximo y el factor de amortiguamiento relativo dado en la ecuación (7-100), se muestra en la Fig. 7-19. El tiempo $t_{\text{máx}}$ en la ecuación (7-96) es una función tanto de ζ como de ω_n.

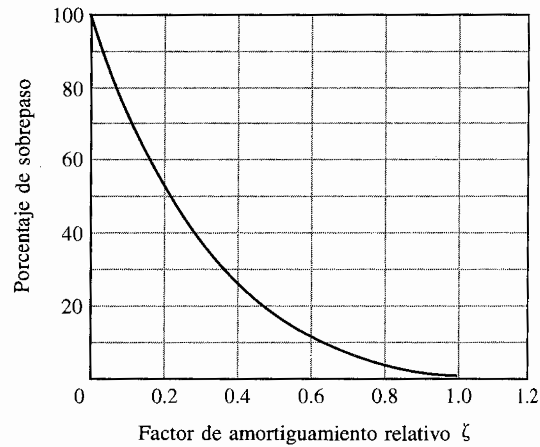


Figura 7-19 Porcentaje de sobrepaso como una función del factor de amortiguamiento relativo para la respuesta al escalón del sistema prototipo de segundo orden.

7-5-4 Tiempo de retardo y tiempo de levantamiento

Es más difícil determinar las expresiones analíticas exactas del tiempo de retardo t_d, del tiempo de levantamiento t_r, y del tiempo de asentamiento t_s, aun para los prototitpos más simples de sistemas de segundo orden. Por ejemplo, para el tiempo de atraso se tendría que establecer que $y(t) = 0.5$ en la ecuación (7-86) y resolver para t. Una forma más fácil sería graficar $\omega_n t_d$ *versus* ζ, como se muestra en la Fig. 7-20, y entonces trazar la curva mediante una línea recta

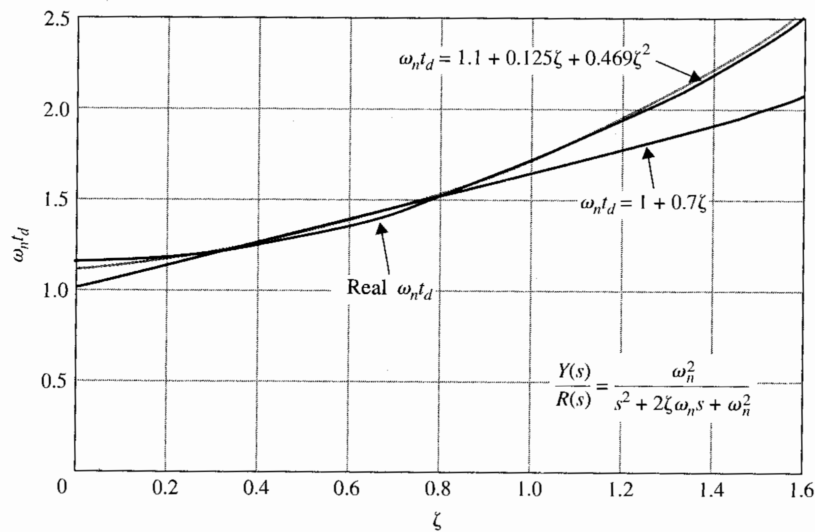


Figura 7-20 Tiempo de retardo normalizado contra ζ para el sistema prototipo de segundo orden.

o curva sobre el intervalo $0 < \zeta < 1$. De la Fig. 7-20, el tiempo de retardo para el sistema prototipo de segundo orden se aproxima como:

$$t_d \cong \frac{1 + 0.7\zeta}{\omega_n} \qquad 0 < \zeta < 1.0 \tag{7-101}$$

Se puede obtener una mejor aproximación utilizando una ecuación de segundo orden para t_d:

$$t_d \cong \frac{1.1 + 0.125\zeta + 0.469\zeta^2}{\omega_n} \qquad 0 < \zeta < 1.0 \tag{7-102}$$

Para el tiempo de levantamiento t_r, que es el tiempo para que la respuesta al escalón alcance del 10 al 90% de su valor final, el valor exacto puede determinarse directamente de las respuestas de la Fig. 7-13. En la Fig. 7-21 se muestra la gráfica de $\omega_n t_r$ *versus* ζ. En este caso, la relación puede nuevamente aproximarse mediante una línea recta sobre un intervalo limitado de ζ.

$$t_r = \frac{0.8 + 2.5\zeta}{\omega_n} \qquad 0 < \zeta < 1 \tag{7-103}$$

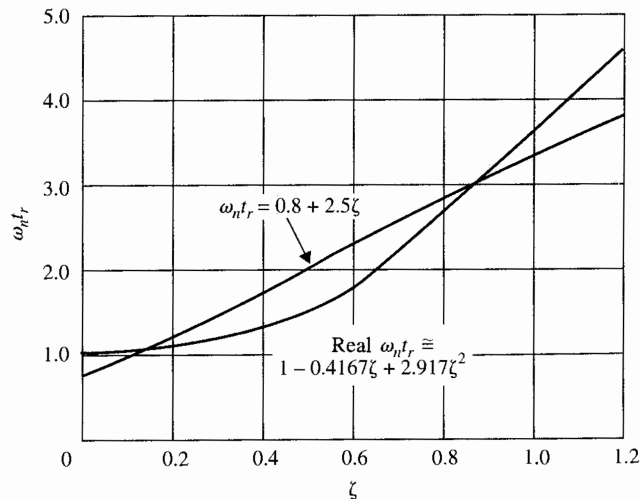


Figura 7-21 Tiempo de levantamiento normalizado contra ζ para el sistema prototipo de segundo orden.

Puede obtenerse una mejor aproximación utilizando una ecuación de segundo orden:

$$t_r = \frac{1 - 0.4167\zeta + 2.917\zeta^2}{\omega_n} \qquad 0 < \zeta < 1 \tag{7-104}$$

De esta discusión, se llega a las siguientes conclusiones sobre el tiempo de levantamiento y el tiempo de retardo de sistemas prototipo de segundo orden:

- ▲ t_r y t_d son proporcionales a ζ, e inversamente proporcionales a ω_n.
- ▲ Al incrementar (disminuir) la frecuencia natural no amortiguada ω_n reducirá (aumentará) t_r y t_d.

7-5-5 Tiempo de asentamiento

En la Fig. 7-13 se puede observar que cuando $0 < \zeta < 0.69$, la respuesta escalón unitario tiene un sobrepaso máximo mayor al 5%, y la respuesta puede entrar a la banda entre 0.95 y 1.05 para el último tiempo ya sea desde lo alto o el fondo. Cuando ζ es mayor a 0.69, el sobrepaso es menor al 5%, y la respuesta puede entrar en la banda entre 0.95 y 1.05 solamente desde el fondo. Las Figs. 7-22(a) y (b) muestran estas dos diferentes situaciones. Por lo que el tiempo de asentamiento tiene una discontinuidad en $\zeta = 0.69$.

Es difícil obtener la descripción analítica exacta para el tiempo de asentamiento t_s Se puede llegar a una aproximación para t_s para $0 < \zeta < 0.69$ al usar el trazo de la senoidal amortiguada de $y(t)$, como se muestra en la Fig. 7-22(a). Cuando el tiempo de establecimiento corresponde a una intersección con el trazo superior de $y(t)$, se obtiene la siguiente relación:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_s} = 1.05 \tag{7-105}$$

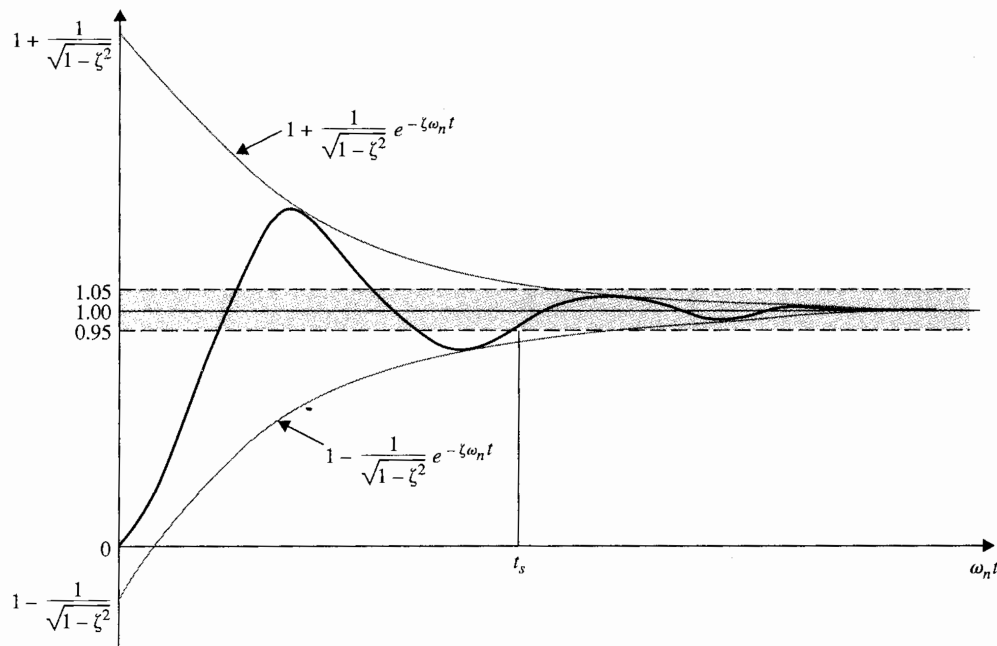
Cuando el tiempo de asentamiento corresponde a una intersección del trazo inferior de $y(t)$, t_s debe satisfacer la siguiente condición:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_s} = 0.95 \tag{7-106}$$

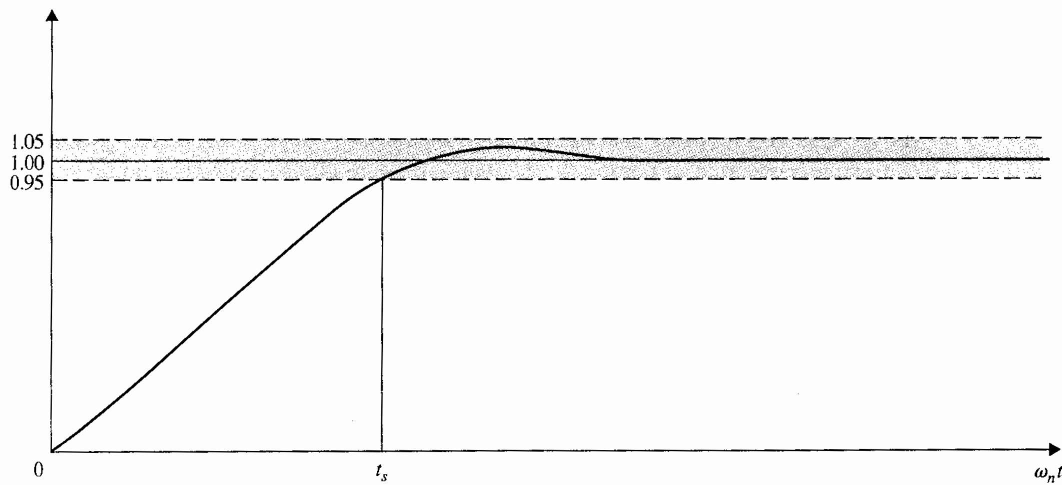
Aparentemente se obtiene el mismo resultado utilizando ya sea la ecuación (7-105) o la ecuación (7-106).

Resolviendo la ecuación (7-105) para $\omega_n t_s$ se tiene:

$$\omega_n t_s = -\frac{1}{\zeta} \ln(0.05 \sqrt{1 - \zeta^2}) \tag{7-107}$$



(a) $0 < \zeta < 0.69$



(b) $\zeta > 0.69$

Figura 7-22 Tiempo de asentamiento de la respuesta al escalón unitario.

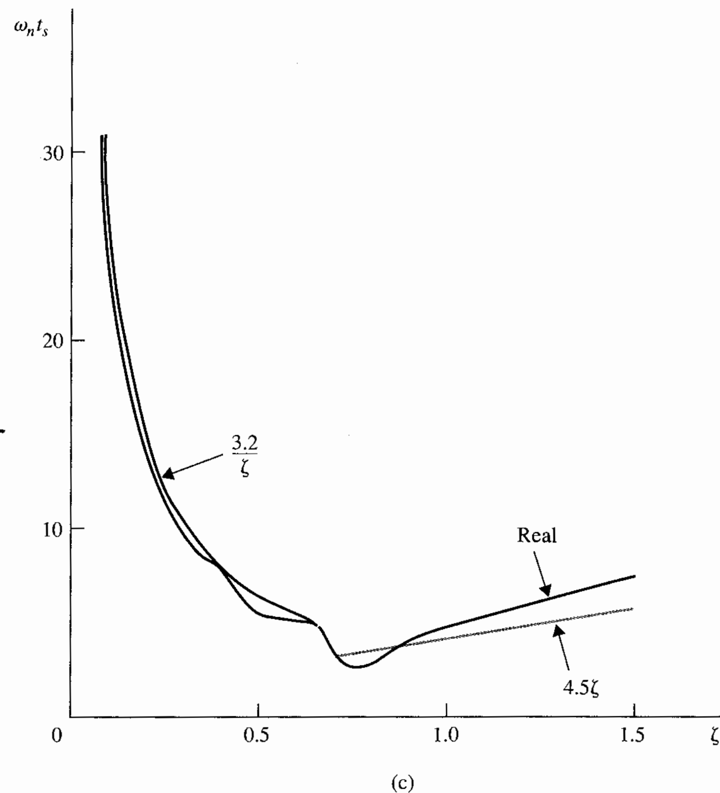


Figura 7-22 *Continuación.*

El semiplano derecho de la ecuación (7-107) varía entre 3.0 y 3.32 cuando ζ varía de 0 a 0.69. Se puede aproximar el tiempo de asentamiento para el sistema prototipo de segundo orden como:

$$t_s \cong \frac{3.2}{\zeta\omega_n} \qquad 0 < \zeta < 0.69 \tag{7-108}$$

Será una aproximación pobre para los valores pequeños de ζ (<0.3).

Cuando el factor de amortiguamiento relativo ζ es mayor a 0.69, la respuesta al escalón unitario siempre entrará a la banda entre 0.95 y 1.05 desde abajo. Observando las respuestas en la Fig. 7-13 se puede mostrar que el valor de $\omega_n t_s$ es casi directamente proporcional a ζ. La siguiente aproximación se utiliza para t_s para $\zeta > 0.69$.

$$t_s = \frac{4.5\zeta}{\omega_n} \qquad \zeta > 0.69 \tag{7-109}$$

La Fig. 7-22(c) muestra los valores reales de $\omega_n t_s$ *versus* ζ, para el sistema prototipo de segundo orden descrito en la ecuación (7-83), junto con las aproximaciones utilizando las ecuaciones (7-108) y (7-109) para sus intervalos efectivos, respectivamente. Los valores numéricos se muestran en la tabla 7-2. Los valores reales del tiempo de asentamiento normalizado, $\omega_n t_s$ se calculan utilizando la función **svdesign** de las herramientas de **CSAD.** La opción **Attributes** (**Atributos**) calcula el tiempo de levantamiento, tiempo de retardo, tiempo de asentamiento, sobrepaso máximo y $t_{\text{máx}}$ de la respuesta al escalón.

Se puede resumir que las relaciones entre t_s y los parámetros del sistema son como sigue:

- ▲ Para $\zeta < 0.69$, el tiempo de asentamiento es inversamente proporcional a ζ y ω_n. Una forma práctica de reducirlo es incrementando ω_n mientras ζ se mantiene constante. Aun cuando la respuesta será más oscilatoria, el sobrepaso máximo depende solamente de ζ y puede controlarse independientemente.
- ▲ Para $\zeta > 0.69$, el tiempo de asentamiento es proporcional a ζ e inversamente proporcional a ω_n. Nuevamente, t_s puede reducirse incrementando ω_n.

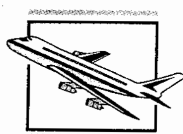
Tabla 7-2 Comparación de tiempos de asentamiento de sistemas de segundo orden prototipos, $\omega_n t_s$

ζ	Real	$\frac{3.2}{\zeta}$	4.5ζ
0.10	28.7	30.2	
0.20	13.7	16.0	
0.30	10.0	10.7	
0.40	7.5	8.0	
0.50	5.2	6.4	
0.60	5.2	5.3	
0.62	5.16	5.16	
0.64	5.00	5.00	
0.65	5.03	4.92	
0.68	4.71	4.71	
0.69	4.35	4.64	
0.70	2.86		3.15
0.80	3.33		3.60
0.90	4.00		4.05
1.00	4.73		4.50
1.10	5.50		4.95
1.20	6.21		5.40
1.50	8.20		6.75

Debe puntualizarse que el tiempo de asentamiento para $\zeta > 0.69$ es una medida de qué tan rápidamente la respuesta al escalón alcanza su valor final. Parece que para este caso, los tiempos de retardo y levantamiento deberían ser adecuados para describir el comportamiento de la respuesta. Como su nombre lo dice, el tiempo de asentamiento debería usarse para medir que tan rápido la respuesta al escalón llega a su valor final.

Mantenga en mente que mientras las definiciones $y_{máx}$, $t_{máx}$, t_d, t_r y t_s, aplican a un sistema de cualquier orden, el factor de amortiguamiento relativo ζ y la frecuencia natural no amortiguada ω_n se aplican estricta y solamente a un sistema de segundo orden cuya función de transferencia en lazo cerrado se da en la ecuación (7-83). Naturalmente, las relaciones entre t_d, t_r y t_s y ζ y ω_n son válidas únicamente para el mismo modelo de sistema de segundo orden. Sin embargo, estas relaciones pueden usarse para medir el desempeño de sistemas de mayor orden que puedan aproximarse mediante los de segundo orden, bajo situaciones en los que algunos de los polos de mayor orden puedan despreciarse.

7-6 Análisis en el dominio del tiempo de un sistema de control de posición



▲ El sobrepaso máximo del sistema prototipo de segundo orden depende solo de ζ.

En esta sección se analiza el desempeño de un sistema utilizando el criterio de dominio en el tiempo que se estableció en la Sec. 7-5. El propósito del sistema de control de referencia es controlar la posición de los controles de las alas de un aeronave moderna. Debido a los requerimientos de respuesta mejorada y confiabilidad, las superficies de control de un aeronave moderna son controladas mediante mandos eléctricos con controles electrónicos. Viejos días cuando los alerones, el timón y los elevadores de la aeronave estaban todos unidos al control del piloto a través de elementos mecánicos. El tan llamado sistema de control de "vuelo por cable" utilizado en el control de la aviación moderna implica que el control de posición de la aeronave ya no está controlado enteramente por elementos mecánicos. La Fig. 7-23 ilustra las superficies controladas y el diagrama de bloque de uno de los ejes del sistema de control de posición. La Fig. 7-24 muestra el diagrama de bloque analítico del sistema utilizando el modelo del amplificador/motor dc, dado en la Fig. 4-51. El sistema está simplificado hasta el extremo de despreciar todas las especificaciones de la saturación de la ganancia del amplificador y del par del motor, el engrane trasero y de la barra de transmisión. (¡Como estudiantes, ustedes muchachos y muchachas en verdad la tienen hecha! Cuando se enfrenten al mundo real, algunas de estas no linealidades tendrán que ser consideradas para que las cosas trabajen.)

El objetivo del sistema es tener la salida del sistema, $\theta_y(t)$, seguida de la entrada $\theta_r(t)$. Los siguientes parámetros del sistema se dan inicialmente:

▲ Ganancia o codificador	$K_s = 1$ V/rad
▲ Ganancia o preamplificador	K = variable
▲ Ganancia del amplificador de poder	$K_1 = 10$ V/V
▲ Ganancia de la corriente de la realimentación	$K_2 = 0.5$ V/A
▲ Ganancia de la realimentación del tacómetro	$K_t = 0$ V/rad/s
▲ Resistencia de la armadura del motor	$R_a = 5.0\ \Omega$
▲ Inductancia de la armadura del motor	$L_a = 0.003$ H

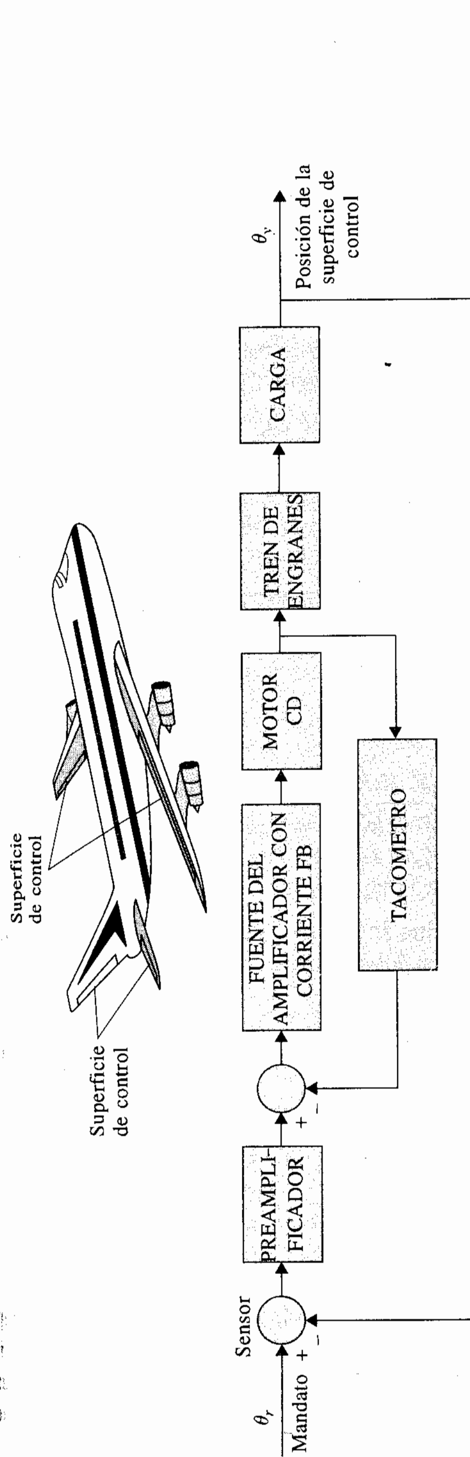


Figura 7-23 Diagrama de bloques de un sistema de control de posición de una aeronave.

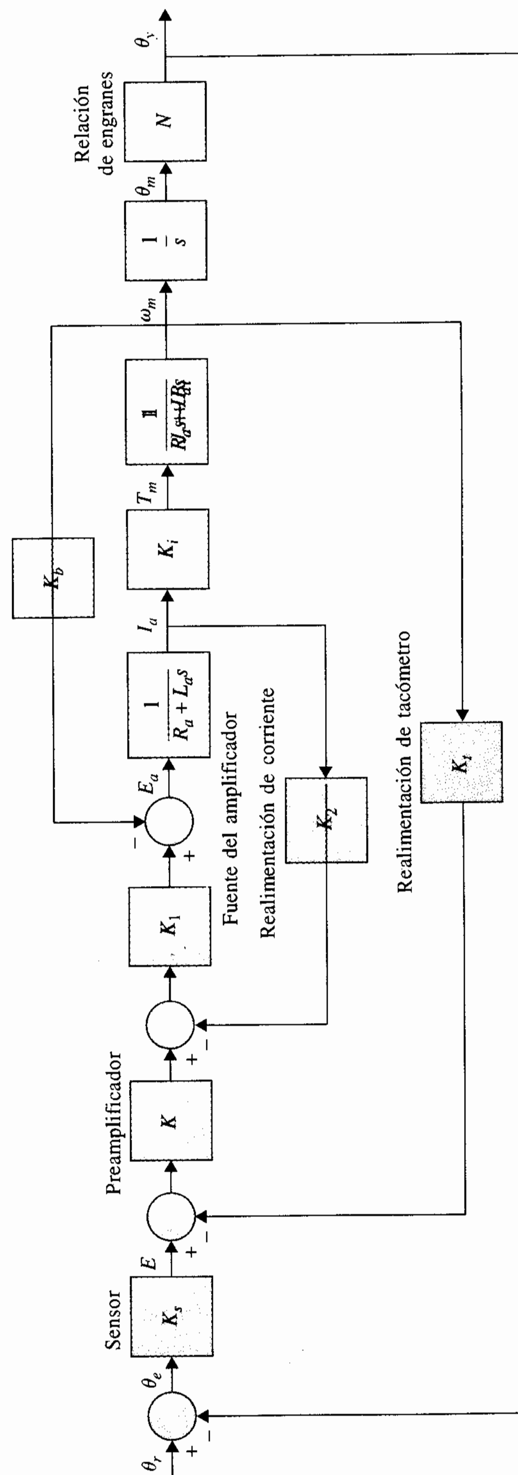


Figura 7-24 Diagrama de bloques de la función de transferencia del sistema que se muestra en la Figura 7-23.

▲ Constante del par del motor	K_i = 9.0 oz-pulg/A
▲ Constante del motor trasero-fem*	K_b = 0.0636 V/rad/s
▲ Inercia del rotor del motor	J_m = 0.0001 oz-pulg-s^2
▲ Inercia de la carga	J_L = 0.01 oz-pulg-s^2
▲ Coeficiente de la fricción viscosa del motor	B_m = 0.005 oz-pulg-s
▲ Coeficiente de la fricción viscosa de la carga	B_L = 1.0 oz-pulg-s
▲ Radio del tren de engranaje entre el motor y la carga	$N = \theta_y/\theta_m = 1/10$

*fem = fuerza electromotriz.

Ya que el eje del motor se acopla a la carga a través de un tren de engranaje con un radio de engranaje de N, $\theta_y = N\theta_m$, la inercia total y el coeficiente de fricción viscosa captadas por el motor son:

$$J_t = J_m + N^2 J_L = 0.0001 + 0.01/100 = 0.0002 \text{ oz-pulg-s}^2 \quad (7\text{-}110)$$

$$B_t = B_m + N^2 B_L = 0.005 + 1/100 = 0.015 \text{ oz-pulg-s} \quad (7\text{-}111)$$

respectivamente. La función de transferencia de trayectoria directa del sistema de realimentación unitaria se escribe de la Fig. 7-24, aplicando la fórmula de ganancia de la SFG:

$$G(s) = \frac{\Theta_y(s)}{\Theta_e(s)}$$

$$= \frac{K_s K_1 K_i K N}{s[L_a J_t s^2 + (R_a J_t + L_a B_t + K_1 K_2 J_t)s + R_a B_t + K_1 K_2 B_t + K_i K_b + K K_1 K_i K_i]} \quad (7\text{-}112)$$

El sistema es de tercer orden, puesto que el término de mayor orden en $G(s)$ es s^3. La constante en tiempo eléctrica del motor del amplificador del sistema es:

$$\tau_a = \frac{L_a}{R_a + K_1 K_2} = \frac{0.003}{5 + 5} = 0.0003 \text{ s} \quad (7\text{-}113)$$

La constante en tiempo mecánica del motor de carga del sistema es:

$$\tau_t = \frac{J_t}{B_t} = \frac{0.0002}{0.015} = 0.01333 \text{ s} \quad (7\text{-}114)$$

Ya que la constante en tiempo eléctrica es mucho más pequeña que la constante en tiempo mecánica debido a la baja inductancia del motor, se puede realizar una aproximación inicial discriminando la inductancia de la armadura L_a. El resultado es una aproximación de segundo orden del sistema de tercer orden. Posteriormente se mostrará que ésta no es la mejor

forma de aproximar un sistema de mayor orden mediante un sistema de menor orden. La función de transferencia de trayectoria directa es ahora:

$$G(s) = \frac{K_s K_1 K_i K N}{s[(R_a J_t + K_1 K_2 J_t)s + R_a B_t + K_1 K_2 B_t + K_i K_b + K K_1 K_i K_t]}$$
$$= \frac{K_s K_1 K_i K N/(R_a J_t + K_1 K_2 J_t)}{s[s + (R_a B_t + K_1 K_2 B_t + K_i K_b + K K_1 K_i K_t)/(R_a J_t + K_1 K_2 J_t)]} \quad (7\text{-}115)$$

Substituyendo los parámetros del sistema en la ecuación (7-115), se obtiene:

$$G(s) = \frac{4500K}{s(s + 361.2)} \quad (7\text{-}116)$$

Comparando las ecuaciones (7-115) y la (7-116) con la función de transferencia del prototipo de segundo orden de la ecuación (7-82), se tiene:

$$\text{frecuencia natural no amortiguada } \omega_n = \pm\sqrt{\frac{K_s K_1 K_i K N}{R_a J_t + K_1 K_2 J_t}} = \pm\sqrt{4500K} \quad \text{rad/s} \quad (7\text{-}117)$$

$$\text{factor de amortiguamiento } \zeta = \frac{R_a B_t + K_1 K_2 B_t + K_i K_b + K K_1 K_i K_t}{2\sqrt{K_s K_1 K_i K N (R_a J_t + K_1 K_2 J_t)}} = \frac{2.692}{\sqrt{K}} \quad (7\text{-}118)$$

Por lo que se observa que la frecuencia natural no amortiguada ω_n es proporcional a la raíz cuadrada de la ganancia del amplificador K, mientras que el factor de amortiguamiento de ζ es inversamente proporcional a $\sqrt{K}$.

La ecuación característica del sistema de control de realimentación unitaria es:

$$s^2 + 361.2s + 4500K = 0 \quad (7\text{-}119)$$

7-6-1 Respuesta transitoria al escalón unitario

Para el análisis del dominio en el tiempo, es informativo analizar el desempeño del sistema mediante la aplicación de la entrada escalón unitario con condiciones iniciales cero. En esta forma es posible caracterizar el desempeño del sistema en términos de sobrepaso máximo y algunos de otras medidas, tales como tiempo de levantamiento, tiempo de retardo, tiempo de asentamiento, si es necesario.

Asúmase que la entrada de referencia sea una función escalón unitario $\theta_r(t) = u_s(t)$ rad; entonces $\Theta(s) = 1/s$. La salida del sistema, con condiciones iniciales a cero, es:

$$\theta_y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4500K}{s(s^2 + 361.2s + 4500K)}\right] \quad (7\text{-}120)$$

La transformada inversa de Laplace del segundo miembro de la ecuación (7-120) se efectúa utilizando la tabla de la transformada de Laplace en el Apéndice B, o utilizando la ecuación (7-86), directamente. Cuando se conoce el valor de K, puede utilizarse la función **pfe** de las herramientas de **CSAD** para llevar a cabo la transformada inversa de Laplace. Los siguientes resultados se obtienen para los tres valores de K indicados usando **pfe** de **CSAD.**

$$K = 7.248\ (\zeta = 1.0): \quad \theta_y(t) = (1 - 151e^{-180t} + 150e^{-180.2t})u_s(t) \tag{7-121}$$

$$K = 14.5\ (\zeta = 0.707): \quad \theta_y(t) = (1 - e^{-180.6t}\cos 180.6t - 0.9997e^{-180.6t}\,\text{sen}\ 180.6tu_s(t) \tag{7-122}$$

$$K = 181.17\ (\zeta = 0.2): \quad \theta_y(t) = (1 - e^{-180.6t}\cos 884.7t - 0.2041e^{-180.6t}\,\text{sen}\ 884.7t)u_s(t) \tag{7-123}$$

Las tres respuestas se grafican como se muestra en la Fig. 7-25. La tabla 7-3 permite comparar las características de las tres respuestas al escalón unitario para los tres valores que se utilizan de K. Cuando K = 181.17, ζ = 0.2, el sistema está ligeramente amortiguado, y el sobrepaso máximo es 52.7%, el cual es excesivo. Cuando el valor de K se establece en 7.248, ζ = 1.0, y el sistema está en amortiguamiento crítico. La respuesta al escalón unitario no tiene ningún sobrepaso u oscilación. Cuando K se establece en 14.5, la relación de amortiguamiento es 0.707 y el porcentaje de sobrepaso es 4.3%.

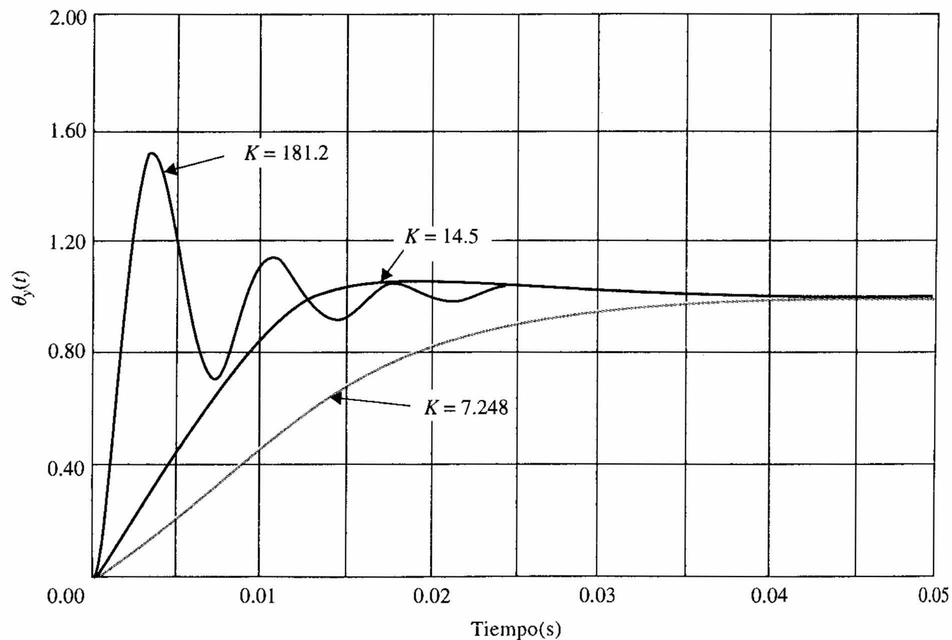


Figura 7-25 Respuestas al escalón unitario del sistema de control de posición en la figura 7-24; $L_a = 0$.

Tabla 7-3 Comparación del desempeño del sistema de control de posición de segundo orden con el valor K

Ganancia K	ζ	ω_n (rad/s)	Máximo sobrepaso (%)	t_d (s)	t_r (s)	t_s (s)	$t_{máx}$ (s)
7.25	1.000	180.62	0	0.00929	0.0186	0.0259	—
14.50	0.707	255.44	4.3	0.00560	0.0084	0.0114	0.01735
181.20	0.200	903.00	52.2	0.00125	0.00136	0.0150	0.00369

Debe señalarse que en la práctica se consume tiempo, aun con la ayuda de una computadora, al calcular el tiempo de respuesta por cada parámetro del sistema que cambie, ya sea con propósitos de análisis o de diseño. Indudablemente, uno de los objetivos principales del estudio de la teoría de los sistemas de control usando ya sea el enfoque convencional o el enfoque moderno, es establecer métodos para que la dependencia en las simulaciones en computadora pueda reducirse. La motivación detrás de esta discusión es mostrar que el desempeño de algunos sistemas de control puede predecirse investigando las raíces de la ecuación característica del sistema. Para la ecuación característica de la ecuación (7-119), las raíces son:

$$s_1 = -180.6 + \sqrt{32{,}616 - 4500K} \qquad (7\text{-}124)$$

$$s_2 = -180.6 - \sqrt{32{,}616 - 4500K} \qquad (7\text{-}125)$$

Para $K = 7.248$, 14.5 y 181.2, las raíces de la ecuación característica se calculan como sigue:

$K = 7.248$: $s_1 = s_2 = -180.6$

$K = 14.5$: $s_1 = -180.6 + j180.6$ $s_2 = -180.6 - j180.6$

$K = 181.2$: $s_1 = -180.6 + j884.7$ $s_2 = -180.6 + j884.7$

Estas raíces se marcan como se muestra en la Fig. 7-26. Las trayectorias de las dos raíces de la ecuación característica cuando K varía continuamente desde $-\infty$ a ∞, también se muestran en la Fig. 7-26. Estas trayectorias de las raíces se conocen como el **lugar geométrico de las raíces** (véase el Cap. 8) de la ecuación (7-119) y se usan ampliamente para el análisis y diseño de sistemas de control lineal.

En las ecuaciones (7-124) y (7-125) se puede observar que las dos raíces son reales y negativas para valores de K entre 0 y 7.248. Esto significa que el sistema está sobreamortiguado, y la respuesta al escalón no tendrá sobrepaso para este intervalo de K. Para los valores de K mayores a 7.248, la frecuencia natural no amortiguada se incrementará con $\sqrt{K}$. Cuando K es negativa, una de las raíces es positiva, lo que corresponde a un incremento de la respuesta en el tiempo, y el sistema es inestable. Las características dinámicas de la respuesta transitoria al escalón como se determinan por el lugar geométrico de las raíces de la Fig. 7-26 y se sumarizan como sigue:

Ganancia del amplificador	Raíces de la ecuación característica	Dinámicas del sistema
$0 < K < 7.248$	Dos raíces distintas negativas reales	Sobreamortiguamiento ($\zeta > 1$)
$K = 7.248$	Dos raíces iguales negativas reales	Críticamente amortiguado ($\zeta = 1$)
$7.248 < K < \infty$	Dos raíces de conjugación compleja con partes reales negativas	Amortiguamiento negativo ($\zeta < 1$)
$-\infty < K < 0$	Dos raíces reales distintas, una positiva y una negativa	Sistema inestable ($\zeta < 0$)

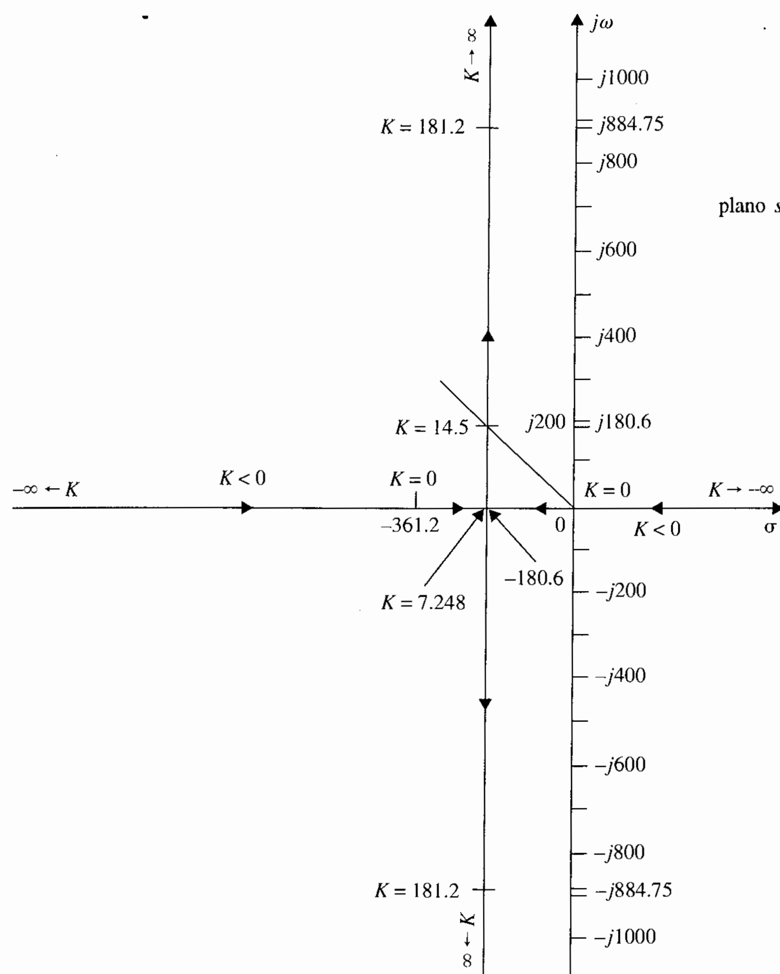


Figura 7-26 El lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica en la ecuación (7-119) cuando K varía.

7-6-2 Respuesta en estado estable

Debido a que la función de transferencia de trayectoria directa en la ecuación (7-116) tiene un polo simple en $s = 0$, el sistema es de tipo 1. Esto significa que el error de estado estable del sistema es cero para todos los valores positivos de K cuando la entrada es una función de escalón. Sustituyendo la ecuación (7-116) en la ecuación (7-22), la constante del error de escalón se obtiene como sigue:

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{4500K}{s(s + 361.2)} = \infty \tag{7-126}$$

Por lo que el error de estado estable del sistema debido a la entrada de escalón, como en la ecuación (7-23), es cero. Las respuestas al escalón unitario en la Fig. 7-25 verifican este resultado. La condición de estado estable cero se alcanza ya que solamente la fricción viscosa se considera en el modelo del sistema simplificado. En el caso práctico, La fricción de Coulomb está casi siempre presente, por lo que la exactitud de la posición del estado estable del sistema nunca puede ser perfecta.

7-6-3 Respuesta en el tiempo a una entrada rampa unitaria

El control de la posición puede a menudo llevarse a cabo mediante el control del perfil de la salida en vez de solamente aplicar una entrada de escalón. En otras palabras, el sistema puede diseñarse para seguir un perfil de referencia que representa la trayectoria deseada. Puede ser necesario investigar la capacidad del sistema de control de la posición para seguir una entrada de función rampa.

Para una entrada de rampa unitaria, $\theta_r(t) = tu_s(t)$. La respuesta de la salida del sistema en la Fig. 7-24 es:

$$\theta_y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4500K}{s^2(s^2 + 361.2s + 4500K)}\right] \tag{7-127}$$

que puede resolverse utilizando la tabla de la transformada de Laplace en el Apéndice B. El resultado es:

$$\theta_y(t) = \left[t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\text{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \theta)\right]u_s(t) \tag{7-128}$$

en donde:

$$\theta = \cos^{-1}(2\zeta^2 - 1) \qquad (\zeta < 1) \tag{7-129}$$

Los valores de ζ y ω_n se mencionan en las ecuaciones (7-118) y (7-117), respectivamente. La salida $\theta_y(t)$ puede obtenerse aplicando la función **pfe** de las herramientas de **CSAD** a la ecuación

(7-127) si se conocen todos los parámetros del sistema. Las respuestas rampa del sistema para los tres valores de K se obtienen con **pfe** de **CSAD** y se presentan a continuación.

$$K = 7.248: \quad \theta_y(t) = (t - 0.01107 - 0.8278e^{-181.2t} + 0.8389e^{-180t})u_s(t) \tag{7-130}$$

$$K = 14.5: \quad \theta_y(t) = (t - 0.005536 + 0.005536e^{-180.6t}\cos 180.6t - 5.467 \times 10^{-7}e^{-180.6t}\,\text{sen}\,180.6t)u_s(t) \tag{7-131}$$

$$K = 181.2: \quad \theta_y(t) = (t - 0.000443 + 0.000443e^{-180.6t}\cos 884.7t - 0.00104e^{-180.6t}\,\text{sen}\,884.7t)u_s(t) \tag{7-132}$$

Estas respuestas rampa se grafican como se muestra en la Fig. 7-27. Nótese que el error de estado estable de la respuesta rampa no es cero. El último término en la ecuación (7-128) es la respuesta transitoria. La porción del estado estable de la respuesta a rampa unitaria es:

$$\lim_{t\to\infty} \theta_y(t) = \lim_{t\to\infty}\left[\left(t - \frac{2\zeta}{\omega_n}\right)u_s(t)\right] \tag{7-133}$$

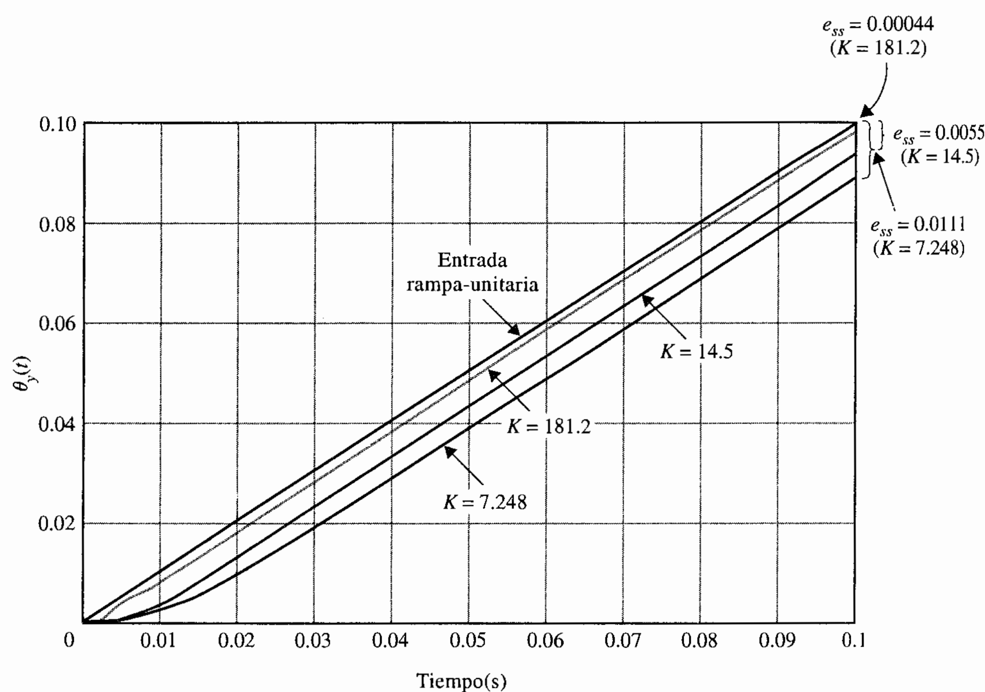


Figura 7-27 Respuestas a rampa unitaria del sistema de control de posición en la Fig. 7-24; $L_a = 0$.

Por lo tanto, el error de estado estable del sistema debido a la entrada rampa unitaria es:

$$e_{ss} = \frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{0.0803}{K} \tag{7-134}$$

que es una constante.

Un método más directo de determinar el error de estado estable debido a una entrada rampa es utilizar la constante de error rampa K_v. De la ecuación (7-27),

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} \frac{4500K}{s + 361.2} = 12.46K \tag{7-135}$$

Por lo que el error de estado estable es:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{0.0803}{K} \tag{7-136}$$

que concuerda con el resultado en la ecuación (7-134).

El resultado en la ecuación (7-136) muestra que el error de estado estable es inversamente proporcional a K. Para $K = 14.5$, que corresponde a una relación de amortiguamiento de 0.707, el error de estado estable es 0.0055 rad, o más aproximadamente, 0.55% de la magnitud de la entrada rampa. Aparentemente, si se intenta mejorar la exactitud del estado estable del sistema debido a las entradas rampa mediante el incremento del valor de K, la respuesta transitoria al escalón será más oscilatoria y con un sobrepaso mayor. Este fenómeno más bien es típico en todos los sistemas de control. Para sistemas de orden superior, si la ganancia del lazo del sistema es mucho mayor, el sistema se vuelve inestable. Esto se basa en el fundamento para utilizar el controlador en el lazo del sistema para que la transitoria el error de estado estable puedan mejorarse de forma simultánea.

7-6-4 Respuesta de un sistema de tercer orden

▲ Todos los sistemas de segundo orden con coeficientes positivos en las ecuaciones características son estables.

En la sección anterior, se ha demostrado que el sistema prototipo de segundo orden, obtenido despreciando la inductancia de armadura, siempre es estable para todos los valores positivos de K. No es difícil probar que, en general, todos los sistemas de segundo orden con coeficientes positivos en las ecuaciones características son estables.

Investíguese el desempeño del sistema de control de posición considerando la inductancia de la armadura $L_a = 0.003$ H. La función de transferencia de trayectoria directa de la ecuación (7-112) se convierte en:

$$G(s) = \frac{1.5 \times 10^7 K}{s(s^2 + 3408.3s + 1{,}204{,}000)}$$
$$= \frac{1.5 \times 10^7 K}{s(s + 400.26)(s + 3008)} \tag{7-137}$$

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{\Theta_y(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{1.5 \times 10^7 K}{s^3 + 3408.3s^2 + 1{,}204{,}000s + 1.5 \times 10^7 K} \tag{7-138}$$

El sistema es ahora de tercer orden, y la ecuación característica es:

$$s^3 + 3408.3s^2 + 1{,}204{,}000s + 1.5 \times 10^7 K = 0 \tag{7-139}$$

Respuesta transitoria

Las raíces de la ecuación característica se tabulan para los tres valores de K usados anteriormente para el sistema de segundo orden:

▲ $K = 7.248$:	$s_1 = -156.21$	$s_2 = -230.33$	$s_3 = -3021.8$
▲ $K = 14.5$:	$s_1 = -186.53 + j192$	$s_2 = -186.53 - j192$	$s_3 = -3035.2$
▲ $K = 181.2$:	$s_1 = -57.49 + j906.6$	$s_2 = -57.49 - j906.6$	$s_3 = -3293.3$

Comparando estos resultados con aquellos aproximados del sistema de segundo orden, se observa que cuando $K = 7.428$, el sistema de segundo orden es criticamente amortiguado, mientras que el sistema de tercer orden tiene tres raíces reales distintas, y el sistema está ligeramente sobreamortiguado. La raíz en −3021.8 corresponde a una constante de tiempo de 0.33 milisegundos, que es 13 veces más rápido que la siguiente constante de tiempo más rápida, debido al polo en −230.33 Por lo que la respuesta transitoria debido al polo en −3021.8 decae rápidamente, y el polo puede despreciarse desde el punto de vista transitorio. La respuesta de salida transitoria está dominada por las dos raíces en −156.21 y −230.33. Este análisis se verifica escribiendo la respuesta a la transformada de la salida como:

$$\Theta_y(s) = \frac{10.87 \times 10^7}{s(s + 156.21)(s + 230.33)(s + 3021.8)} \tag{7-140}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de la ecuación (7-140), se tiene:

$$\theta_y(t) = (1 - 3.28e^{-156.21t} + 2.28e^{-230.33t} - 0.0045e^{-3021.8t})u_s(t) \tag{7-141}$$

▲ Las raíces dominantes de un sistema son las raíces que están más cercanas al eje $j\omega$ en el semiplano izquierdo del plano s.

El último término en la ecuación (7-141), que es debido a la raíz en −3021.8, decae a cero muy rápido. Aún más, la magnitud del término en $t = 0$ es muy pequeña comparada con los otros dos términos transitorios. Esto simplemente demuestra que, en general, la contribución de las raíces que caen relativamente lejos a la izquierda del plano s a la respuesta transitoria será pequeña. Las raíces que están más cercanas al eje imaginario dominará la respuesta transitoria, y éstas están definidas como **raíces dominantes** de la ecuación característica, o del sistema.

Cuando K = 14.5, el sistema de segundo orden tiene un factor de amortiguamiento relativo de 0.707, ya que las partes real e imaginaria de las dos raíces de la ecuación característica son idénticas. Para el sistema de tercer orden, debe recordarse que el factor de amortiguamiento relativo no está estrictamente definido. Sin embargo, ya que el efecto en el transitorio de la raíz en –3021.8 es insignificante, las dos raíces que dominan la respuesta transitoria corresponden al factor de amortiguamiento relativo de 0.697. Por lo que K = 14.5, la aproximación de segundo orden mediante el establecimiento de L_a a cero no es una mala alternativa. Debe hacerse notar, sin embargo, que *justo porque la aproximación de segundo orden está justificada por K = 14.5 no significa que la aproximación sea válida para todos los valores de K.*

Cuando K = 181.2, las dos raíces complejas conjugadas del sistema de tercer orden nuevamente dominan la respuesta transitoria, y el factor de amortiguamiento relativo equivalente debido a las dos raíces, es solamente de 0.0633, que es mucho más pequeña que el valor de 0.2 para el sistema de segundo orden. Por lo que se verá que la justificación y exactitud de la aproximación de segundo orden disminuye cuando el valor de K se incrementa. La Fig. 7-28 ilustra el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica de tercer orden de la ecuación (7-139), cuando K varía. Cuando K = 181.2, la raíz real en –3293.3 aún contribuye poco a la respuesta transitoria, pero las dos raíces complejas conjugadas en –57.49 ± j906.6 están mucho más cercanas al eje $j\omega$ que aquellas del sistema de segundo orden para la misma K, que están en –180.6 ± j884.75. Esto explica por qué el sistema de tercer orden es mucho menos estable que el de segundo orden cuando K = 181.2.

Utilizando el criterio de Routh-Hurwitz, el valor marginal de K para estabilidad se encuentra en 273.57. Con este valor crítico de K, la función de transferencia en lazo cerrado se convierte en:

$$\frac{\Theta_y(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{1.0872 \times 10^8}{(s + 3408.3)(s^2 + 1.204 \times 10^6)} \qquad (7\text{-}142)$$

Las raíces de la ecuación característica están en s = –3408.3, $-j$1097.3 y j1097.3. Estos puntos se muestran en las posiciones de la raíz de la Fig. 7-28.

La respuesta al escalón unitario del sistema cuando K = 273.57 es:

$$\theta_y(t) = [1 - 0.094e^{-3408.3t} - 0.952\,\mathrm{sen}(1097.3t + 72.16^0)]u_s(t) \qquad (7\text{-}143)$$

La respuesta de estado estable es una senoidal no amortiguada con una frecuencia de 1097.3 rad/s, y se dice que el sistema es marginalmente estable. Cuando K es mayor a 273.57, las dos raíces complejas conjugadas tendrán partes reales positivas, los componentes senoidales de la respuesta en el tiempo se incrementarán con el tiempo, y el sistema es inestable. Por lo que se ha observado, *el sistema de tercer orden es capaz de ser inestable, mientras que el sistema de segundo orden obtenido con* L_a *es estable para todos los valores finitos positivos de K.*

La Fig. 7-29 muestra las respuestas al escalón unitario del sistema de tercer orden para los tres valores usados de K. Las respuestas para K = 7.248 y K = 14.5 están muy cercanos a aquellos del sistema de segundo orden con los mismos valores de K, que se muestran en la Fig. 7-25. Sin embargo, las dos respuestas para K = 181.2 son bastante diferentes.

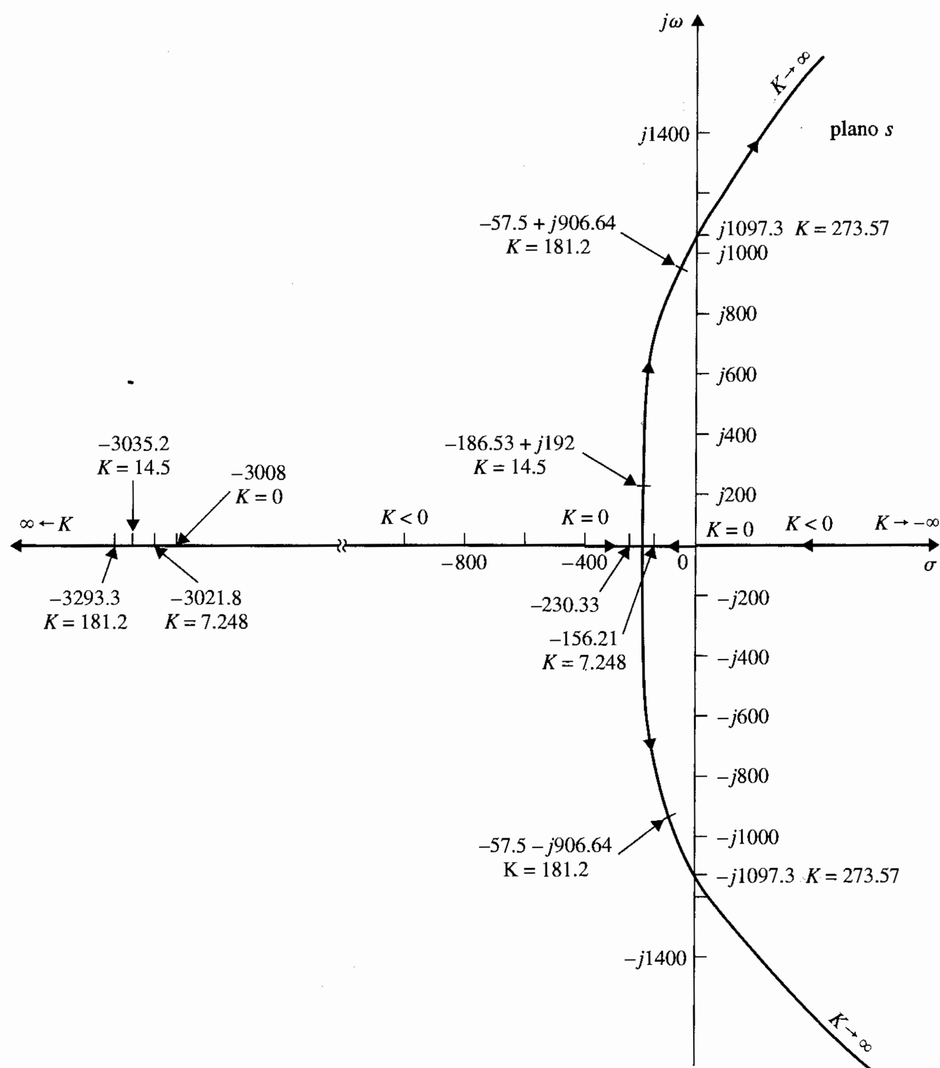


Figura 7-28 Lugar geométrico de las raíces del sistema de control de posición de tercer orden.

Respuesta al estado estable

De la ecuación (7-137) se observa que cuando se restaura la inductancia, el sistema de tercer orden es todavía de tipo 1. El valor de K_v es todavía el mismo que el dado en la ecuación (7-135). Por lo que la inductancia del motor no afecta el desempeño del estado estable del sistema, probando que el sistema es estable. Esto es de esperarse, ya que L_a afecta solamente

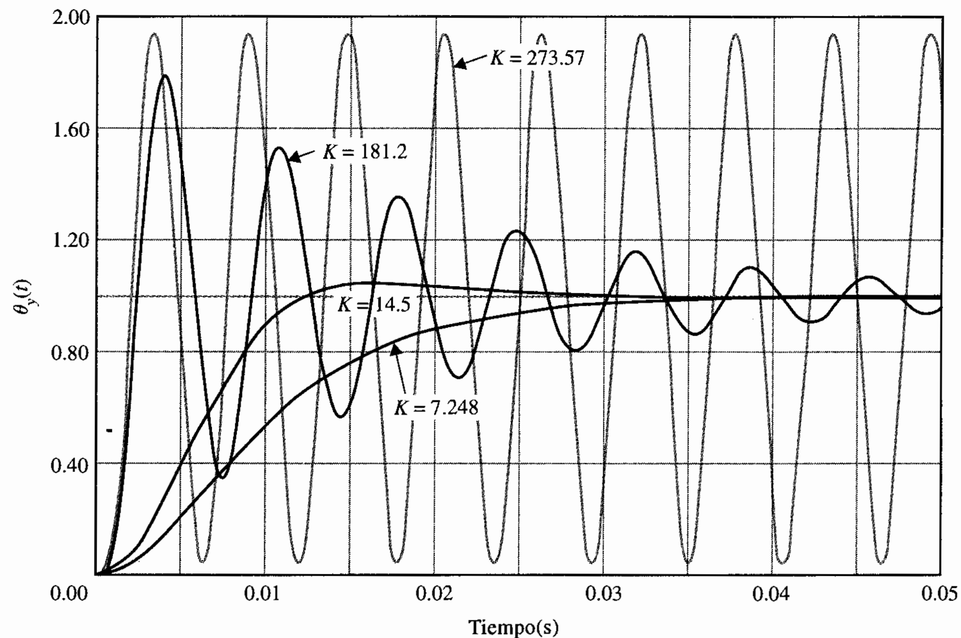


Figura 7-29 Respuestas al escalón unitario del sistema de control de posición de tercer orden.

la razón de cambio y no el valor final de la corriente del motor. *Un buen ingeniero debe siempre tratar de razonar e interpretar los resultados analíticos con el sistema físico.*

7-7 Efectos de añadir polos y ceros a las funciones de transferencia

El sistema de control de posición discutido en la Sec. 7-6 revela propiedades importantes de las respuestas en el tiempo de sistemas típicos de segundo y tercer orden en lazo cerrado. Específicamente, se demuestran los efectos en la respuesta transitoria relativa a la localización de las raíces de la ecuación característica. Sin embargo, en la práctica, el diseño exitoso de un sistema de control no puede depender solamente de la selección de valores de los parámetros del sistema, de tal forma que se coloquen apropiadamente las raíces de la ecuación característica. Se mostrará que *aún cuando las raíces de la ecuación característica, que son los polos de la función de transferencia en lazo cerrado, afectan la respuesta transitoria de sistemas de control lineales e invariantes con el tiempo, particularmente la estabilidad, los ceros de la función de transferencia, si existen algunos, son también importantes.* Por lo que la adición de polos y ceros y/o cancelación de polos indeseables y ceros de la función de transferencia, con frecuencia no son necesarios para alcanzar satisfactoriamente el desempeño en el dominio de tiempo de los sistemas de control. En esta sección se muestra que la

adición de polos y ceros a las funciones de transferencia de lazo y en lazo cerrado tiene efectos variantes en la respuesta transitoria de la respuesta transitoria del sistema en lazo cerrado.

7-7-1 Adición de un polo en la función de transferencia de la trayectoria directa: Sistemas con realimentación unitaria

Para el sistema de control de posición descrito en la Sec. 7-6, cuando se desprecia la inductancia del motor, el sistema es de segundo orden, y la función de transferencia de trayectoria directa es del prototipo dado en la ecuación (7-116). Cuando la inductancia del motor se considera, el sistema es dē tercer orden, y la función de transferencia de trayectoria directa es dada en la ecuación (7-137). Comparando las dos funciones de transferencia de las ecuaciones (7-116) y (7-137), se observa que el efecto de la inductancia del motor es equivalente a la adición de un polo en $s = -3008$ a la función de transferencia de trayectoria directa de la ecuación (7-116), cuando se cambia el polo en -361.2 a -400.26, y también se incrementa la constante proporcional. El efecto aparente de adicionar un polo a la función de transferencia de trayectoria directa, es que el sistema de tercer orden puede ahora convertirse en inestable si el valor de la ganancia del amplificador K excede 273.57. Como se muestra mediante el diagrama del lugar geométrico de las raíces de las Figs. 7-26 y 7-28, el nuevo polo de $G(s)$ en $s = -3008$ esencialmente "empuja" e "inclina" la la parte compleja del lugar geométrico de las raíces del sistema de segundo orden hacia el semiplano derecho del plano s. Realmente, debido al valor específico de la inductancia seleccionada, el polo adicional del sistema de tercer orden se encuentra lejos hacia la izquierda del polo en -400.26, de tal forma que su efecto es pequeño excepto cuando el valor de K es relativamente grande.

Para estudiar el efecto general de la adición de un polo, y su localización relativa hacia una función de transferencia de trayectoria directa de un sistema con realimentación unitaria, considere la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)(1 + T_p s)} \tag{7-144}$$

Se considera que el polo en $s = -1/T_p$ se adiciona a la función de transferencia prototipo de segundo orden. La función de transferencia en lazo cerrado se escribe:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\omega_n^2}{T_p s^3 + (1 + 2\zeta\omega_n T_p)s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{7-145}$$

La Fig. 7-30 ilustra las respuestas al escalón unitario del sistema en lazo cerrado cuando $\omega_n = 1$, $\zeta = 1$, y $T_p = 0, 1, 2,$ y 5. Estas respuestas nuevamente muestran que:

la adición de un polo a una función de transferencia de trayectoria directa tiene generalmente el efecto de incrementar el sobrepaso máximo del sistema en lazo cerrado.

Mientras el valor de T_p se incrementa, el polo en $-1/T_p$ se aproxima al origen en el plano s, ȳ el sobrepaso máximo aumenta. Estas respuestas también muestran que el *polo adiciona-*

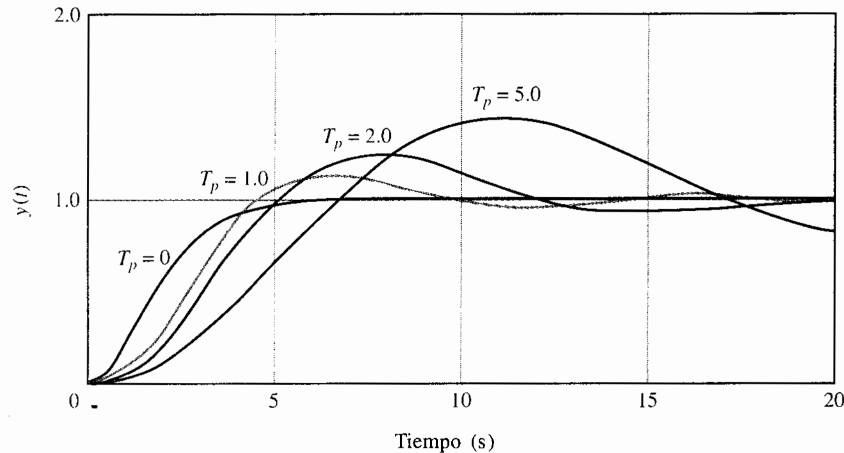


Figura 7-30 Respuestas al escalón unitario del sistema con la función de transferencia en lazo cerrado de la ecuación (7-145); $\zeta = 1$, $\omega_n = 1$, y $T_p = 0$, 1, 2, y 5.

do incrementa el tiempo de crecimiento de la respuesta al escalón. Esto no es sorprendente, ya que el *polo adicional tiene el efecto de reducir el ancho de banda (véase el Cap. 9) del sistema,* recortando los componentes de alta frecuencia de la señal transmitida a través del sistema.

La misma conclusión puede tenerse a partir de las respuestas al escalón unitario de la Fig. 7-31, que se obtienen con $\omega_n = 1$, $\zeta = 0.25$, y $T_p = 0$, 0.2, 0.667, y 1.0. En este caso, cuando T_p es mayor a 0.667, la amplitud de la respuesta al escalón unitario se incrementa con el tiempo, y el sistema es inestable.

7-7-2 Adición de un polo en la función de transferencia en lazo cerrado

Debido a que los polos de la función de transferencia en lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica, controlan directamente la respuesta transitoria del sistema. Considérese la función de transferencia en lazo cerrado:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(1 + T_p s)} \tag{7-146}$$

en donde el término $(1 + T_p s)$ se adiciona a una función de transferencia prototipo de segundo orden. La Fig. 7-32 ilustra la respuesta al escalón unitario del sistema con $\omega_n = 1$, $\zeta = 0.5$,

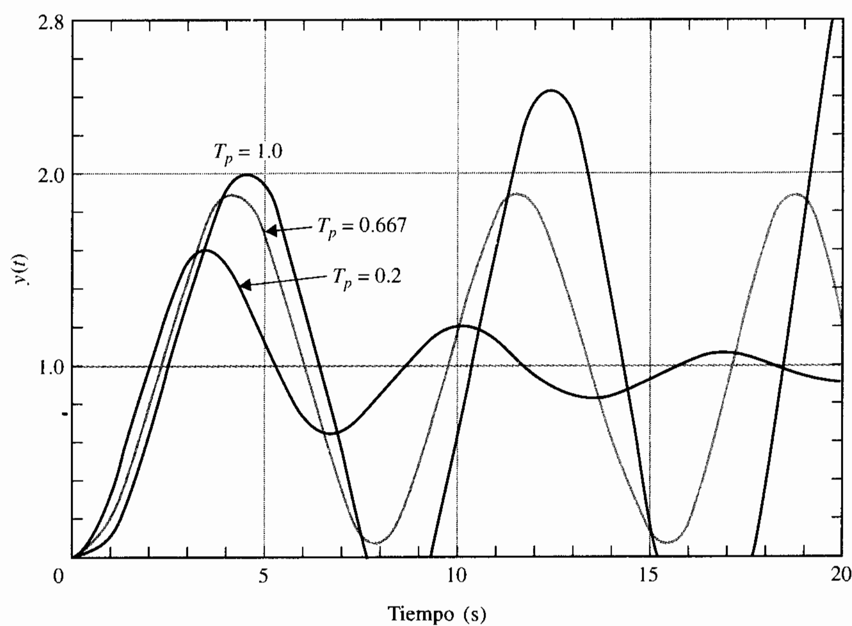


Figura 7-31 Respuestas al escalón unitario del sistema con la función de transferencia en lazo cerrado de la ecuación (7-145): $\zeta = 0.25$, $\omega_n = 1$, y $T_p = 0, 0.2, 0.667$, y 1.0.

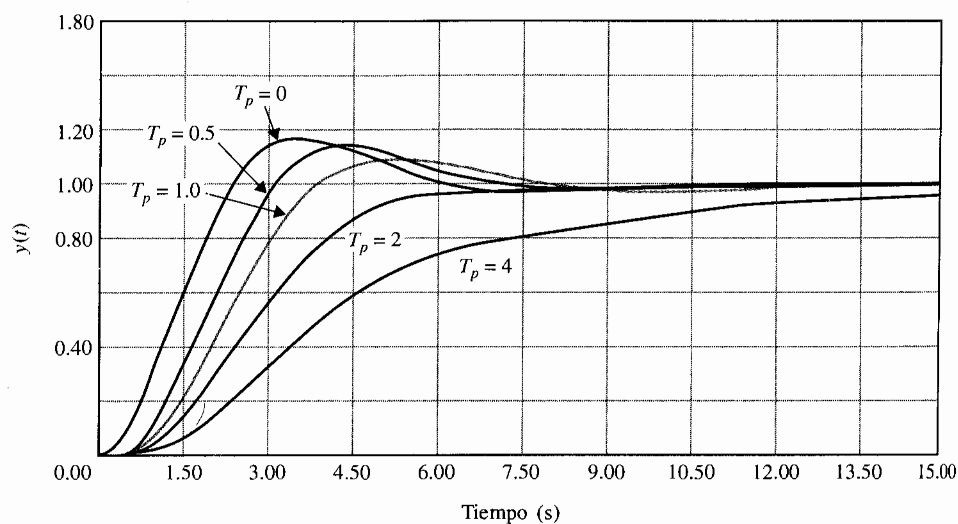


Figura 7-32 Respuestas al escalón unitario del sistema con la función de transferencia en lazo cerrado de la ecuación (7-146); $\zeta = 0.5$, $\omega_n = 1$, y $T_p = 0, 0.5, 1.0, 2.0$, y 4.0.

y $T_p = 0, 0.5, 1, 2$ y 4. Mientras que el polo en $s = -1/T_p$ se mueve hacia el origen en el plano s, el crecimiento de tiempo se incrementa y el sobrepaso máximo decrece. Por lo que:

al sobrepaso se refiere, el adicionar un polo a la función de transferencia en lazo cerrado tiene justamente el efecto opuesto a aquel de adicionar un polo a la función de transferencia de la trayectoria directa.

7-7-3 Adición de un cero en la función de transferencia en lazo cerrado

La Fig. 7-33 muestra las respuestas al escalón unitario del sistema en lazo cerrado con la función de transferencia:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2(1 + T_z s)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \tag{7-147}$$

en donde $\omega_n = 1$, $\zeta = 0.5$, y $T_z = 0, 1, 3, 6$, y 10. En este caso se observa que:

el adicionar un cero en la función de transferencia en lazo cerrado disminuye el tiempo de levantamiento e incrementa el sobrepaso máximo de la respuesta al escalón.

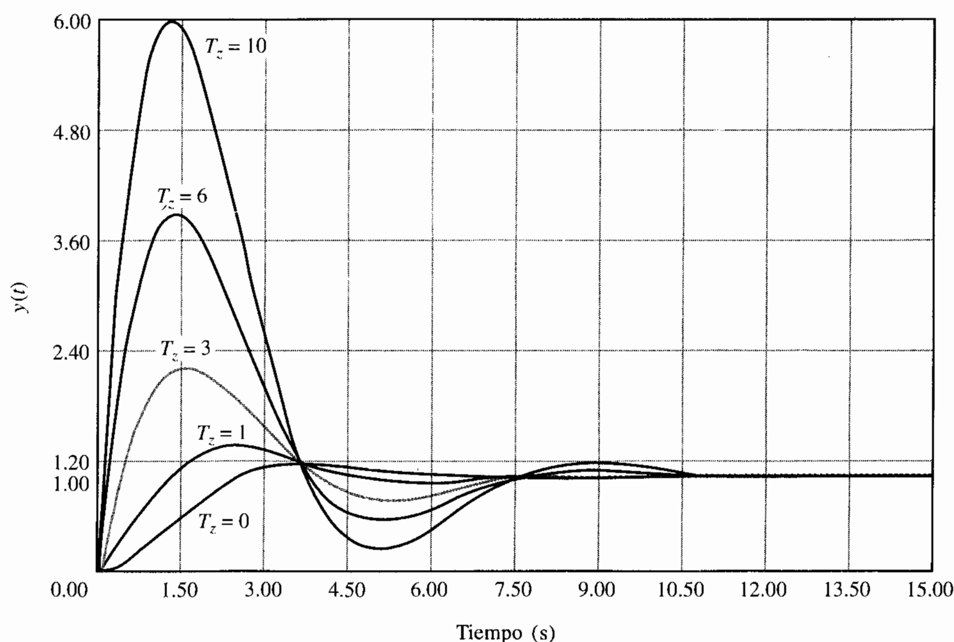


Figura 7-33 Respuestas al escalón unitario del sistema con la función de transferencia en lazo cerrado de la ecuación (7-147): $T_z = 0, 1, 3, 6$, y 10.

Se puede analizar el caso general escribiendo la ecuación (7-147) como sigue:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{T_z\omega_n^2 s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{7-148}$$

Para una entrada de escalón unitario, asúmase que la respuesta de salida que corresponde al primer término del segundo miembro de la ecuación (7-148) es $y_1(t)$. Entonces la respuesta total al escalón unitario es:

$$y(t) = y_1(t) + T_z \frac{dy_1(t)}{dt} \tag{7-149}$$

La Fig. 7-34 muestra por qué la adición del cero en $s = -1/T_z$, reduce el tiempo de levantamiento e incrementa el sobrepaso máximo, de acuerdo con la ecuación (7-149). De hecho, mientras que T_z se aproxima al infinito, el sobrepaso máximo parece también aproximarse al infinito, y el sistema es aún estable mientras que el sobretiro sea finito y ζ sea positivo.

7-7-4 Adición de un cero en la función de transferencia de trayectoria directa: Sistemas con realimentación unitaria

Considérese que un cero en $-1/T_z$ se adiciona a la función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema de tercer orden, por lo que:

$$G(s) = \frac{6(1 + T_z s)}{s(s+1)(s+2)} \tag{7-150}$$

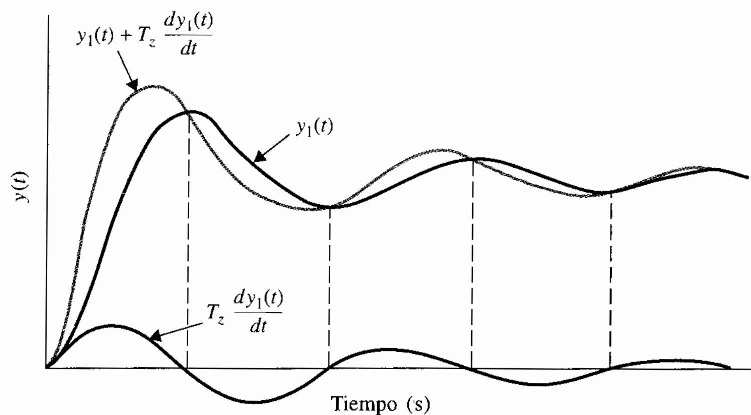


Figura 7-34 Respuestas al escalón unitario mostrando el efecto de adicionar un cero en la función de transferencia en lazo cerrado.

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{6(1 + T_z s)}{s^3 + 3s^2 + (2 + 6T_z)s + 6} \tag{7-151}$$

La diferencia entre este caso y el de adición de un cero en la función de transferencia en lazo cerrado es que en el presente caso, no solamente el término $(1 + T_z s)$ aparece en el numerador de $M(s)$, sino que el denominador de $M(s)$ contiene a T_z. El término $(1 + T_z s)$ en el numerador de $M(s)$ incrementa el sobrepaso máximo, pero T_z aparece en el coeficiente del término s del denominador, que tiene el efecto de mejorar el amortiguamiento o reducir el sobrepaso máximo. La Fig. 7-35 ilustra las respuestas al escalón unitario cuando $T_z = 0$, 0.2, 0.5, 2, 5, y 10. Nótese que cuando $T_z = 0$, el sistema en lazo cerrado está al borde de convertirse en inestable. Cuando $T_z = 0.2$ y 0.5, los sobrepasos máximos se reducen, debido principalmente al amortiguamiento mejorado. Mientras que T_z se incrementa más allá de 2, aun cuando el amortiguamiento continúa siendo mejorado, el término $(1 + T_z s)$ en el numerador se vuelve más dominante, por lo que el sobrepaso máximo realmente se vuelve más grande mientras T_z continúa incrementándose.

Un hallazgo importante en estas discusiones es que:

aun cuando las raíces de la ecuación característica se utilizan generalmente para estudiar el amortiguamiento relativo y la estabilidad relativa de sistemas de control lineales, los ceros de la función de transferencia no deben sobrepasarse en sus efectos en el desempeño transitorio del sistema.

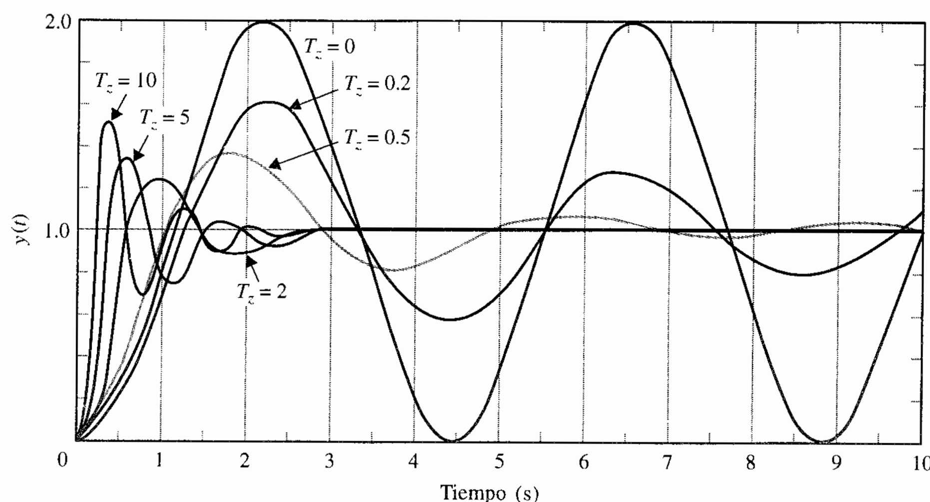


Figura 7-35 Respuestas al escalón unitario del sistema con la función de transferencia en lazo cerrado en la ecuación (7-151): $T_z = 0$, 0.2, 0.5, 2, 5, y 10.

7-8 Polos dominantes de las funciones de transferencia

De las discusiones anteriores, se vuelve aparente que la localización de los polos de una función de transferencia en el plano s afecta grandemente la respuesta transitoria del sistema. Para fines de análisis y diseño, es importante clasificar los polos que tienen un efecto dominando en la respuesta transitoria y denominarlos como **polos dominantes.**

Debido a que la mayoría de los sistemas de control que se encuentran en la práctica son de órdenes mayores que 2, sería útil establecer guías en la aproximación de sistemas de mayor orden mediante órdenes menores, siempre y cuando sea concerniente a la respuesta transitoria. En el diseño, se pueden usar los polos dominantes para controlar el desempeño dinámico del sistema, mientras que los **polos insignificantes** se utilizan con el fin de asegurar que la función de transferencia del controlador puede realizarse a través de componentes físicos.

Para propósitos prácticos, se puede seccionar cualitativamente el plano s en regiones en donde puedan caer los polos dominantes e insignificantes, como se muestra en la Fig. 7-36. Intencionalmente no se asignaron los valores específicos a las coordenadas, ya que éstos son todos relativos a un sistema dado.

Los polos que están cercanos al eje imaginario enel semiplano izquierdo del plano s dan crecimiento a la respuestas transitorias que decaerán relativamente despacio, mientras que los polos que están lejos del eje (relativo a los polos dominantes) correspondiente a una respuesta de decaimiento rápido. La distancia D entre la región dominante y la menos significante en la Fig. 7-36 serán sujetos a discusión. La pregunta es: "¿Qué tan grande se considera un polo para ser realmente grande?" Se ha reconocido en la práctica y en la literatura que si la magnitud de la parte real de un polo es de por lo menos 5 a 10 veces que el polo dominante de un par de polos complejos dominantes, el polo puede enunciarse como insignificante en cuanto a la respuesta transitoria se refiere.

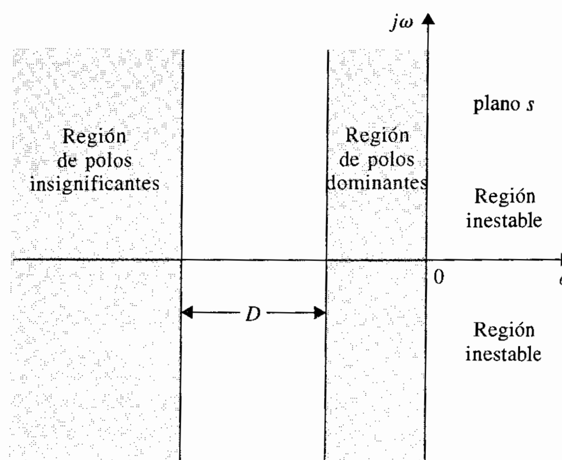


Figura 7-36 Regiones de polos dominantes e insignificantes en el plano s.

Se debe señalar que las regiones que se muestran en la Fig. 7-36 fueron seleccionadas meramente por las definiciones de polos dominantes e insignificantes. Para fines de diseño, tal como en el diseño de posición de polos, los polos dominantes y los polos insignificantes, seleccionados por el diseñador, deben más bien localizarse en las rengiones sombreadas en la Fig. 7-37. Nuevamente, no se muestran coordenadas absolutas, a menos que la región deseada de los polos dominantes se centre alrededor de la línea que corresponde a $\zeta = 0.707$. También debe hacerse notar que en diseño, no se pueden colocar arbitrariamente los polos insignificantes lejos hacia la izquierda del plano s, o éstos pudiesen requerir valores de parámetros del sistema no realistas cuando el diseño en papel se implemente mediante los componentes físicos.

7-8-1 Factor de amortiguamiento relativo

Cuando un sistema es de mayor orden que el de segundo orden, estrictamente, no se puede utilizar el factor de amortiguamiento relativo ζ y la frecuencia natural de no amortiguamiento ω_n, que se definieron para los sistemas prototipos de segundo orden. Sin embargo, si las dinámicas del sistema pueden representarse con exactitud con un par de polos dominantes complejos conjugados, se puede utilizar aún ζ_n y ω_n para indicar la dinámica de la respuesta transitoria, y el factor de amortiguamiento relativo en este caso se denomina **factor de amortiguamiento relativo** del sistema. Por ejemplo, considere la función de transferencia en lazo cerrado:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{20}{(s+10)(s^2+2s+2)} \qquad (7\text{-}152)$$

El polo en $s = -10$, es 10 veces la parte real de los polos complejos conjugados, que están en $-1 \pm j1$. Se puede referir al factor de amortiguamiento relativo del sistema como 0.707.

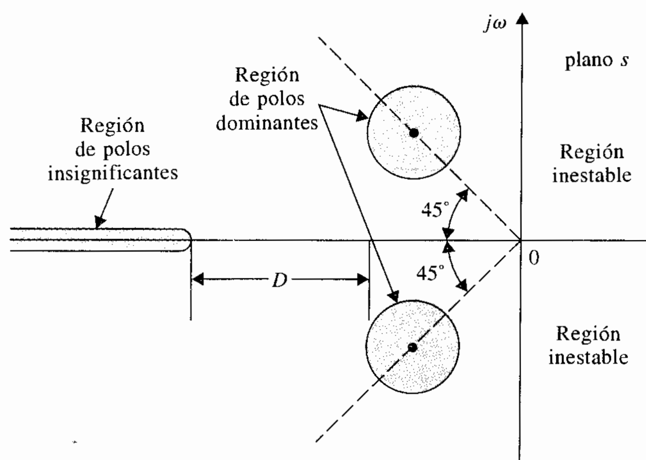


Figura 7-37 Regiones de polos dominantes e insignificantes en el plano s.

7-8-2 Forma apropiada para despreciar los polos insignificantes considerando la respuesta en estado estable

Hasta aquí se han dado guías para despreciar polos insignificantes de una función de transferencia desde el punto de vista de la respuesta transitoria. Sin embargo, a través de las mecánicas, el desempeño del estado estable debe también considerarse. Considérese la función de transferencia en la ecuación (7-152); el polo en –10 puede despreciarse desde el punto de vista de transferencia. Para realizar esto, se debe primero expresar la ecuación (7-152) como:

$$M(s) = \frac{20}{10(s/10 + 1)(s^2 + 2s + 2)} \tag{7-153}$$

Entonces se razona que $|s/10| << 1$ cuando el valor absoluto de s es mucho menor a 10, debido a la naturaleza dominante de los polos complejos. El término $s/10$ puede despreciarse cuando se compara con 1. Entonces la ecuación (7-153) se aproxima por:

$$M(s) \cong \frac{20}{10(s^2 + 2s + 2)} \tag{7-154}$$

En esta forma, el desempeño del estado estable del sistema de tercer orden no se afectará por la aproximación. En otras palabras, el sistema de tercer orden descrito en la ecuación (7-152) y la aproximación del sistema de segundo orden en la ecuación (7-154) tendrán todos un valor final unitario cuando se aplique una entrada de escalón unitario. Por otra parte, si simplemente "se desecha" el término $(s + 10)$ en la ecuación (7-152), el sistema de segundo orden que se aproximó tendrá un valor de estado estable de 5 cuando se aplique una entrada de escalón unitario.

7-9 Aproximación a sistemas de orden superior por sistemas de orden bajo: El enfoque formal

En la Sec. 7-8 se ha demostrado que un sistema de control de orden alto a menudo contiene polos de menor importancia que tienen poco efecto sobre la respuesta del sistema. Por lo que, dado un sistema de orden alto, es deseable encontrar una aproximación a un sistema de orden bajo, si es posible, de tal forma que se reduzca el esfuerzo de análisis y diseño. Esto significa que dada una función de transferencia de orden superior $M_H(s)$, ¿cómo se puede encontrar una función de transferencia de orden bajo $M_L(s)$ como una aproximación, en el sentido de que las respuestas de los dos sistemas son similares de acuerdo con algunos criterios prescritos?

En la Sec. 7-8 se establecieron guías prácticas, pero no rigurosas para despreciar los polos que están lejos a la izquierda en el plano s en relación con los polos dominantes. Sin embargo, en general, la función de transferencia puede no tener los así llamados polos dominantes, o estos últimos pueden no estar definidos obviamente, por lo que un método más científico puede hacerse necesario para llegar a un equivalente de orden bajo.

En esta sección se presenta un método [2] de aproximación a un sistema de orden alto mediante uno de orden bajo en el sentido de que las respuestas a la frecuencia de los dos sistemas son similares.

Supóngase que la función de transferencia al sistema de orden alto se representa por:

$$M_H(s) = K\frac{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n} \tag{7-155}$$

en donde $n \geq m$. La función de transferencia de la aproximación del sistema de orden bajo puede ser:

$$M_L(s) = K\frac{1 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots + c_q s^q}{1 + d_1 + d_2 s^2 + \cdots + d_p s^p} \tag{7-156}$$

en donde $n \geq p \geq q$. Nótese que la ganancia K de la frecuencia cero ($s = 0$) de las dos funciones de transferencia es la misma. Esto asegurará que la conducta del estado estable del sistema de orden alto se mantenga en el sistema de orden bajo. Aún más, se asume que los polos de $M_H(s)$ y $M_L(s)$ están todos en el semiplano izquierdo del plano s, ya que no son de interés los sistemas inestables. Las funciones de transferencia $M_H(s)$ y $M_L(s)$ generalmente se refieren a la función de transferencia en lazo cerrado, pero si es necesario, pueden tratarse como funciones de transferencia de lazo.

7-9-1 Criterio de aproximación

El criterio de búsqueda de orden bajo $M_L(s)$ dado $M_H(s)$ es que la siguiente relación debe satisfacerse tanto como sea posible:

$$\frac{|M_H(j\omega)|^2}{|M_L(j\omega)|^2} = 1 \qquad \text{for } 0 \leq \omega \leq \infty \tag{7-157}$$

La última condición implica que las características de amplitud de los dos sistemas en la frecuencia de dominio ($s = j\omega$) son similares. Se espera que esto conlleve a respuestas de tiempo similares para los dos sistemas.

El procedimiento de aproximación involucra los dos siguientes pasos:

1. Seleccionar los grados apropiados del numerador del polinomio, q, y el denominador del polinomio p, de $M_L(s)$
2. Determine los coeficientes c_i, $i = 1, 2, \ldots, q$, y d_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, para que se aproxime la condición en la ecuación (7-157).

Utilizando las ecuaciones (7-155) y (7-156), la relación de $M_H(s)$ a $M_L(s)$ es:

$$\frac{M_H(s)}{M_L(s)} = \frac{(1 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m)(1 + d_1 s + d_2 s^2 + \cdots + d_p s^p)}{(1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n)(1 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots + c_q s^q)}$$

$$= \frac{1 + m_1 s + m_2 s^2 + \cdots + m_u s^u}{1 + l_1 s + l_2 + \cdots + l_v s^v} \qquad (7\text{-}158)$$

en donde $u = m + p$ y $v = n + q$.

La ecuación (7-157) se escribe como:

$$\frac{|M_H(j\omega)|^2}{|M_L(j\omega)|^2} = \left.\frac{M_H(s)M_H(-s)}{M_L(s)M_L(s)}\right|_{s=j\omega} \qquad (7\text{-}159)$$

en donde $M_H(s)\, M_H(-s)$ y $M_L(s)M_L(-s)$ son polinomios pares de s (*i.e.*, contienen sólo poderes pares de s). Por lo que la ecuación (7-159) puede escribirse como:

$$\frac{|M_H(j\omega)|^2}{|M_L(j\omega)|^2} = \left.\frac{1 + e_2 s^2 + e_4 s^4 + \cdots + e_{2u} s^{2u}}{1 + f_2 s^2 + f_4 s^4 + \cdots + f_{2v} s^{2v}}\right|_{s=j\omega} \qquad (7\text{-}160)$$

Dividiendo el numerador entre el denominador una vez en el segundo miembro de la ecuación (7-160), se tiene:

$$\frac{|M_H(j\omega)|^2}{|M_L(j\omega)|^2} = 1 + \left.\frac{(e_2 - f_2)s^2 + (e_4 - f_4)s^4 + \cdots}{1 + f_2 s^2 + f_4 s^4 + \cdots + f_{2v} s^{2v}}\right|_{s=j\omega} \qquad (7\text{-}161)$$

Si $u = v$, el último término en el numerador de la ecuación (7-161) será $(e_{2u} - f_{2u})s^{2u}$. Sin embargo, si $u < v$, como en la mayoría de los casos prácticos, entonces más allá del término $(e_{2u} - f_{2u})s^{2u}$, adicionalmente, se tendrá:

$$-f_{2(u+1)} s^{2(u+1)} - \cdots - f_{2v} s^{2v}$$

en el numerador de la ecuación (7-161).

Se observa que para satisfacer la condición de la ecuación (7-157), se obtiene un posible juego de soluciones de aproximación de la ecuación (7-161):

$$\begin{aligned} e_2 &= f_2 \\ e_4 &= f_4 \\ e_6 &= f_6 \\ &\vdots \\ e_{2u} &= f_{2u} \end{aligned} \tag{7-162}$$

si $u = v$. Si $u < v$, el error generado por el modelo de orden bajo es:

$$|\varepsilon| = \frac{|M_H(j\omega)|^2}{|M_L(j\omega)|^2} - 1 = \left.\frac{-f_{2(u+1)}s^{2(u+1)} - \cdots - f_{2v}s^{2v}}{1 + f_2 s^2 + f_4 s^4 + \cdots + f_{2v}s^{2v}}\right|_{s=j\omega} \tag{7-163}$$

Las condiciones en la ecuación (7-162) se usan para resolver los coeficentes desconocidos en $M_L(s)$ una vez que $M_H(s)$ es dada. Esto se lleva a cabo escribiendo:

$$\begin{aligned} \frac{M_H(s)M_H(-s)}{M_L(s)M_L(-s)} &= \frac{(1 + m_1 s + m_2 s^2 + \cdots + m_u s^u)[1 - m_1 s + m_2 s^2 - \cdots + (-1)^u m_u s^u]}{(1 + l_1 s + l_2 s^2 + \cdots + l_v s^v)[1 - l_1 s + l_2 s^2 + \cdots + (-1)^v l_v s^v]} \\ &= \frac{1 + e_2 s^2 + e_4 s^4 + \cdots + e_{2u}s^{2u}}{1 + f_2 s^2 + f_4 s^4 + \cdots + f_{2v}s^{2v}} \end{aligned} \tag{7-164}$$

Calculando ambos lados de la ecuación (7-164), se puede expresar $e_2, e_4, \ldots, e_{2u}$ en términos de $m_1, m_2, \ldots, m_u$. Relaciones similares pueden obtenerse para $f_2, f_4, \ldots, f_{2v}$ en términos de $l_1, l_2, \ldots, l_v$.

Como un ejemplo ilustrativo, para $u = 8$, la ecuación (7-164) da:

$$\begin{aligned} e_2 &= 2m_2 - m_1^2 \\ e_4 &= 2m_4 - 2m_1 m_3 + m_2^2 \\ e_6 &= 2m_6 - 2m_1 m_5 + 2m_2 m_4 - m_3^2 \\ e_8 &= 2m_8 - 2m_1 m_7 + 2m_2 m_6 - 2m_3 m_5 + m_4^2 \\ e_{10} &= 2m_2 m_8 - 2m_3 m_7 + 2m_4 m_6 - m_5^2 \\ e_{12} &= 2m_4 m_8 - 2m_3 m_7 + m_6^2 \\ e_{14} &= 2m_6 m_8 - m_7^2 \\ e_{16} &= m_8^2 \end{aligned} \tag{7-165}$$

En general:

$$e_{2x} = \sum_{i=0}^{x-1} (-1)^i 2m_i m_{2x-i} + (-1)^x m_x^2 \tag{7-166}$$

para $x = 1, 2, \ldots, u$, y $m_0 = 1$. Similarmente:

$$f_{2y} = \sum_{i=0}^{y-1} (-1)^i 2 l_i l_{2y-i} + (-1)^y l_y^2 \qquad (7\text{-}167)$$

para $y = 1, 2, \ldots, v$, y $l_0 = 1$.

Los siguientes ejemplos ilustran el método de simplificación de los sistemas lineales descritos en esta sección.

Ejemplo 7-8

Considere que la función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema de control de realimentación unitaria es:

$$G(s) = \frac{8}{s(s^2 + 6s + 12)} \qquad (7\text{-}168)$$

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$M_H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{8}{s^3 + 6s^2 + 12s + 8}$$
$$= \frac{1}{1 + 1.5s + 0.75s^2 + 0.125s^3} \qquad (7\text{-}169)$$

Los polos de la función de tansferencia en lazo cerrado están en $s = -2, -2$ y -2. El sistema de aproximación de orden bajo se considera para los siguientes dos casos:

Caso I

Considere que el sistema de orden bajo simplificado es de segundo orden, y la función de transferencia es de la forma:

$$M_L(s) = \frac{1}{1 + d_1 s + d_2 s^2} \qquad (7\text{-}170)$$

La ecuación (7-158) da:

$$\frac{M_H(s)}{M_L(s)} = \frac{1 + d_1 s + d_2 s^2}{1 + 1.5s + 0.75s^2 + 0.125s^3}$$
$$= \frac{1 + m_1 s + m_2 s^2}{1 + l_1 s + l_2 s^2 + l_3 s^3} \qquad (7\text{-}171)$$

Por lo que:

▲ $l_1 = 1.5 \qquad l_2 = 0.75 \qquad l_3 = 0.125 \qquad d_1 = m_1 \qquad d_2 = m_2$

Usando la ecuación (7-164) se tiene:

$$\frac{M_H(s)M_H(-s)}{M_L(s)M_L(-s)} = \frac{1 + e_2s^2 + e_4s^4}{1 + f_2s^2 + f_4s^4 + f_6s^6} \qquad (7\text{-}172)$$

Ahora utilizando las ecuaciones (7-162) y (7-165), se obtienen las siguientes ecuaciones no lineales:

$$e_2 = f_2 = 2m_2 - m_1^2 = 2d_2 - d_1^2$$
$$e_4 = f_4 = 2m_4 - 2m_4 - 2m_1m_3 = m_2^2 = d_2^2$$

Similarmente:

$$f_2 = 2l_2 - l_1^2 = 1.5 - (1.5)^2 = -0.75$$
$$f_4 = 2l_4 - 2l_1l_3 + l_2^2 = 0.1875$$
$$f_6 = 2l_6 - 2l_1l_5 + 2l_2l_4 - l_3^2 = -l_3^2 = -0.156$$

Resolviendo las ecuaciones antes mencionadas, se tiene:

$$d_1^2 = 1.616 \qquad d_2^2 = 0.1875$$

Por lo que:

$$d_1 = 1.271 \qquad d_2 = 0.433$$

en donde se han tomado los valores positivos de tal forma que $M_L(s)$ representará un sistema estable. Por lo que la función de transferencia del sistema simplificado de segundo orden es:

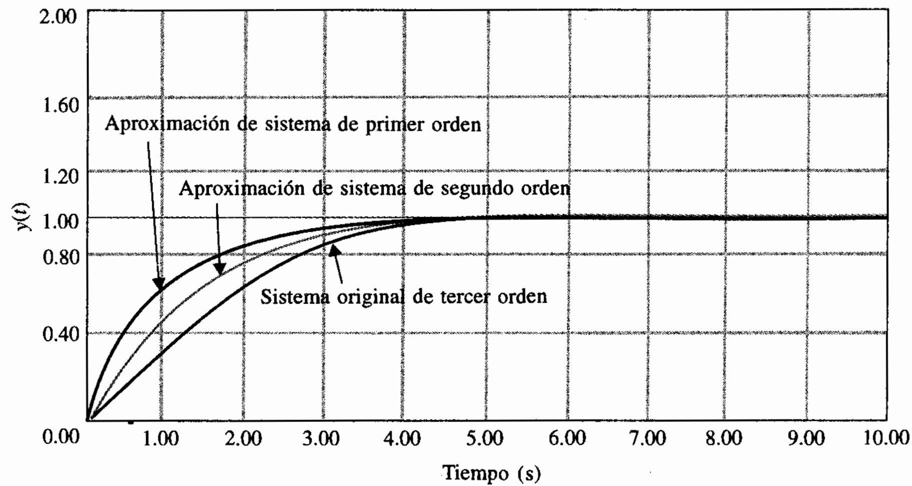
$$M_L(s) = \frac{1}{1 + 1.271s + 0.433s^2} = \frac{2.31}{s^2 + 2.936s + 2.31} \qquad (7\text{-}173)$$

Los polos de $M_L(s)$ están en $s = -1.468 + j0.384$ y $-1.468 - j0.384$. Por lo que el sistema de tercer orden con la función de transferencia M_H que tiene polos reales en –2, –2, y –2 se aproxima mediante la función de transferencia de segundo orden con dos polos de complejos conjugados. La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema de segundo orden es:

$$G_L(s) = \frac{2.31}{s(s + 2.936)} \qquad (7\text{-}174)$$

Desde el punto de vista en lazo abierto, el sistema de tercer orden con polos en lazo abierto en $s = 0, -3 + j1.732$ y $-3 - j1.732$ y una ganancia de 8 se aproxima mediante un sistema de segundo orden con los polos en lazo abierto en $s = 0$ y $s = -2.936$ y una ganancia de 2.31.

La Fig. 7-38 muestra las respuestas al escalón unitario del sistema con las funciones de transferencia en lazo cerrado $M_H(s)$ y $M_L(s)$. Nótese que la aproximación del sistema de segundo orden tiene un tiempo de levantamiento más rápido. Esto se debe a los polos complejos conjugados de $M_L(s)$.



Sistema original: $M_H(s) = \dfrac{1}{1 + 1.5s + 0.75s^2 + 0.125s^3}$

Sistema de segundo orden: $M_L(s) = \dfrac{1}{1 + 1.271s + 0.433s^2}$

Sistema de primer orden: $M_L(s) = \dfrac{1}{1 + 0.866s}$

Figura 7-38 Aproximación de un sistema de tercer orden por un sistema de primer orden y un sistema de segundo orden.

Caso 2

Ahora utilícese un sistema de primer orden para aproximar la función de transferencia en lazo cerrado de la ecuación (7-169). Se seleccionó:

$$M_L(s) = \frac{1}{1 + d_1 s} \tag{7-175}$$

Entonces:

$$\frac{M_H(s)}{M_L(s)} = \frac{1 + d_1 s}{1 + 1.5s + 0.75s^2 + 0.125s^3} = \frac{1 + m_1 s}{1 + l_1 s + l_2 s^2 + l_3 s^3} \tag{7-176}$$

Por lo que:

$$l_1 = 1.5 \qquad l_2 = 0.75 \qquad l_3 = 0.125 \qquad d_1 = m_1$$

y

$$\frac{M_H(s)M_H(-s)}{M_L(s)M_L(-s)} = \frac{1 + e_2 s^2}{1 + f_2 s^2 + f_4 s^4 + f_6 s^6} \tag{7-177}$$

Por lo que:

$$e_2 = f_2 = 2d_2 - d_1^2 = -d_1^2 = -0.75$$
$$f_4 = 0.1875$$
$$f_6 = -0.156$$

Esto da $d_1 = 0.866$. La función de transferencia de $M_L(s)$ es:

$$M_L(s) = \frac{1}{1 + 0.866s} = \frac{1.1547}{s + 1.1547} \quad (7\text{-}178)$$

La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema de primer orden es:

$$G_L(s) = \frac{1.1546}{s} \quad (7\text{-}179)$$

La respuesta al escalón unitario del sistema de primer orden se muestra en la Fig. 7-38. Como se esperaba, el sistema de primer orden da una aproximación inferior al sistema de tercer orden que el de segundo orden. ▲

Ejemplo 7-9

Considere la siguiente función de transferencia en lazo cerrado:

$$M_H(s) = \frac{1}{(1 + s + 0.5s^2)(1 + Ts)} = \frac{1}{1 + (1 + T)s + (0.5 + T)s^2 + 0.5s^3} \quad (7\text{-}180)$$

en donde T es un parámetro variable positivo. Se investigará la aproximación de $M_H(s)$ por un modelo de segundo orden cuando T toma varios valores.

Considérese que el sistema de segundo orden es modelado por la función de transferencia:

$$M_L(s) = \frac{1}{1 + d_1s + d_2s^2} \quad (7\text{-}181)$$

Sustituyendo las ecuaciones (7-180) y (7-181) por la ecuación (7-158), se obtiene:

$$\frac{M_H(s)}{M_L(s)} = \frac{1 + d_1s + d_2s^2}{1 + (1 + T)s + (0.5 + T)s^2 + 0.5Ts^3} = \frac{1 + m_1s + m_2s^2}{1 + l_1s + l_2s^2 + l_3s^3} \quad (7\text{-}182)$$

Entonces:

$$l_1 = 1 + T \qquad l_2 = 0.5 + T \qquad l_3 = 0.5T \quad (7\text{-}183)$$

De la ecuación (7-166) se obtiene:

$$e_2 = f_2 = 2d_2 - d_1^2 \qquad e_4 = f_4 = m_2^2 = d_2^2 \quad (7\text{-}184)$$

De la ecuación (7-167) se obtiene:

$$f_2 = 2l_2 - l_1^2 = 2(0.5 + T) - (1 + T)^2 = -T^2$$
$$f_4 = 2l_4 - 2l_1l_3 + l_2^2 = -2(1 + T)(0.5T) + (0.5 + T)^2 = 0.25 \qquad (7\text{-}185)$$
$$f_6 = -l_3^2 = -(0.5T)^2 = -0.25T^2$$

A partir de las ecuaciones (7-183) a (7-185), se obtienen los valores de d_1 y d_2 y los resultados son:

$$d_1 = \sqrt{1 + T^2} \qquad d_2 = 0.5$$

Por lo que la función de transferencia de la aproximación del sistema de segundo orden es:

$$M_L(s) = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + T^2}\, s + 0.5s^2} \qquad (7\text{-}186)$$

Los dos polos de $M_L(s)$ están en:

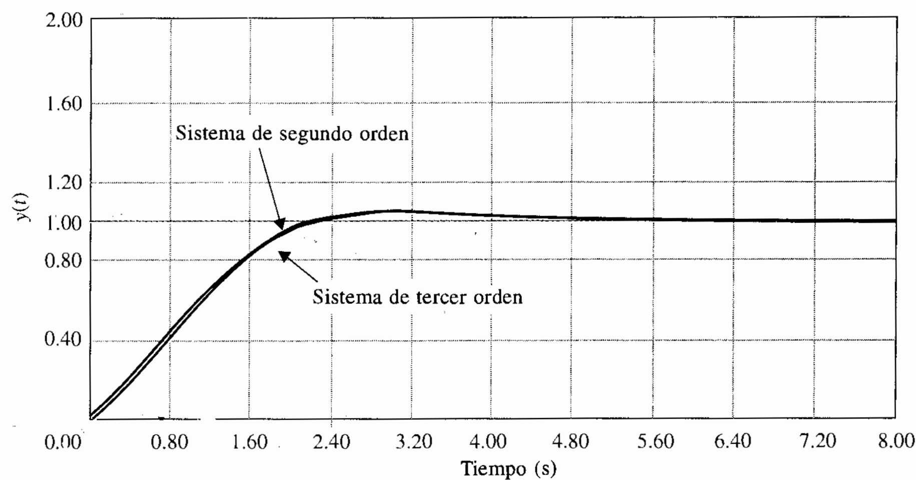
$$s = -\sqrt{1 + T^2} + j\sqrt{1 - T^2} \quad \text{y} \quad s = -\sqrt{1 + T^2} - j\sqrt{1 - T^2}$$

Los polos de $M_H(s)$ están en $s = -1 + j$, $-1 - j$, y $-1/T$. Los dos polos de $M_L(s)$ se calculan para $T = 0$ a $T = 6$:

▲ $T = 0$	$s = -1.000 + j$	$s = -1.000 - j$
▲ $T = 0.1$	$s = -1.005 + j0.995$	$s = -1.005 - j0.995$
▲ $T = 0.25$	$s = -1.031 + j0.968$	$s = -1.031 - j0.968$
▲ $T = 0.5$	$s = -1.118 + j0.866$	$s = -1.118 - j0.866$
▲ $T = 0.75$	$s = -1.250 + j0.661$	$s = -1.250 - j0.661$
▲ $T = 1.0$	$s = -1.414$	$s = -1.414$
▲ $T = 2.0$	$s = -3.968$	$s = -0.504$
▲ $T = 4.0$	$s = -7.996$	$s = -0.250$
▲ $T = 6.0$	$s = -11.999$	$s = -0.167$

Nótese que cuando el valor de T disminuye, el sistema original se aproxima al sistema de segundo orden, cuando el polo en $-1/T$ se mueve hacia $-\infty$. Por lo que cuando $T = 0$, $M_L(s)$ es idéntico a $M_H(s)$ y la solución de la aproximación es exacta. Cuando el valor de T aumenta, el polo en $-1/T$ se mueve hacia el origen y se vuelve más dominante; los polos de $M_L(s)$ se mueven hacia el eje real, y eventualmente cuando $T \geq 1$, los polos se vuelven reales. Cuando T aumenta, uno de los polos reales del sistema de segundo orden se mueve hacia $-\infty$, y el otro se aproxima a $-1/T$ Por lo que la aproximación de segundo orden es buena para los valores de T pequeños y grandes.

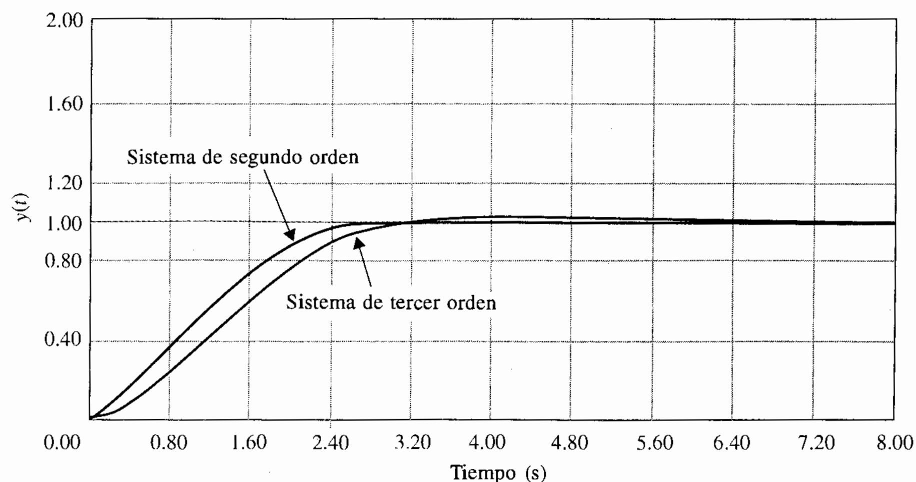
Las Figs. 7-39 a 7-42 ilustran las respuestas al escalón unitario del sistema de tercer orden y de la aproximación del sistema de segundo orden cuando $T = 0.1$, 0.5, 1.0 y 6.0 respectivamente. Cuando el valor de T es muy pequeño, las respuestas al escalón unitario de los sistemas de tercer y segundo orden están muy cercanas. El error entre las dos respuestas aumenta cuando T se incrementa a 0.5 y 1.0. La Fig. 7-42 muestra que la respuesta a los dos sistemas nuevamente se aproximan una a la otra cuando $T = 6$. Cuando el valor de T aumenta, el polo real en $-1/T$ se vuelve dominante relativo a los dos polos complejos conjugados, y el modelo de segundo orden para $M_L(s)$ en la ecuación (7-181) daría una mejor aproximación al sistema de tercer orden. ▲



Sistema original: $M_H(s) = \dfrac{1}{(1 + s + 0.5s^2)(1 + 0.1s)}$

Sistema de segundo orden: $M_H(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2.01s + 2}$

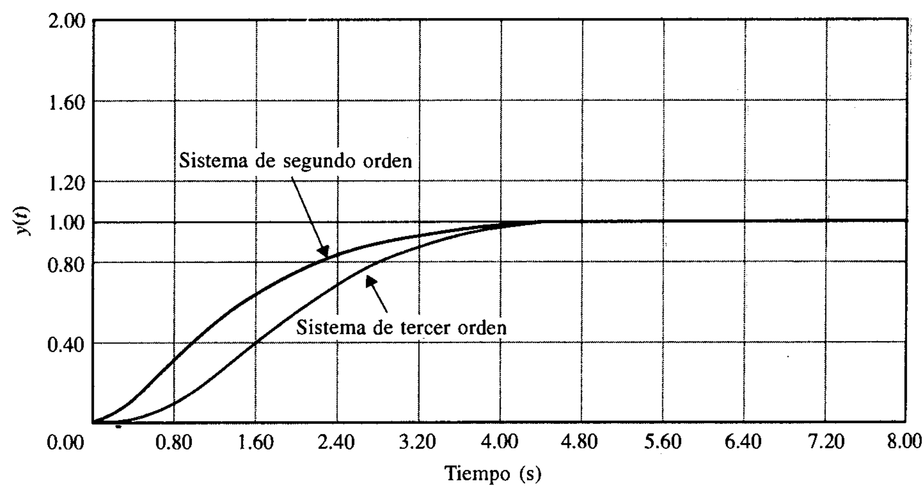
Figura 7-39 Aproximación de un sistema de tercer orden por un sistema de segundo orden.



Sistema original: $M_H(s) = \dfrac{1}{(1 + s + 0.5s^2)(1 + 0.5s)}$

Sistema de segundo orden: $M_H(s) = \dfrac{2}{s^2 + 2.2361s + 2}$

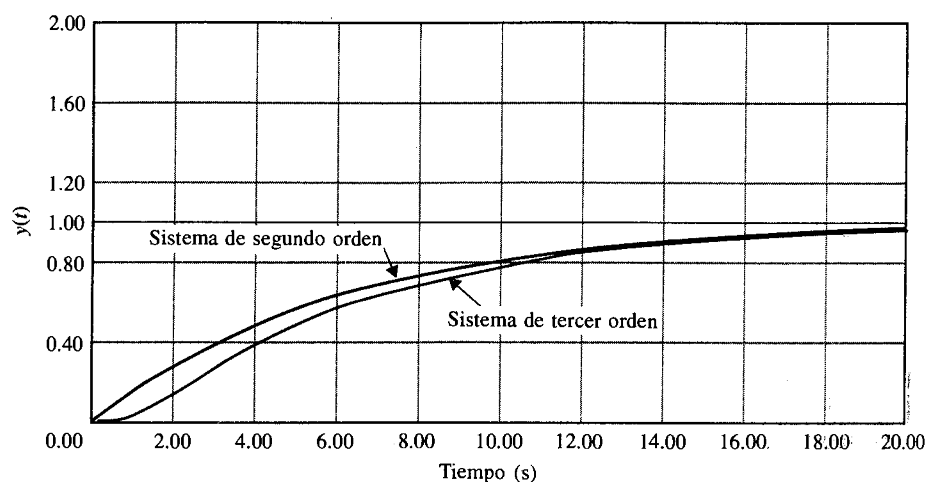
Figura 7-40 Aproximación a un sistema de tercer orden por un sistema de segundo orden.



Sistema original: $M_H(s) = \dfrac{1}{(1 + s + 0.5s^2)(1 + s)}$

Sistema de segundo orden: $M_L(s) = \dfrac{2}{s^2 + 2.828s + 2}$

Figura 7-41 Aproximación de un sistema de tercer orden por un sistema de segundo orden.



Sistema original: $M_H(s) = \dfrac{1}{(1 + s + 0.5s^2)(1 + 6s)}$

Sistema de segundo orden: $M_L(s) = \dfrac{2}{s^2 + 12.17s + 2}$

Figura 7-42 Aproximación de un sistema de tercer orden por un sistema de segundo orden.

Ejemplo 7-10

El sistema de control de posición de tercer orden descrito en la Sec. 7-6 fue aproximado por un sistema de segundo orden despreciando la pequeña inductancia del motor. El modelo de segundo orden al que se llegó en la ecuación (7-116) fue propuesto para todos los valores de K. Se mostró que la aproximación fue relativamente buena para valores pequeños de K e inferior para valores grandes de K. Ahora se usará el método de aproximación presentado en esta sección esperando que se alcance una mejor aproximación de segundo orden para un intervalo más amplio de K.

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema se proporciona en la ecuación (7-138), y se repite:

$$M_H(s) = \frac{1.5 \times 10^7 K}{s^3 + 3408.3s^2 + 1{,}204{,}000s + 1.5 \times 10^7 K} \qquad (7\text{-}187)$$

Para un valor dado de K, esta función de transferencia de tercer orden va a ser aproximada por una función de tansferencia de segundo orden de la forma:

$$M_L(s) = \frac{1}{1 + d_1 s + d_2 s^2} \qquad (7\text{-}188)$$

Una vez que $M_L(s)$ se determina, la función de transferencia de la trayectoria directa de la aproximación del sistema de segundo orden se escribe:

$$G_L(s) = \frac{d_1/d_2}{s(s + d_1/d_2)} \qquad (7\text{-}189)$$

Los coeficientes d_1 y d_2 se determinan para K = 7.248, 14.5 y 100, usando el método descrito en esta sección. Los resultados se calculan como sigue, en donde la primera columna de $G(s)$ menciona la aproximación con $L_a = 0$, y la segunda columna da la correspondiente $G_L(s)$ con los valores indicados de d_1 y d_2.

K	$G(s)$	$G_L(s)$
7.248	$\frac{326{,}166}{s(s + 361.2)}$	$\frac{35{,}829.5}{s(s + 385.5)}$
14.5	$\frac{65{,}250}{s(s + 361.2)}$	$\frac{71{,}684.6}{s(s + 378.2)}$
100.0	$\frac{450{,}000}{s(s + 361.2)}$	$\frac{494{,}300}{s(s + 188.84)}$

En la Fig. 7-43, se muestran las comparaciones de las respuestas al escalón unitario del sistema de tercer orden, y de los sistemas de segundo orden con $L_a = 0$ y con el método de aproximación, para los tres valores indicados de K. Cuando el valor de K es relativamente pequeño, ambas aproximaciones de segundo orden son bastante buenas. Para K = 100, el sistema de segundo orden con L_a = 0 tiene un sobrepaso máximo más bajo y es menos oscilatorio que aquellos del sistema verdadero de tercer orden. El sistema de segundo orden desde el método de aproximación tiene una respuesta al escalón que es más cercana a la respuesta verdadera, aún cuando el sobrepaso máximo sea ligeramente más grande. ▲

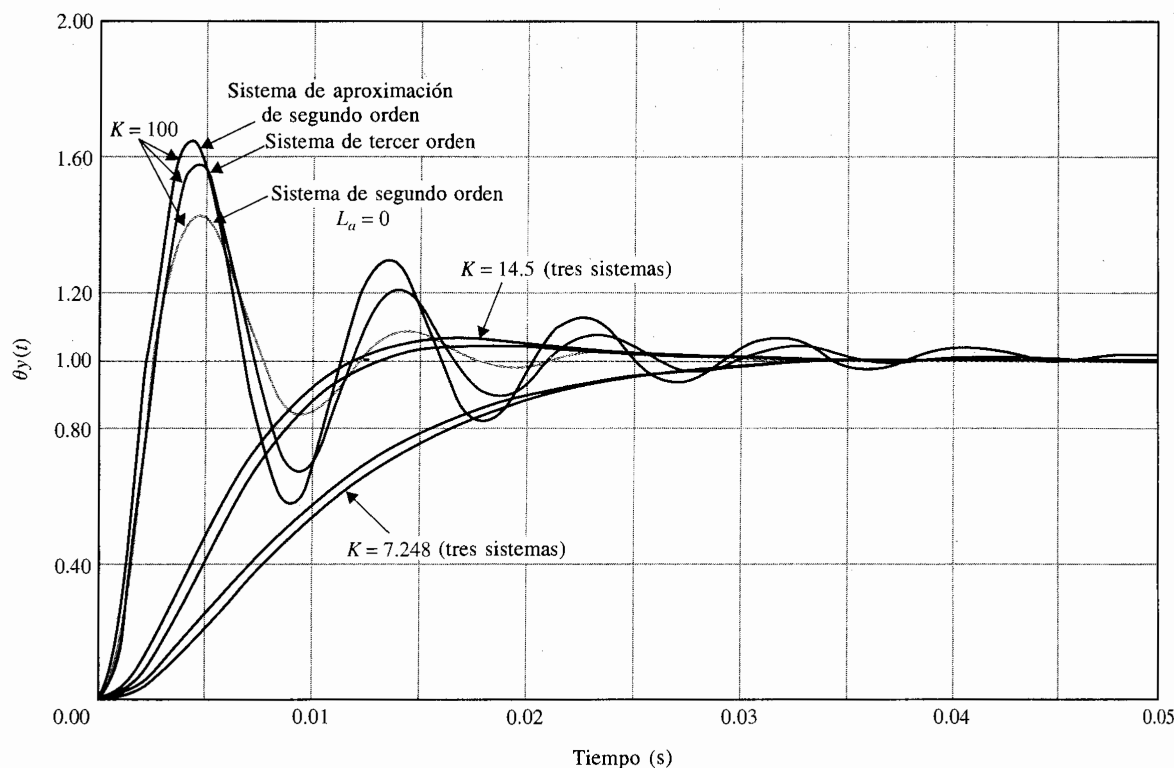


Figura 7-43 Comparación de las respuestas al escalón unitario de los sistemas en el ejemplo 7-10.

Uno de los problemas que surge de esta investigación es que el método de aproximación de bajo orden descrito en esta sección provee un sistema de menor amortiguamiento que el de sistemas de orden superior. Esto significa que cuando el sistema original está ligeramente amortiguado, es posible que las raíces dominantes del sistema de bajo orden puedan terminar en el semiplano derecho del plano s. Para el sistema en el ejemplo 7-10, se tiene esta dificultad cuando $K = 181.2$, uno de los valores seleccionados en la Sec. 7-6. Ya que d_1 y d_2 se resuelven a partir de $d_1^2 = 2d_2 - f_2$, que viene de las ecuaciones (7-162) y (7-165), si f_2 es mayor que $2d_2$, no se puede obtener una solución real para d_1. Para el sistema en el ejemplo 7-10, se puede mostrar que cuando $K = 129.3$, los dos polos de la aproximación del sistema de segundo orden estarán en el eje $j\omega$. Para aproximar el sistema de tercer orden cuando K es mayor se requerirá que la función de transferencia de segundo orden $M_L(s)$ contenga un cero.

En conclusión, debe señalarse que el problema de la aproximación de orden reducido de un sistema de orden superior es un tema complejo. La mayoría de los métodos existentes tienen fallas de uno u otro tipo. Los lectores serios deben remitirse a la literatura [1,2] acerca del tema para profundizar más.

7-10 Propiedades en el dominio del tiempo de sistemas en tiempo discreto

7-10-1 Respuesta en el tiempo de sistemas de control en tiempo discreto

Para llevar a cabo el diseño de sistemas de control en tiempo discreto en el dominio del tiempo o dominio z, se deben primero estudiar las propiedades en el dominio del tiempo y en el dominio z de estos sistemas. Se aprendió en el Cap. 3 que las respuestas de salida a la mayoría de los sistemas de control en tiempo discreto son funciones de una variable de tiempo continuo t. Por lo que las especificaciones del dominio en el tiempo, tales como el sobrepaso máximo, tiempo de levantamiento, factor de amortiguamiento relativo, etcétera, pueden también aplicarse a sistemas en tiempo discreto. La única diferencia es que para hacer uso de herramientas analíticas tales como la transformada z, la información contínua encontrada en un sistema en tiempo discreto se muestra para que la variable de tiempo independiente sea kT, en donde T es el periodo de muestreo en segundos. También, en vez de trabajar en el plano s, el desempeño transitorio de un sistema en tiempo discreto se caracteriza mediante polos y ceros de la función de transferencia en el plano z.

Los objetivos de la siguiente sección son como siguen:

1. Presentar métodos para búsqueda de respuestas en el tiempo discretizadas de sistemas de control en tiempo discreto.
2. Describir las características importantes de la respuesta en el tiempo discretizada $y(kT)$.
3. Establecer la importancia de la localización de polos y ceros en el plano z.
4. Proveer la comparación entre respuestas en el tiempo de sistemas de control en tiempo contínuo y de sistemas de control en tiempo discreto.

En la Fig. 7-44 se muestra el diagrama de bloque del sistema de control en tiempo discreto. La función de transferencia del sistema es:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \tag{7-190}$$

en donde $GH(z)$ señala la transformada z de $G(s)H(s)$. Una vez que se da la entrada $R(z)$, la secuencia de salida $y(kT)$ puede determinarse utilizando uno de los dos métodos siguientes:

1. Tome la transformada z inversa de $Y(z)$ utilizando la tabla de la transformada z.
2. Expanda $Y(z)$ en una serie de potencias de z^{-k}.

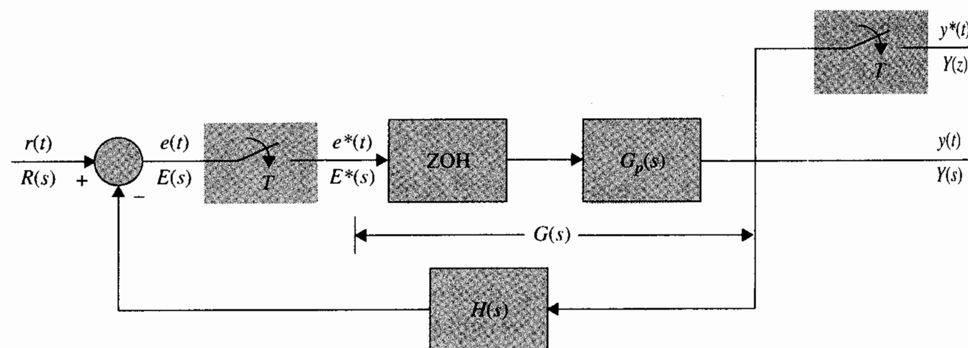


Figura 7-44 Diagrama de bloque del sistema de control en tiempo discreto.

La transformada z de la salida se define como:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k} \tag{7-191}$$

La respuesta en el tiempo discreto $y(kT)$ puede determinarse relacionando el coeficiente de z^{-k} para $k = 0, 1, 2, \ldots$. Es bueno recordar que $y(kT)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, contiene solamente la información de la muestra en $y(t)$ en los instantes del muestreo. Si el periodo de muestreo es grande en comparación con la constante de tiempo más significativa en el sistema, $y(kT)$ puede no ser una representación exacta de $y(t)$.

Ejemplo 7-11

Considere que el sistema de control de posición descrito en la sección 7-6 tiene señales discretas en la trayectoria directa, por lo que el sistema está ahora descrito mediante el diagrama de bloque de la Fig. 7-44. Para $K = 14.5$, la función de transferencia del proceso controlado es:

$$G_p(s) = \frac{65{,}250}{s(s + 361.2)} \tag{7-192}$$

La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema en tiempo discreto es:

$$G_{h0}G_p(z) = \mathcal{Z}[G_{h0}G_p(s)] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G_p(s)}{s}\right] \tag{7-193}$$

Para un periodo de muestreo de $T = 0.001$ s, la función de la transformada z en la ecuación (7-193) se evalúa como:

$$G_{h0}G_p(z) = \frac{0.029z + 0.0257}{z^2 - 1.697z + 0.697} \tag{7-194}$$

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema es:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_{h0}G_p(z)}{1 + G_{h0}G_p(z)} = \frac{0.029z + 0.0257}{z^2 - 1.668z + 0.7226} \tag{7-195}$$

en donde $R(z)$ y $Y(z)$ representan las transformadas z de la entrada y la salida, respectivamente. Para una entrada de escalón unitario, $R(z) = z/(z-1)$. La transformada de la salida $Y(z)$ se convierte en:

$$Y(z) = \frac{z(0.029z + 0.0257)}{(z-1)(z^2 - 1.668z + 0.7226)} \tag{7-196}$$

La secuencia de salida $y(kT)$ puede determinarse dividiendo el numerador del polinomio de $Y(z)$ entre su denominador del polinomio para obtener una serie de potencias en z^{-1}. La Fig. 7-45 muestra la gráfica de $y(kT)$, y se puntea *versus* kT cuando $T = 0.001$ s. Para comparación, la respuesta al escalón unitario del sistema en tiempo continuo en la sec. 7-6 con $K = 14.5$ se muestra en la misma figura. Como se observa en la Fig. 7-45, cuando el periodo de muestreo es menor, las respuestas de salida de los sistemas en tiempo discreto y en tiempo continuo son muy similares. El valor máximo de $y(kT)$ es 1.0731, o un 7.31% de sobretiro máximo, en contra del 4.3% de sobrepaso máximo para el sistema en tiempo continuo.

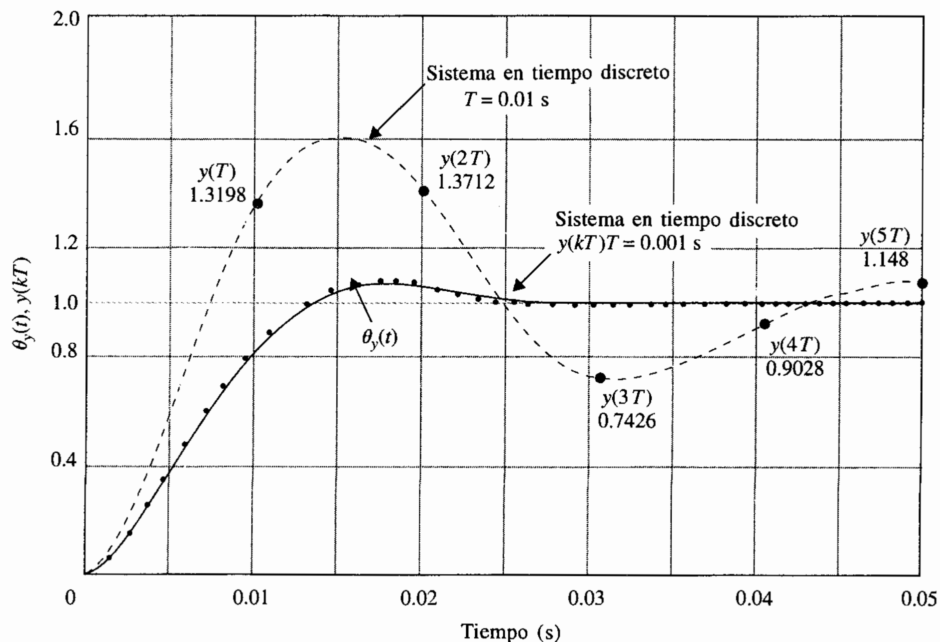


Figura 7-45 Comparación de las respuestas al escalón unitario de sistemas en tiempo discreto y continuo.

Cuando el periodo de muestreo se incrementa a 0.01 s, la función de transferencia de trayectoria directa del sistema en tiempo discreto es:

$$G_{h0}G_p(z) = \frac{1.3198z + 0.4379}{z^2 - 1.027z + 0.027} \tag{7-197}$$

y la función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{1.3198z + 0.4379}{z^2 + 0.2929z + 0.4649} \tag{7-198}$$

La secuencia de salida $y(kT)$ con $T = 0.01$ s se muestra en la Fig. 7-45 con $k = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5. La salida verdadera en tiempo continuo del sistema en tiempo discreto se muestra como la curva punteada. Nótese que el valor máximo de $y(kT)$ es 1.3712, pero el sobrepaso máximo verdadero es considerablemente mayor que éste. Por lo que el periodo de muestreo más largo solamente hace menos estable al sistema, pero la salida de muestreo no proporciona medidas exactas de la salida verdadera.

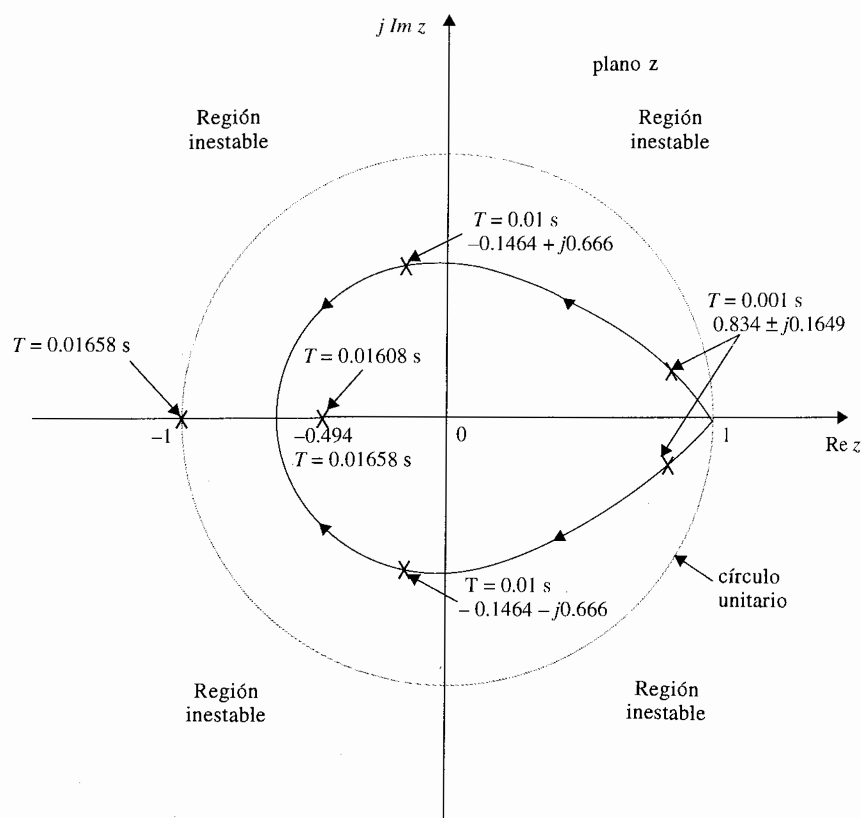


Figura 7-46 Trayectorias de las raíces de un sistema de control de segundo orden en tiempo discreto cuando el periodo de muestreo T varía.

▲ Dos raíces iguales de la ecuación característica en el eje real negativo en el plano z no corresponden al amortiguamiento crítico.

▲ Cuando una o más raíces de la ecuación característica caen en el eje negativo en el plano z, la respuesta será oscilatoria con picos positivos y negativos.

Cuando el periodo de muestreo se incrementa a 0.01658 s, la ecuación característica del sistema en tiempo discreto es:

$$z^2 + 1.4938z + 0.4939 = 0 \tag{7-199}$$

que tiene raíces en $z = -0.494$ y $z = -1.000$. La raíz en -1.000 provoca que la respuesta al escalón del sistema oscile con una amplitud constante, y el sistema sea marginalmente estable. Por lo que para todos los periodos de muestreo mayores a 0.01658 s, el sistema en tiempo discreto será inestable. De la sec. 7-6 se aprendió que el sistema en tiempo continuo de segundo orden siempre está estable para los valores finitos positivos de K. Para el sistema en tiempo discreto, el muestreo y retención tiene el efecto de hacer al sistema menos estable, y si el valor de T es demasiado grande, el sistema de segundo orden puede volverse inestable. La Fig. 7-46 muestra las trayectorias de las dos raíces de la ecuación característica del sistema en tiempo discreto cuando el periodo de muestreo T varía. Nótese que cuando el periodo de muestreo es muy pequeño, las dos raíces de la ecuación característica están muy cercanas al punto $z = 1$ y son complejas. Cuando $T = 0.01608$ s, las dos raíces se vuelven iguales y reales y son negativas. A diferencia del sistema en tiempo continuo, el caso de las dos raíces idénticas en el eje real *negativo* en el plano z *no corresponde* al amortiguamiento crítico. Para sistemas en tiempo discreto, cuando una o más raíces de la ecuación característica caen en el eje real negativo del plano z, la respuesta del sistema oscilará con picos positivos y negativos. La Fig. 7-47 muestra la respuesta oscilatoria de $y(kT)$ cuando $T = 0.01658$ s, que es el valor crítico para estabilidad. Más allá este valor de T, una raíz se moverá fuera del círculo unitario, y el sistema se vuelve inestable. ▲

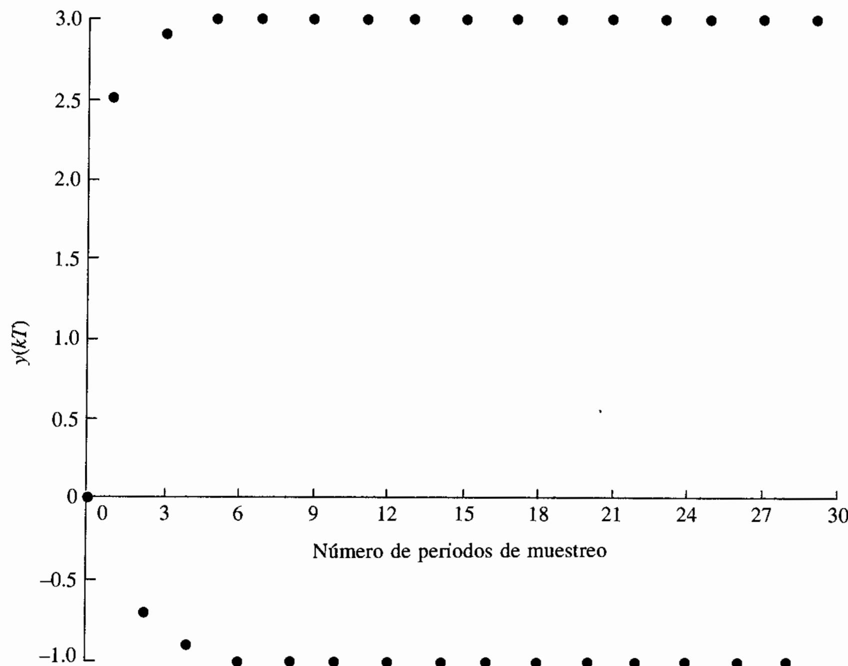


Figura 7-47 Respuesta oscilatoria de un sistema en tiempo discreto con el periodo de muestreo $T = 0.01658$ s.

7-10-2 Mapeo de trayectorias entre el plano s y el plano z

Para propósitos de diseño y análisis, es importante estudiar la relación entre la localización de las raíces de la ecuación característica en el plano z y la respuesta en el tiempo del sistema en tiempo discreto. En el Cap. 3 la propiedad periódica de la transformada de Laplace de la transformada de Laplace de la señal de muestreo $R^*(s)$, se estableció mediante la ecuación (3-93) [*i.e.*, $R^*(s + jm\omega_s) = R^*(s)$, en donde m es un entero]. En otras palabras, dado cualquier punto s_1 en el plano s, la función $R^*(s)$ tiene el mismo valor en todos los puntos periódicos $s = s_1 + jm\omega_s$. Por lo que el plano s se divide en un número infinito de franjas periódicas, como se muestra en la Fig. 7-48(a). La franja entre $\omega = \omega_s/2$ se conoce como la **franja primaria** y todas las demás en frecuencias mayores se conocen como las **franjas complementarias.** La Fig. 7-48(b) muestra la transformación de las tiras periódicas desde el plano s al plano z, y los detalles se explican como sigue.

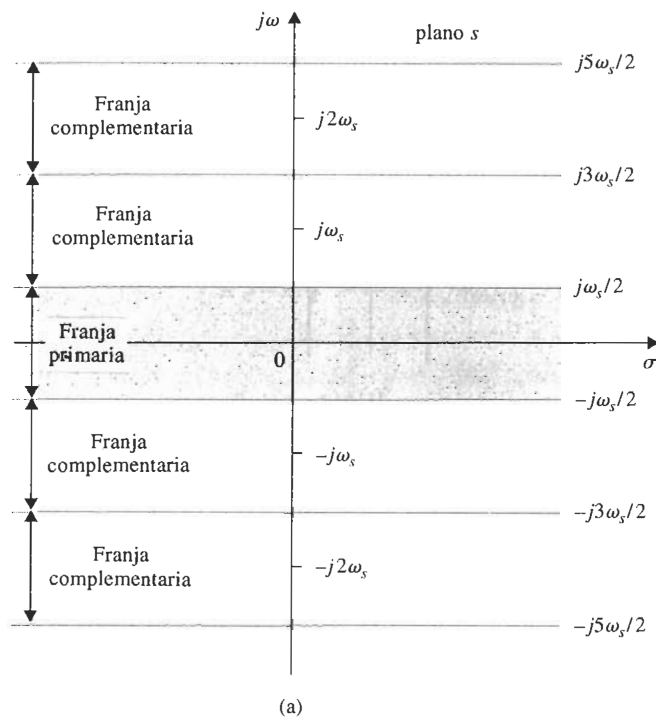
1. El eje $j\omega$ en el plano s se transforma en el círculo unitario $|z| = 1$ en el plano z.
2. Los límites en las franjas periódicas, $s = jm\omega_s/2$, $m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$, se transforman dentro del eje real negativo del plano z. La porción dentro del círculo unitario corresponde a $\sigma < 0$, y la porción fuera del círculo unitario corresponde a $\sigma > 0$.
3. Las líneas centrales de las franjas periódicas, $s = jm\omega_s$, $m = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$, se transforman dentro del eje real positivo del plano z. La porción dentro del círculo unitario corresponde a $\sigma < 0$, y la porción fuera del círculo unitario corresponde a $\sigma > 0$.
4. Las regiones que se muestran en las franjas periódicas en el semiplano izquierdo del plano s se transforman dentro del interior del círculo unitario en el plano z.
5. El punto $z = 1$ en el plano z corresponde al origen, $s = 0$, en el plano x.
6. El origen, $z = 0$, en el plano z corresponde a $s = -\infty$ en el plano s.

En el análisis del dominio en el tiempo de sistemas en tiempo continuo, se proyecta el factor de amortiguamiento α, el factor de amortiguamiento relativo ζ, y la frecuencia natural no amortiguamiento ω_n para caracterizar la dinámica del sistema. Los mismos parámetros pueden definirse para sistemas en tiempo discreto con respecto a las raíces de la ecuación característica en el plano z. Los lugares geométricos de α constante, ζ constante y ω_n constante en el plano z se describen a continuación:

Lugar geométrico de amortiguamiento constante. Para un factor de amortiguamiento constante $\sigma = \alpha$ en el plano s, la trayectoria correspondiente en el plano z se describe mediante:

(7-200)

que es un círculo centrado en el origen con un radio de $e^{\alpha T}$, como se muestra en la Fig. 7-49.



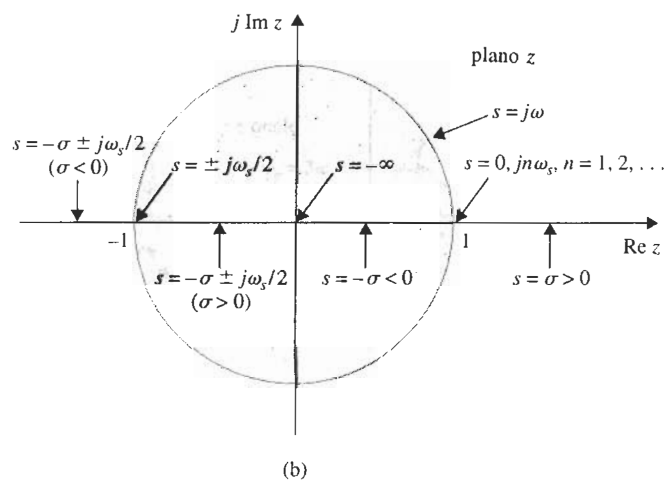


Figura 7-48 Franjas periódicas en el plano s y los puntos y líneas correspondientes entre el plano s y el plano z.

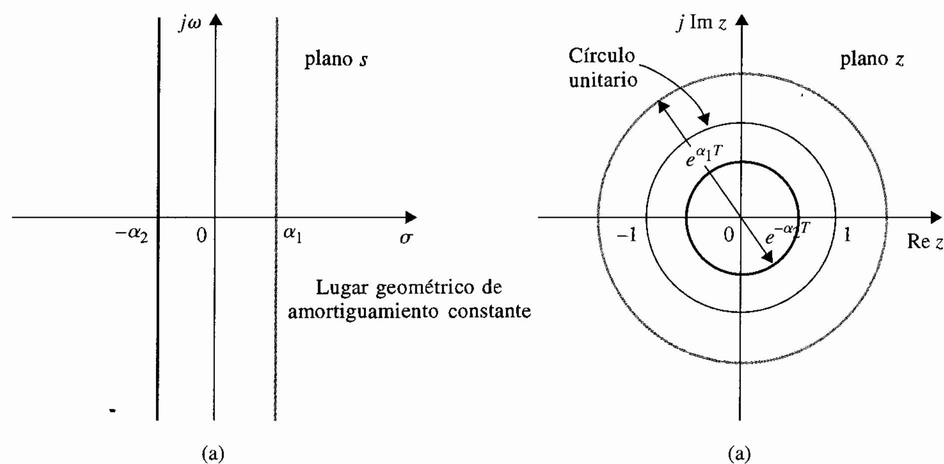


Figura 7-49 Lugar geométrico de amortiguamiento constante en el plano s y en el plano z.

Lugar geométrico de frecuencia constante. El lugar geométrico de frecuencia constante $\omega = \omega_1$ en el plano s es una línea paralela horizontal al eje σ. El lugar geométrico correspondiente en el plano z es una línea recta que nace desde el origen en un ángulo de $\theta = \omega_1 T$ radianes, medidos desde el eje real, como se muestra en la Fig. 7-50.

Lugar geométrico de frecuencia natural no amortiguada constante. El lugar geométrico de ω_n constante en el plano s son círculos concéntricos con el centro en el origen, y el radio es

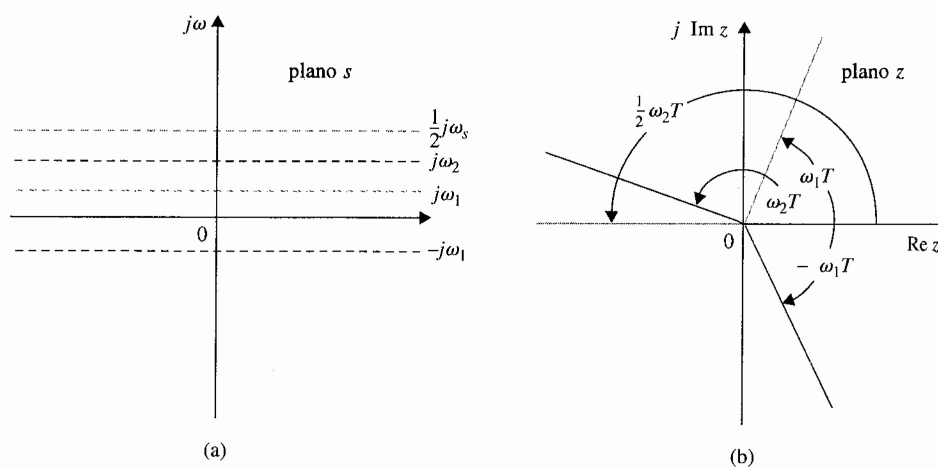


Figura 7-50 Lugar geométrico de frecuencia constante en el plano s y el plano z.

ω_n. Los lugares de la constante correspondiente ω_n en el plano z se muestran en la Fig. 7-51 para $\omega_n = \omega_s/16$ a $\omega_s/2$. Sólo se muestran los lugares geométricos dentro del círculo unitario.

Lugar geométrico de factor de amortiguamiento relativo constante. Para un factor de amortiguamiento relativo constante ζ, los lugares geométricos en el plano s se describen mediante:

$$s = -\omega \tan \beta + j\omega \tag{7-201}$$

Los lugares geométricos de ζ constante en el plano z se describen mediante:

$$z = e^{Ts} = e^{-2\pi(\tan\beta)/\omega_s} \angle 2\pi\omega/\omega_s \tag{7-202}$$

en donde:

$$\beta = \text{sen}^{-1}\zeta = \text{constante} \tag{7-203}$$

Para un valor dado de β, el lugar geométrico de ζ constante en el plano z se describe en la ecuación (7-203), es una espiral logarítmica para $0° < \beta < 90°$. La Fig. 7-52 muestra varias constantes típicas de los lugares de ζ en la mitad superior del plano z.

7-10-3 Relación entre las raíces de la ecuación característica y la respuesta transitoria

Basados en las discusiones anteriores, se puede establecer que la relación básica entre las raíces de la ecuación característica y la respuesta transitoria de un sistema en tiempo discreto,

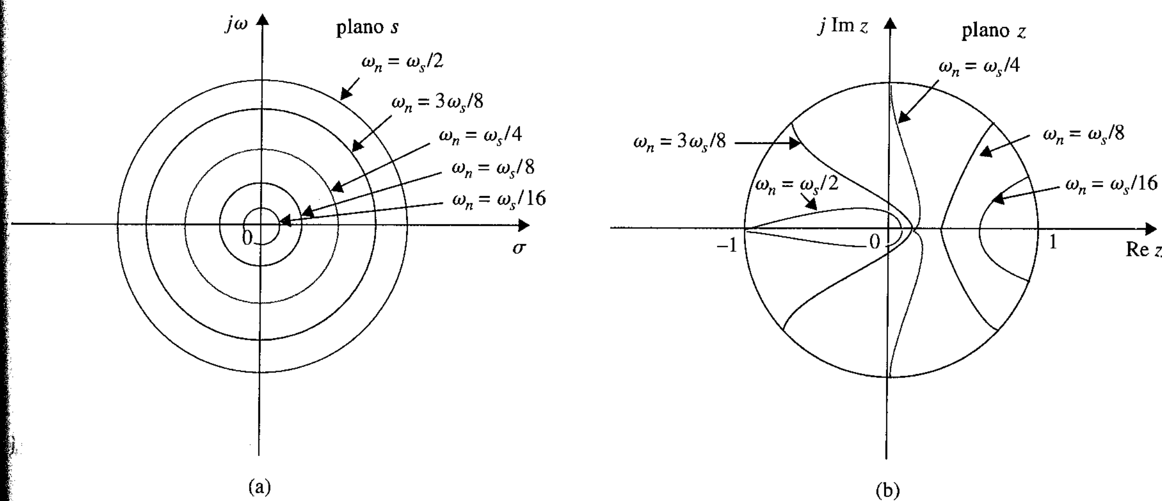


Figura 7-51 Lugar geométrico de frecuencia natural no amortiguada constante en el plano s y el plano z.

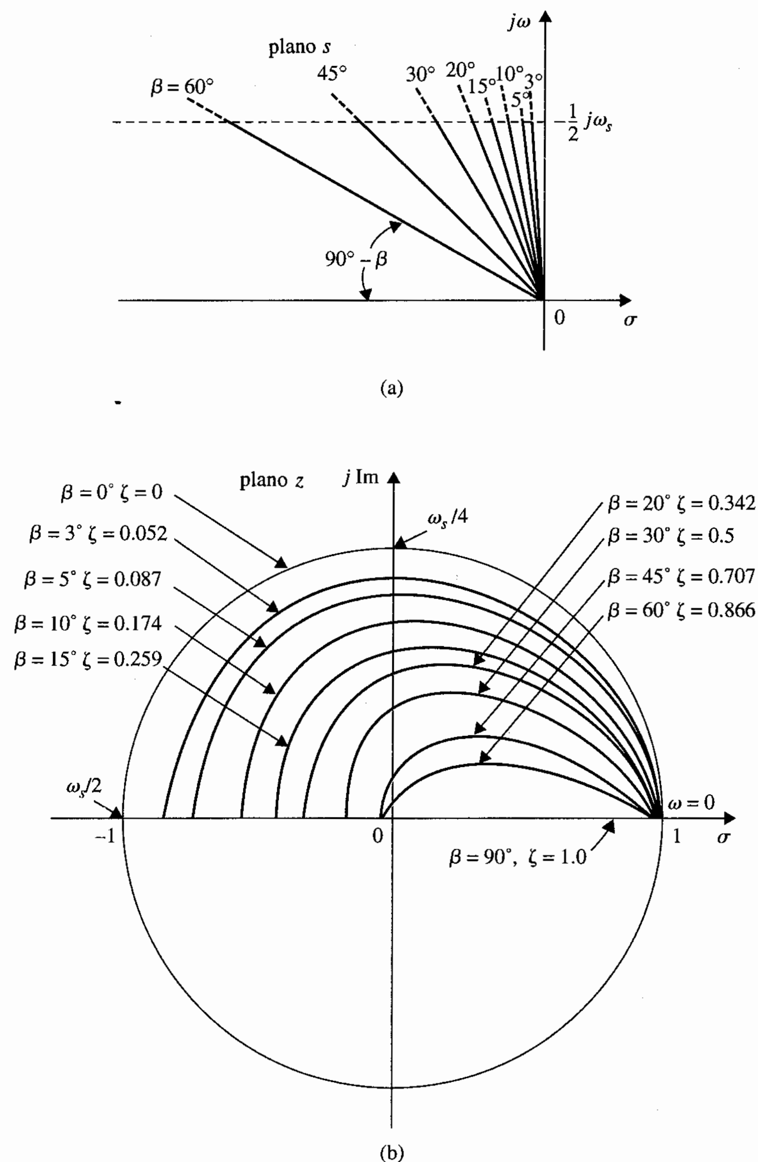


Figura 7-52 Lugar geométrico de factor de amortiguamiento relativo constante en el plano *s* y el plano *z*.

teniendo en mente que los ceros de la función de transferencia en lazo cerrado también jugará un papel importante en la respuesta, pero no en la estabilidad del sistema.

Raíces sobre el eje real positivo en el plano *z*. Las raíces en el eje real positivo dentro del círculo unitario del plano *z* da respuestas que crecen y después decaen exponencialmente

cuando kT crece. Respuestas típicas en relación con la localización de la raíz se muestran en la Fig. 7-53. Las raíces más cercanas al círculo unitario caerán lentamente. Cuando la raíz está en $z = 1$, la respuesta tiene una amplitud constante. Las raíces fuera del círculo unitario corresponde a sistemas inestables, y las respuestas se incrementarán con kT.

Raíces sobre el eje real negativo en el plano z. El eje real negativo en el plano z corresponde a los límites de las franjas periódicas en el plano s. Por ejemplo, cuando $s = -\sigma_1 \pm j\omega_s/2$, los puntos complejos conjugados están en los límites de las franjas primarias en el plano s. Los puntos correspondientes del plano z son:

$$z = e^{-\sigma_1 T} e^{\pm j\omega_s T/2} = -e^{-\sigma_1 T} \tag{7-204}$$

que están en el eje real negativo del plano z. Para la frecuencia de $\omega_s/2$, la secuencia de salida tendrá exactamente una muestra en cada mitad del periodo del sobre. Por lo que la secuencia de salida ocurrirá en pulsos negativos y positivos alternos, como se muestra en la Fig. 7-53(b).

Raíces complejas conjugadas en el plano z. Las raíces complejas conjugadas dentro del círculo unitario en el plano z corresponden a las respuestas oscilatorias que decaen cuando kT crece. Las raíces que están más cercanas al círculo unitario disminuirán lentamente. Cuando las raíces se mueven hacia los cuadrantes segundo y tercero, la frecuencia de oscilación de las respuestas se incrementa. Remítase a la Fig. 7-53 para los ejemplos típicos.

7-10-4 Análisis de error en estado estable de sistemas de control en tiempo discreto

Ya que las señales de entrada y salida de un sistema de control en tiempo discreto típico son funciones en tiempo continuo, como se muestra en el diagrama de bloque de la Fig. 7-44, la señal de error debería definirse como:

$$e(t) = r(t) - y(t) \tag{7-205}$$

en donde $r(t)$ es la entrada y $y(t)$ es la salida. El análisis de error aquí conducido es solamente para sistemas con realimentación unitaria con $H(s) = 1$. Debido a las señales discretas que aparecen dentro del sistema, la transformada z o las ecuaciones diferenciales se utilizan frecuentemente, de tal forma que la entrada y la salida están representadas en formato de muestreo, $r(kT)$ y $y(kT)$, respectivamente. Por lo que la señal de error está mejor representada por $e^*(t)$ o $e(kT)$. Esto es:

$$e^*(t) = r^*(t) - y^*(t) \tag{7-206}$$

o

$$e(kT) = r(kT) - y(kT) \tag{7-207}$$

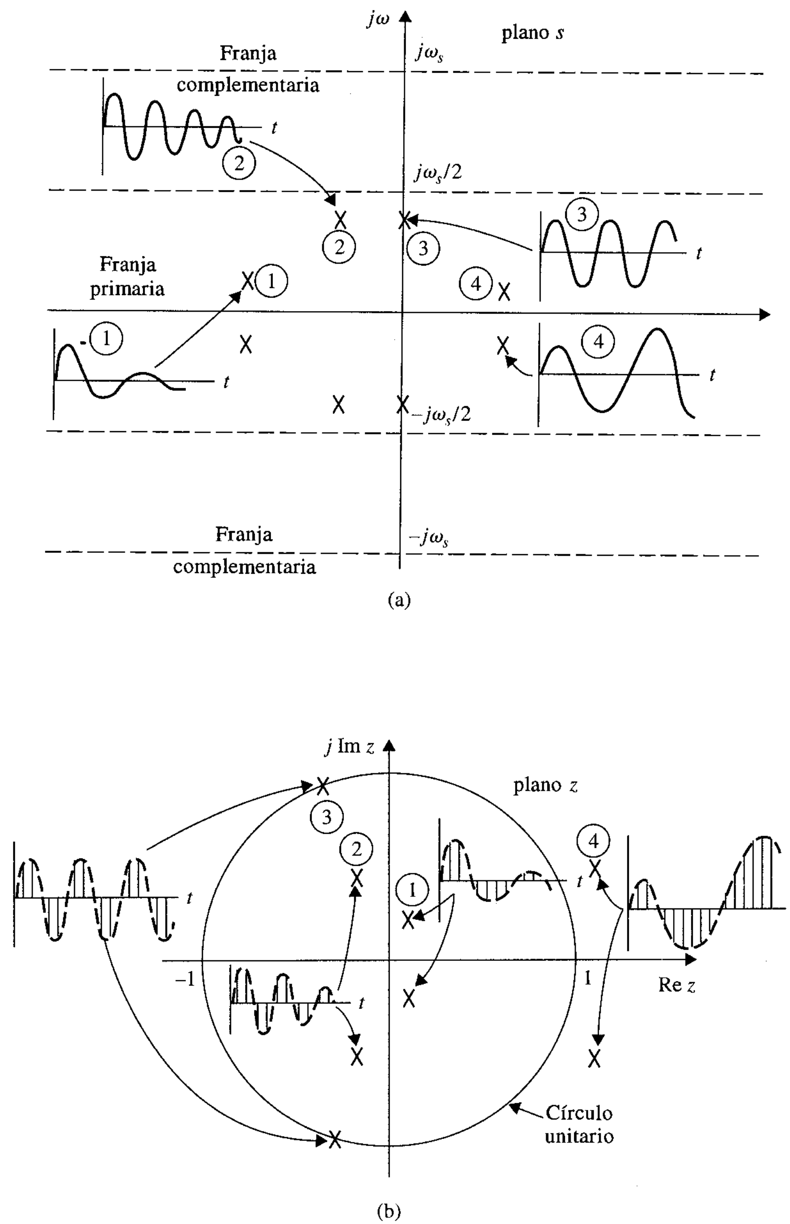
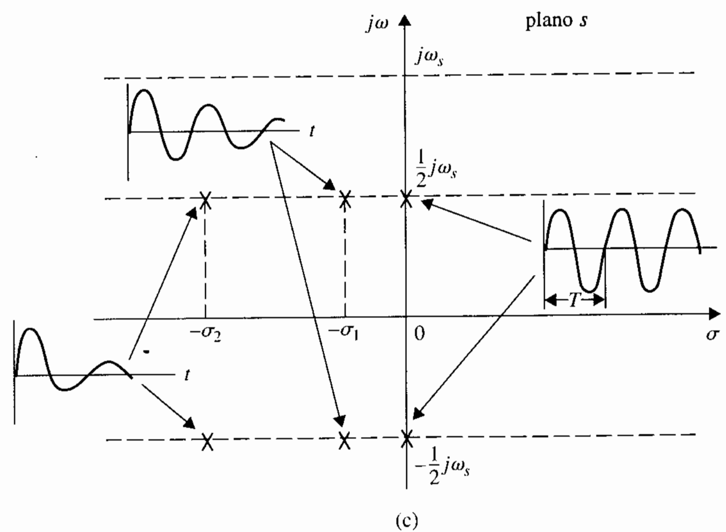
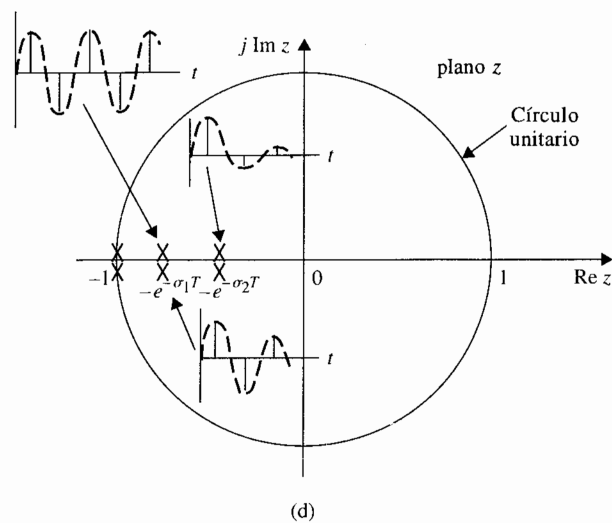


Figura 7-53 (a) Respuestas transitorias correspondientes a la localización de varios polos de $Y^*(s)$ en el plano s (sólo polos complejos conjugados). (b) Secuencia de respuesta transitoria correspondiente a la localización de varios polos de $Y(z)$ en el plano z.



(c)



(d)

Figura 7-53 ***(continuación)*** (c) Respuestas transitorias correspondientes a la localización de varios polos de $Y^*(s)$ en el plano s (polos complejos conjugados en los límites entre franjas periódicas). (d) Secuencia de respuesta transitoria correspondiente a la localización de varios polos de $Y(z)$ en el plano z.

El error de estado estable en los instantes del muestreo se define como:

$$e_{ss}^* = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{k \to \infty} e(kT) \tag{7-208}$$

Mediante el uso del teorema del valor final de la transformada z, el error en estado estable es:

$$e_{ss}^* = \lim_{k \to \infty} e(kT) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1})E(z) \tag{7-209}$$

estipula que la función $(1 - z^{-1})E(z)$ no tiene ningún polo en o fuera del círculo unitario en el plano z. Debe señalarse que ya que el error verdadero del sistema es $e(t)$; e_{ss}^* predice solamente el error en estado estable en el instante del muestreo.

Expresando $E(z)$ en términos de $R(z)$ y $G_{h0}G_p(z)$, la ecuación (11-50) se escribe:

$$e_{ss}^* = \lim_{k \to \infty} e(kT) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \frac{R(z)}{1 + G_{h0}G_p(z)} \tag{7-210}$$

Esta expresión muestra que el error en estado estable depende de la entrada de referencia $R(z)$ así como la función de transferencia de trayectoria directa $G_{h0}G_p(z)$. Justo como en los sistemas en tiempo continuo, se deben considerar solamente los tres tipos básicos de señales de entrada y las constantes de error asociadas y relacionadas con e_{ss}^* a éstos y el tipo del sistema.

Asúmase que la función de transferencia del proceso controlado en el sistema de la Fig. 7-44 es de la forma:

$$G_p(s) = \frac{K(1 + T_a s)(1 + T_b s) \cdots (1 + T_m s)}{s^j (1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots (1 + T_n s)} \tag{7-211}$$

en donde $j = 0, 1, 2, \ldots$. La función de transferencia $G_{h0}G_p(z)$ es:

$$G_{h0}G_p(s) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{K(1 + T_a s)(1 + T_b s) \cdots (1 + T_m s)}{s^{j+1}(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots (1 + T_n s)}\right] \tag{7-212}$$

Error en estado estable debido a una entrada de función de escalón

Cuando la entrada al sistema, $r(t)$, en la Fig. 7-44 es una función escalón con magnitud R, la transformada z de $r(t)$ es:

$$R(z) = \frac{Rz}{z - 1} \tag{7-213}$$

Sustituyendo $R(z)$ en la ecuación (7-210), se tiene:

$$e_{ss}^* = \lim_{z\to 1}\frac{R}{1 + G_{h0}G_p(z)} = \frac{R}{1 + \lim_{z\to 1} G_{h0}G_p(z)} \tag{7-214}$$

La **constante de error a escalón** se define como:

$$K_p^* = \lim_{z\to 1} G_{h0}G_p(z) \tag{7-215}$$

La ecuación (7-214) se convierte en:

$$e_{ss}^* = \frac{R}{1 + K_p^*} \tag{7-216}$$

Por lo que se puede observar que el error en estado estable del sistema de control en tiempo discreto en la Fig. 7-44 se relaciona con la constante del error a escalón K_p^* en la misma forma como en el caso en tiempo continuo, excepto que K_p^* está dado en la ecuación (7-215).

Se puede relacionar K_p^* al tipo de sistema como sigue. Para un sistema de tipo 0, $j = 0$ en la ecuación (7-212), y la ecuación se convierte en:

$$G_{h0}G_p(z) = (1 - z^{-1})\mathscr{Z}\left[\frac{K(1 + T_a s)(1 + T_b s)\cdots(1 + T_m s)}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)\cdots(1 + T_n s)}\right] \tag{7-217}$$

Realizando la expansión en fracciones parciales de la función dentro de los corchetes de la ecuación (7-217), se tiene:

$$\begin{aligned} G_{h0}G_p(z) &= (1 - z^{-1})\mathscr{Z}\left[\frac{K}{s} + \text{términos debidos a los polos no cero}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\left[\frac{Kz}{z - 1} + \text{términos debidos a los polos no cero}\right] \end{aligned} \tag{7-218}$$

Ya que los términos debido a los polos no cero no contienen el término $(z - 1)$ en el denominador, la constante de error a escalón se escribe:

$$K_p^* = \lim_{z\to 1} G_{h0}G_p(z) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})\frac{Kz}{z - 1} = K \tag{7-219}$$

Similarmente, para un sistema de tipo 1 $G_{h0}G_p(z)$ se tendrá un término s^2 en el denominador que corresponde a un término $(z-1)^2$. Esto causa que la constante de error a escalón K_p^* sea infinita. Lo mismo es verdadero para cualquier tipo de sistema mayor a 1. El resumen de las constantes de error y el error en estado estable debido a la entrada escalón es como sigue:

Tipo de Sistema	K_p^*	e_{ss}^*
0	K	$R/(1+K)$
1	∞	0
2	∞	0

Error en estado estable debido a una entrada de función rampa

Cuando la entrada de referencia al sistema en la Fig. 7-44 es una función rampa de magnitud R, $r(t) = Rtu_s(t)$. El error en estado estable en la ecuación (7-210) se convierte en:

$$e_{ss}^* = \lim_{z\to 1} \frac{RT}{(z-1)[1+G_{h0}G_p(z)]} = \frac{R}{\lim_{z\to 1}[(z-1)/T]G_{h0}G_p(z)} \tag{7-220}$$

Asúmase que **la constante de error a rampa** se define como:

$$K_v^* = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}[(z-1)G_{h0}G_p(z)] \tag{7-221}$$

Entonces, la ecuación (7-220) se convierte en:

$$e_{ss}^* = \frac{R}{K_v^*} \tag{7-222}$$

La constante de error a rampa K_v^* es significativa sólo cuando la entrada $r(t)$ es una función rampa y si la función $(z-1)G_{h0}G_p(z)$ en la ecuación (7-221) no tiene ningún polo en o fuera

del círculo unitario $|z| = 1$. Las relaciones entre el error en estado estable e_{ss}^*, K_v^*, y el tipo de sistema cuando la entrada es una función rampa con magnitud R se resumen como sigue:

Tipo de Sistema	K_v^*	e_{ss}^*
0	0	∞
1	K	R/K
2	∞	0

Error en estado estable debido a una entrada de función parabólica

Cuando la entrada es una función parabólica, $r(t) = Rtu_s(t)/2$; la transformada z de $r(t)$ es:

$$R(z) = \frac{RT^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} \tag{7-223}$$

De la ecuación (7-210), el error en estado estable en los instantes del muestreo es:

$$\begin{aligned} e_{ss}^* &= \frac{T^2}{2} \lim_{z \to 1} \frac{R(z+1)}{(z-1)^2[1 + G_{h0}G_p(z)]} \\ &= \frac{R}{(1/T^2) \lim_{z \to 1} (z-1)^2 G_{h0}G_p(z)} \end{aligned} \tag{7-224}$$

Definiendo la **constante de error a parábola** como:

$$K_a^* = \frac{1}{T^2} \lim_{z \to 1} [(z-1)^2 G_{h0}G_p(z)] \tag{7-225}$$

el error en estado estable debido a una entrada de función parabólica es:

$$e_{ss}^* = \frac{R}{K_a^*} \tag{7-226}$$

Las relaciones entre el error en estado estable e_{ss}^*, K_a^*, y el tipo de sistema cuando la entrada es una función parabólica con su transformada z descrita mediante la ecuación (7-223) se resumen como sigue:

Tipo de Sistema	K_a^*	e_{ss}^*
0	0	∞
1	0	∞
2	K	R/K
3	∞	0

7-11 Resumen

Este capítulo está dedicado al análisis en el dominio del tiempo de sistemas de control lineales en tiempo continuo y en tiempo discreto. El tiempo de respuesta de los sistemas de control se divide en respuestas transitoria y de estado estable. El error en estado estable es una medida de la exactitud del sistema cuando el tiempo se aproxima al infinito. Cuando el sistema tiene realimentación unitaria, para las entradas de escalón, rampa y parabólica, el error de estado estable se caracteriza por las constantes de error K_p, K_v y K_a, respectivamente, así como del **tipo** de sistema. Cuando se aplica el análisis de error en estado estable, el teorema del valor final de la transformada de Laplace es la base; debe averiguarse que el sistema de lazo cerrado es estable o el análisis de error no es válido. Las constantes de error no se definen para sistemas con realimentación no unitaria. Para sistemas con realimentación no unitaria, un método de determinación del error en estado estable se presenta usando la función de transferencia en lazo cerrado.

La respuesta transitoria se caracteriza por el criterio tal como el de **sobrepaso máximo, tiempo de levantamiento, tiempo de retardo** y **tiempo de asentamiento,** y parámetros tales como **factor de amortiguamiento relativo, frecuencia natural no amortiguada** y **constante de tiempo.** Las expresiones analíticas de estos parámetros pueden todas estar relacionadas con los parámetros del sistema simplemente si la función de transferencia es del prototipo de segundo orden. Para sistemas de segundo orden que no son prototipo, y sistemas de mayor orden, las relaciones analíticas entre los parámetros transitorios y las constantes del sistema son difíciles de determinar. Las simulaciones en computadora se recomiendan para estos sistemas.

Se lleva a cabo un análisis en el dominio del tiempo de un sistema de control de posición. El análisis de la respuesta transitoria y del estado estable se llevan a cabo primero mediante una aproximación del sistema como un sistema de segundo orden. Se demuestra el efecto de variar la ganancia del amplificador K en el desempeño transitorio y del estado estable. Se introduce el concepto de la técnica del lugar geométrico de las raíces. Es entonces cuando el sistema se analiza como un sistema de tercer orden, y se demuestra que la aproximación de segundo orden es exacta solamente para valores bajos de K.

Se demuestran los efectos de adicionar polos y ceros a las funciones de transferencia de la trayectoria directa y en lazo cerrado. También se discuten los polos dominantes de las funciones de transferencia. Esto establece la importancia de la localización de los polos de la función de transferencia en el plano s, y bajo qué condiciones los polos insignificantes (y ceros) pueden despreciarse, por lo que a la respuesta transitoria se refiere.

En la Sec. 7-9 se presenta un método de aproximación para un sistema de orden superior mediante uno equivalente de bajo orden. El sistema de orden bajo rastrea al de orden alto en el sentido de que son similares las respuestas de frecuencia de los dos sistemas.

Finalmente, la última parte de este capítulo está dedicada al análisis en el dominio del tiempo de sistemas de control en tiempo discreto. Se demuestra que prácticamente todos los análisis en estado estable y el transitorio de sistemas en tiempo continuo pueden extenderse a los sistemas en tiempo discreto. Recuerde que cuando se utiliza el método de la transformada z, la dirección de la respuesta en el tiempo es la señal muestreada $y(kT)$. La interpretación de la configuración de los polos y ceros en el plano z debe realizarse con respecto al círculo unitario $|z| = 1$.

Preguntas de repaso

1. Dé las definiciones de las constantes de error, K_p, K_v y K_a.
2. Especifique el tipo de entrada a la cual está dedicada la constante de error K_p.
3. Especifique el tipo de entrada a la cual está dedicada la constante de error K_v.
4. Especifique el tipo de entrada a la cual está dedicada la constante de error K_a.
5. Defina una constante de error si la entrada a un sistema de control con realimentación unitaria es descrito mediante $r(t) = t^3u_s(t)/6$.
6. Dé la definición del **tipo** de sistema de un sistema lineal invariante con el tiempo.
7. Si un sistema de control con realimentación unitaria es del tipo 2, es verdad que el error en estado estable del sistema a una entrada escalón o rampa será cero. **(V) (F)**
8. Las fricciones lineales y no lineales generalmente degradarán el error en estado estable de un sistema de control. **(V) (F)**
9. El sobrepaso máximo de una respuesta al escalón unitario del sistema prototipo de segundo orden nunca excederá del 100% cuando el factor de amortiguamiento relativo ζ y la frecuencia natural no amortiguada ω_n son todos positivos. **(V) (F)**
10. Para el sistema prototipo de segundo orden, cuando la frecuencia natural no amortiguada ω_n se incrementa, el sobrepaso máximo de la salida, permanece igual. **(V) (F)**
11. El sobrepaso máximo del siguiente sistema nunca excederá el 100% cuando ζ, ω_n y T son todos positivos.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2(1 + Ts)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \textbf{(V)} \quad \textbf{(F)}$$

12. El incrementar la frecuencia natural no amortiguada generalmente reducirá el tiempo de levantamiento de la respuesta al escalón. **(V) (F)**
13. El incrementar la frecuencia natural no amortiguada, generalmente reducirá el tiempo de asentamiento de la respuesta al escalón. **(V) (F)**
14. El adicionar un cero a la función de transferencia de la trayectoria directa generalmente mejorará el amortiguamiento del sistema, y por lo tanto siempre reducirá el sobrepaso máximo del sistema. **(V) (F)**
15. Dada la siguiente ecuación característica de un sistema de control lineal, el incrementar el valor de K aumentará la frecuencia de oscilación del sistema:

$$s^3 + 3s^2 + 5s + K = 0 \qquad \textbf{(V)} \quad \textbf{(F)}$$

16. Para la ecuación característica dada en la pregunta 15, el incrementar el coeficiente del término s^2 generalmente mejorará el amortiguamiento del sistema. (V) (F)
17. La localización de las raíces de la ecuación característica en el plano s dará una indicación definitiva sobre el sobrepaso máximo de la respuesta transitoria del sistema. (V) (F)
18. La siguiente función de transferencia $G(s)$ puede aproximarse mediante $G_L(s)$, ya que el polo en -20 es más grande que el polo dominante en $s = -1$.

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+20)} \qquad G_L(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$ (V) (F)

19. Dé las definiciones de las constantes de error K_p^*, K_v^*, y K_a^* de sistemas de control en tiempo discreto con realimetación unitaria.
20. Señale la diferencia entre las respuestas en el tiempo de un sistema con un polo en $z = 1$ y un sistema con un polo en $z = -1$.
21. Cuando las raíces de la ecuación característica de un sistema en tiempo discreto se encuentran en el segundo y tercer cuadrantes dentro del círculo unitario en el plano z, la frecuencia de oscilación del sistema generalmente será más alta que si las raíces están en el primer y cuarto cuadrantes. (V) (F)

Las respuestas a las preguntas verdadero y falso se dan en la siguiente sección de problemas.

Referencias

Simplificación de sistemas lineales

1. **E. J. DAVISON,** "A Method for Simplifying Linear Dynamic Systems," *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-11, pp. 93–101, Jan. 1966.
2. **T. C. HSIA,** "On the Simplification of Linear Systems," *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-17, pp. 372–374, June 1972.

Sobrepaso en la respuesta escalón

3. **M. VIDYASAGAR,** "On Undershoot and Nonminimum Phase Zeros," *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-31, p. 440, May 1986.
4. **T. NORIMATSU and M. ITO,** "On the Zero Non-regular Control System," *J. Inst. Electr. Eng. Japan,* Vol. 81, pp. 566–575, 1961.

Sistemas de control en tiempo discreto

Véanse las referencias al final del Cap. 3.

Problemas

▲ Especificaciones en el dominio s

7.1. Un par de polos complejos conjugados en el plano s se requieren para satisfacer las especificaciones siguientes. Para cada especificación, haga un bosquejo de la región en el plano s en donde debería localizarse el polo.

(a) $\zeta \geq 0.707$ $\quad \omega_n \geq 2$ rad/s (amortiguamiento positivo)

(b) $0 \leq \zeta \leq 0.707$ $\omega_n \leq 2$ rad/s (amortiguamiento positivo)

(c) $\zeta \leq 0.5$ $\quad 1 \leq \omega_n \leq 5$ rad/s (amortiguamiento positivo)

(d) $0.5 \leq \zeta \leq 0.707$ $\quad \omega_n \leq 5$ rad/s (amortiguamiento positivo y negativo)

▲ Tipo de sistema

7-2. Determine el tipo de los siguientes sistemas con realimentación unitaria para los cuales se dan a continuación las siguientes funciones de transferencia de latrayectoria directa:

(a) $G(s) = \dfrac{K}{(1+s)(1+10s)(1+20s)}$ (b) $G(s) = \dfrac{10e^{-0.2s}}{(1+s)(1+10s)(1+20s)}$

(c) $G(s) = \dfrac{10(s+1)}{s(s+5)(s+6)}$ (d) $G(s) = \dfrac{100(s-1)}{s^2(s+5)(s+6)^2}$

(e) $G(s) = \dfrac{10(s+1)}{s^3(s^2+5s+5)}$ (f) $G(s) = \dfrac{100}{s^3(s+2)^2}$

▲ Constantes de error

7-3. Determine las constantes de error a escalón, a rampa y a parábola del siguiente sistema de control con realimentación unitaria. Las funciones de transferencia de la trayectoria directa son:

(a) $G(s) = \dfrac{1000}{(1+0.1s)(1+10s)}$ (b) $G(s) = \dfrac{100}{s(s^2+10s+100)}$

(c) $G(s) = \dfrac{K}{s(1+0.1s)(1+0.5s)}$ (d) $G(s) = \dfrac{100}{s^2(s^2+10s+100)}$

(e) $G(s) = \dfrac{1000}{s(s+10)(s+100)}$ (f) $G(s) = \dfrac{K(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2+s+1)}$

▲ Error en estado estable en sistemas con realimentación unitaria

7-4. Para el sistema de control con realimentación unitaria que se describe en el problema 7-3, determine el error en estado estable para una entrada escalón unitario, una entrada rampa unitaria, y una entrada parabólica $(t^2/2)u_s(t)$. Verifique la estabilidad del sistema antes de aplicar el teorema del valor final.

▲ Error en estado estable en sistemas con realimentación no unitaria

7-5. Las siguientes funciones de transferencia se dan para un sistema de control con realimentación no unitario de un solo lazo. Ecuentre los errores en estado estable debido a una entrada escalón unitario, una entrada rampa unitaria y una entrada parabólica $(t^2/2)u_s(t)$.

(a) $G(s) = \dfrac{1}{s^2+s+2}$ $\quad H(s) = \dfrac{1}{s+1}$

(b) $G(s) = \dfrac{1}{s(s+5)}$ $\quad H(s) = 5$

(c) $G(s) = \dfrac{1}{s^2(s+10)}$ $\quad H(s) = \dfrac{s+1}{s+5}$

(d) $G(s) = \dfrac{1}{s^2(s+12)}$ $\quad H(s) = 5(s+2)$

▲ Error en estado estable en sistemas de un solo lazo

7-6. Encuentre los errores en estado estable de los siguientes sistemas de control de un solo lazo para una entrada escalón unitario, una entrada rampa unitaria y una entrada parabólica $(t^2/2)u_s(t)$. Para sistemas que incluyen un parámetro K, encuentre su valor para que las respuestas sean válidas.

(a) $M(s) = \dfrac{s+4}{s^4 + 16s^3 + 48s^2 + 4s + 4}, K_H = 1$

(b) $M(s) = \dfrac{K(s+3)}{s^3 + 3s^2 + (K+2)s + 3K}, K_H = 1$

(c) $M(s) = \dfrac{s+5}{s^4 + 15s^3 + 50s^2 + 10s}, H(s) = \dfrac{10s}{s+5}$

(d) $M(s) = \dfrac{K(s+5)}{s^4 + 17s^3 + 60s^2 + 5Ks + 5K}, K_H = 1$

▲ Constantes de error en errores en estado estable

7-7. En la Fig. 7P-7 se muestra el diagrama de bloque de un sistema de control. Encuentre las constantes de error al escalón, rampa y parábola. La señal de error se define como $e(t)$. Encuentre los errores en estado estable en términos de K y K_t cuando se aplican las siguientes entradas. Asuma que el sistema es estable.

(a) $r(t) = u_s(t)$ (b) $r(t) = tu_s(t)$ (c) $r(t) = (t^2/2)u_s(t)$

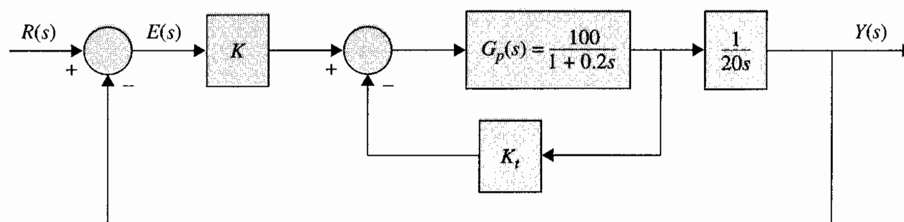


Figura 7P-7

▲ Constantes de error en errores en estado estable

7-8. Repita el problema 7-7 cuando la función de transferencia del proceso, es:

$$G_p(s) = \frac{100}{(1+0.1s)(1+0.5s)}$$

¿Qué simplificaciones deben hacerse, si es posible, en los valores de K y K_t para que las respuestas sean válidas? Determine el error en estado estable mínimo que se puede alcanzar con una entrada de rampa unitaria al variar los valores de K y K_t.

▲ Error en estado estable

7-9. Para el sistema de control de posición que se muestra en la Fig. 3P-19, determine lo siguiente:

(a) Encuentre el valor en estado estable de la señal de error $\theta_e(t)$, en términos de los parámetros del sistema cuando la entrada es una función escalón unitario.

(b) Repita la parte (a) cuando la entrada es una función rampa unitaria. Suponga que el sistema es estable.

▲ Error en estado estable

7-10. En la Fig. 7P-10 se muestra el diagrama de bloque de un sistema de control realimentado. La señal de error se define como $e(t)$.

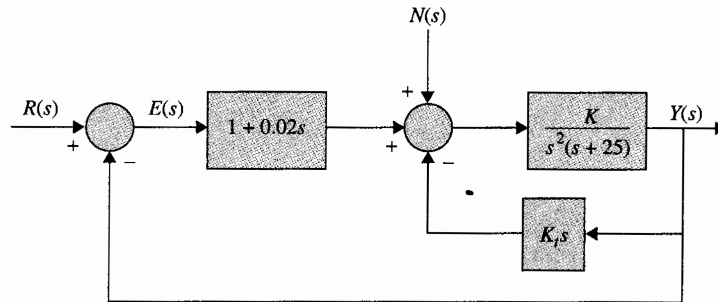


Figura 7P-10

(a) Encuentre el error en estado estable del sistema en términos de K y K_t, cuando la entrada es una función rampa unitaria. Dé las coacciones de los valores de K y K_t para que la respuesta sea válida. Suponga que $n(t) = 0$ para esta parte.

(b) Encuentre el valor del estado estable de $y(t)$ cuando $n(t)$ es una función de estaclón unitario. Asuma que $r(t) = 0$ y que el sistema es estable.

▲ Error en estado estable debido a una entrada y perturbación

7-11. En la Fig. 7P-11 se muestra el diagrama de bloque de un sistema de control lineal, en donde $r(t)$ es la referencia de entrada y $n(t)$ es la perturbación.

(a) Encuentre el valor en estado estable de $e(t)$ cuando $n(t) = 0$ y $r(t) = tu_s(t)$. Encuentre las condiciones en los valores de α y K para que la solución sea válida.

(b) Encuentre el valor en estado estable de $y(t)$ cuando $r(t) = 0$ y $n(t) = u_s(t)$.

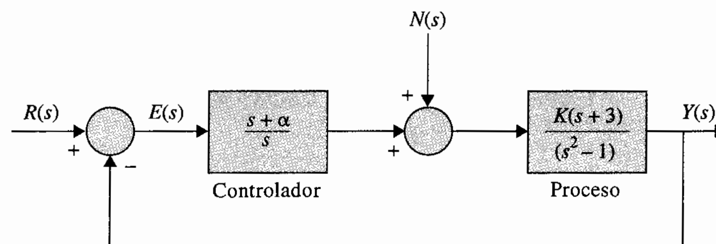


Figura 7P-11

▲ Función de transferencia del sistema prototipo de segundo orden

7-12. La respuesta al escalón unitario de un sistema de control lineal se muestra en la Fig. 7P-12. Encuentre la función de transferencia de un sistema prototipo de segundo orden para modelar el sistema.

▲ Sobrepaso máximo y tiempo de levantamiento

7-13. Para el sistema de control que se muestra en la Fig. 7P-7, encuentre los valores de K y K_t, para que el sobrepaso máximo de la salida sea aproximadamente 4.3% y el tiempo de levantamiento t_r sea aproximadamente 0.2 s. Utilice la ecuación (7-104) para la relación de tiempo

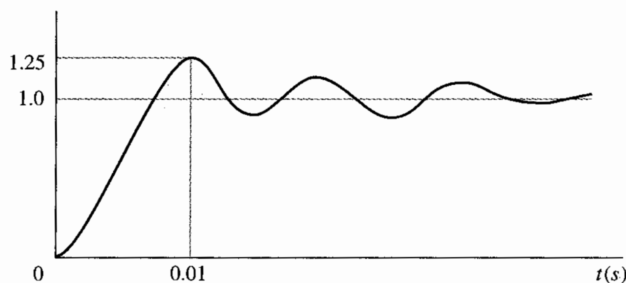


Figura 7P-12

de levantamiento. Simule el sistema con cualquier programa de simulación de tiempo de respuesta para verificar la exactitud de su solución.

▲ Sobrepaso máximo y tiempo de levantamiento

7-14. Repita el problema 7-13 con un sobrepaso máximo de 10% y un tiempo de levantamiento de 0.1 s.

7-15. Repita el problema 7-13 con un sobrepaso máximo de 20% y un tiempo de levantamiento de 0.05 s.

▲ Sobrepaso máximo y tiempo de retardo

7-16. Para el sistema de control que se muestra en la Fig. 7P-7, encuentre los valores de K y K_t para que el sobrepaso máximo de la salida sea aproximadamente 4.3% y el tiempo de retardo t_d sea aproximadamente 0.1 s. Utilice la ecuación (7-102) para la relación del tiempo de retardo. Simule el sistema con un programa de computadora para verificar la exactitud de su solución.

▲ Sobrepaso máximo y tiempo de retardo

7-17. Repita el problema 7-16 con un sobrepaso máximo de 10% y un tiempo de retardo de 0.05 s.

7-18. Repita el roblema 7-16 con un sobrepaso máximo de 20% y un tiempo de retardo de 0.01 s.

▲ Factor de amortiguamiento relativo y tiempo de asentamiento

7-19. Para el sistema de control que se muestra en la Fig. 7P-7, encuentre los valores de K y K_t para que el factor de amortiguamiento relativo del sistema sea 0.6 y el tiempo de asentamiento de la respuesta al escalón unitario sea de 0.1 s. Utilice la ecuación (7-108) para la relación de tiempo de asentamiento. Simule el sistema con un programa de computadora para verificar la exactitud de sus resultados.

▲ Sobrepaso máximo y tiempo de asentamiento

7-20. **(a)** Repita el problema 7-19 con un sobrepaso máximo de 10% y un tiempo de asentamiento de 0.05 s.

(b) Repita el problema **7**-19 con un sobrepaso máximo de 20% y un tiempo de asentamiento de 0.01 s.

▲ Factor de amortiguamiento relativo y tiempo de asentamiento

7-21. Repita el problema 7-19 con un factor de amortiguamiento relativo de 0.707 y un tiempo de asentamiento de 0.1 s. Use la ecuación (7-109) para la relación de tiempo de asentamiento.

▲ Factor de amortiguamiento relativo, tiempo de levantamiento, error en estado estable

7-22. La función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema de control con realimentación unitaria es:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)(s+30)}$$

en donde a y K son constantes reales.

(a) Encuentre los valores de a y K para que el factor de amortiguamiento relativo de las raíces complejas de la ecuación característica sea 0.5 y el tiempo de levantamiento de la respuesta al escalón unitario sea aproximadamente de 1 s. Use la ecuación (7-104) como una aproximación al tiempo de levantamiento. Con los valores encontrados de a y K, determine el tiempo de levantamiento real, utilizando simulación por computadora.

(b) Con los valores de a y K que encontró en la parte (a), encuentre los errores en estado estable del sistema cuando la referencia de entrada es (i) una función de escalón unitario, y (ii) una función de rampa unitaria.

▲ Respuesta en el tiempo

7-23. En la Fig. 7P-23, se muestra el diagrama de bloque de un sistema de control lineal.

(a) Por medio de prueba y error, encuentre el valor de K para que la ecuación característica tenga dos raíces reales iguales y el sistema sea estable. Puede usar cualquier programa de cómputo para búsqueda de raíces para resolver este problema.

(b) Encuentre la respuesta al escalón unitario del sistema cuando K tiene el valor encontrado en la parte (a). Utilice cualquier programa de simulación para esto. Establezca todas las condiciones iniciales a cero.

(c) Repita la parte (b) cuando $K = -1$. ¿Qué hay de particular acerca de la respuesta al escalón para t minúscula, y qué puede estar causándolo?

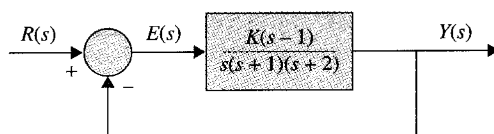


Figura 7P-23

▲ Realimentación del estado y plano del parámetro

7-24. Un proceso controlado se presenta mediante las siguientes ecuaciones dinámicas:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + 5x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -6x_1(t) + u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

El control se obtiene a través de la realimentación del estado con:

$$u(t) = -k_1x_1(t) - k_2x_2(t) + r(t)$$

en donde k_1 y k_2 son constantes reales y $r(t)$ es la entrada de referencia.

(a) Encuentre la localización en el plano k_1 *versus* k_2 (k_1 = eje vertical) en donde la totalidad del sistema tiene una frecuencia natural no amortiguada de 10 rad/s.

(b) Encuentre la localización en el plano k_1 *versus* k_2 en donde la totalidad del sistema tiene un factor de amortiguamiento relativo de 0.707.

(c) Encuentre los valores de k_1 y k_2 tales que $\zeta = 0.707$ y $\omega_n = 10$ rad/s.

(d) Asuma que la señal de error se define como $e(t) = r(t) - y(t)$. Encuentre el error en estado estable cuando $r(t) = u_s(t)$ y k_1 y k_2 son los valores encontrados en la parte (c).

(e) Encuentre la localización en el plano k_1 *versus* k_2 en donde el error de estado estable debido a la entrada escalón unitario es cero.

▲ Plano del parámetro y trayectorias especiales

7-25. En la Fig. 7P-25 se muestra el diagrama de bloque de un sistema de control lineal. Construya el plano del parámetro de K_p *versus* K_D (K_p es el eje vertical) y muestra las siguientes trayectorias de regiones en el plano:

(a) Regiones estable e inestable.

(b) Trayectorias en donde el amortiguamiento es crítico ($\zeta = 1$).

(c) Región en donde el sistema está sobreamortiguado ($\zeta > 1$).

(d) Región en donde el sistema está subamortiguado ($\zeta < 1$).

(e) La trayectoria en donde la constante del error parabólica K_a es 1000 s^{-2}

(f) La trayectoria en donde la frecuencia natural no amortiguada ω_n es 50 rad/s.

(g) La trayectoria en donde el sistema es, ya sea no controlable o no observable. (Sugerencia: Busque la cancelación de polos y ceros.)

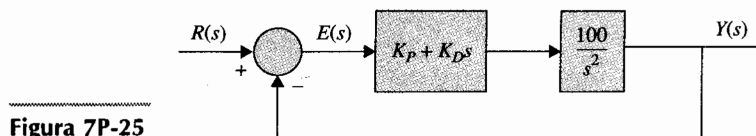


Figura 7P-25

▲ Desempeño en estado estable

7-26. En la Fig. 7P-26 se muestra el diagrama de bloque de un sistema de control lineal. Los parámetros fijos del sistema se dan como $T = 0.1$, $J = 0.01$ y $K_i = 10$.

(a) Cuando $r(t) = tu_s(t)$ y $T_d(t) = 0$, determine cómo los valores de K y K_t afectan el valor de estado estable de $e(t)$. Encuentre las restricciones de K y K_t para que el sistema sea estable.

(b) Suponga que $r(t) = 0$. Determine cómo los valores de K y K_t afectan el valor en estado estable de $y(t)$ cuando la entrada perturbada $T_d(t) = u_s(t)$.

(c) Suponga que $K_t = 0.01$ y $r(t) = 0$. Encuentre el valor mínimo en estado estable de $y(t)$ que pueda obtenerse variando K cuando $T_d(t)$ es una función escalón unitario. Encuentre el valor de K. Desde el punto de vista transitorio, ¿operaría el sistema con este valor de K ? Explique.

(d) Suponga que se desea operar el sistema con el valor de K como se seleccionó en la parte (c). Encuentre el valor de K_t para que las raíces complejas de la ecuación característica tengan una parte real de −2.5. Encuentre todas las tres raíces de la ecuación característica.

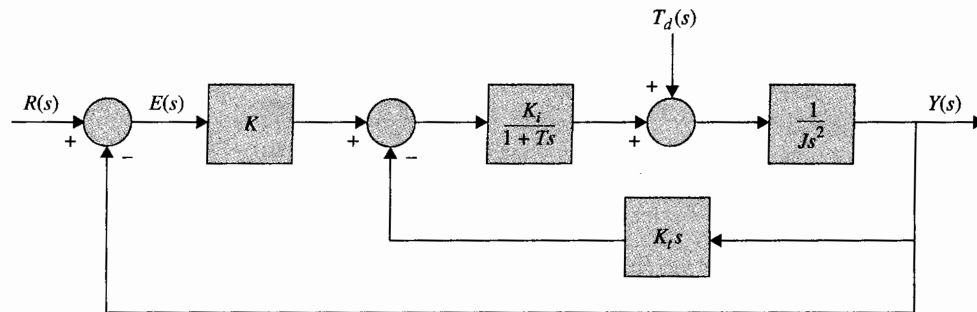
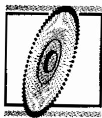


Figura 7P-26



▲ Sistema de control de impresión por margarita

7-27. El motor de dc del sistema de control de impresión con una margarita descrito en el problema 4-14, tiene la función de transferencia de la trayectoria directa:

$$G(s) = \frac{\Theta_o(s)}{\Theta_e(s)} = \frac{nK_sK_iK_LK}{\Delta(s)}$$

en donde:

$$\Delta(s) = s[L_aJ_mJ_Ls^4 + J_L(R_aJ_m + B_mL_a)s^3 + (n^2K_LL_aJ_L + K_LL_aJ_m + K_iK_bJ_L + R_aB_mJ_L)s^2 + (n^2R_aK_LJ_m + R_aK_LJ_m + B_mK_LL_a)s + R_aB_mK_L + K_iK_bK_L]$$

y donde $K_i = 9$ oz-pulg./A, $K_b = 0.636$ V/rad/s, $R_a = 5\ \Omega$, $L_a = 1$ mH, $K_s = 1$ V/rad, $n = 1/10$, $J_m = J_L = 0.001$ oz-pulg.-s^2, y $B_m \cong 0$. La ecuación característica del sistema en lazo cerrado es:

$$\Delta(s) + nK_sK_iK_LK = 0$$

(a) Suponga que $K_L = 10\ 000$ oz-pulg /rad. Escriba la función de transferencia de la trayectoria directa $G(s)$ y encuentre los polos de $G(s)$. Encuentre el valor crítico de K para que el sistema en lazo cerrado sea estable. Encuentre las raíces de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado cuando K está en estabilidad marginal.

(b) Repita la parte (a) cuando $K_L = 1000$ oz-pulg /rad.

(c) Repita la parte (a) cuando $K_L = \infty$ (es decir, el eje del motor es rígido).

(d) Compare los resultados de las partes (a), (b) y (c) y comente los efectos de los valores de K_L en los polos de $G(s)$ y las raíces de la ecuación característica.

▲ Sistema de control de un misil guiado

7-28. El diagrama de bloque del sistema de control de posición de un misil guiado descrito en el problema 4-13 se muestra en la Fig. 7P-28. La instrucción de entrada es $r(t)$, y $d(t)$ representa *una entrada de perturbación*. El objetivo de este problema es estudiar el efecto del controlador $G_c(s)$ en las respuestas en estado estable y transitoria del sistema.

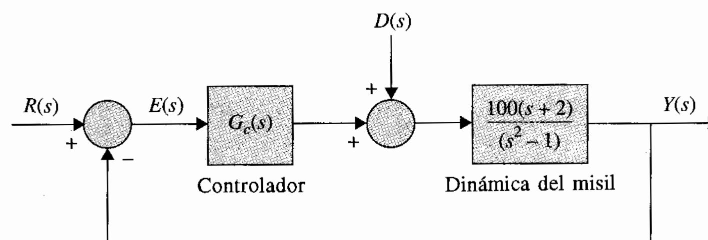


Figura 7P-28

(a) Supóngase que $G_c(s) = 1$. Encuentre el error en estado estable del sistema cuando $r(t)$ es una función escalón unitario. Establezca $d(t) = 0$.

(b) Suponga que $G_c(s) = (s + \alpha)/s$. Encuentre el error en estado estable cuando $r(t)$ es una función escalón unitario.

(c) Obtenga la respuesta al escalón unitario del sistema para $0 \leq t \leq 0.5$ s. Con $G_c(s)$ como se dio en la parte (b), y $\alpha = 5$, 50 y 500. Suponga condiciones iniciales a cero. Registre el sobrepaso máximo de $y(t)$ para cada caso. Utilice cualquier programa de simulación por computadora que tenga disponible. Comente los efectos de la variación del valor de α del controlador en la respuesta transitoria.

(d) Haciendo $r(t) = 0$ y $G_c(s) = 1$. Encuentre el valor en estado estable de $y(t)$ cuando $d(t) = u_s(t)$.

(e) Suponga que $G_c(s) = (s + \alpha)/s$. Encuentre el valor en estado estable de $y(t)$ cuando $d(t) = u_s(t)$

(f) Obtenga la respuesta de salida para $0 \leq t \leq 0.5$ s, con $G_c(s)$ como se dio en la parte (e) cuando $r(t) = 0$ y $d(t) = u_s(t)$; $\alpha = 5$, 50 y 500. Utilice condiciones iniciales a cero.

(g) Comente sobre el efecto de variación del valor de α del controlador en las respuestas transitorias de $y(t)$ debido a $r(t)$ y $d(t)$.

▲ Sistema de control de nivel de líquido de orden reducido

7-29. En la Fig. 7P-29 se muestra un diagrama de bloque que representa el sistema de control de nivel de líquido descrito en el problema 6-13. El nivel de líquido se representa por $h(t)$, y N señala el número de entradas.

(a) Ya que uno de los polos de la función de transferencia en lazo abierto está relativamente lejos hacia la izquierda en el eje real del plano s en $s = -10$, se sugiere que este polo puede ser despreciado. Aproxime el sistema mediante un sistema de segundo orden despreciando el polo de $G(s)$ en $s = -10$. La aproximación deberá ser válida para ambas respuestas, la transitoria y la de estado estable. Aplique las fórmulas para el sobrepaso máximo y el tiempo pico $t_{máx}$ al modelo de segundo orden para $N = 1$ y $N = 10$.

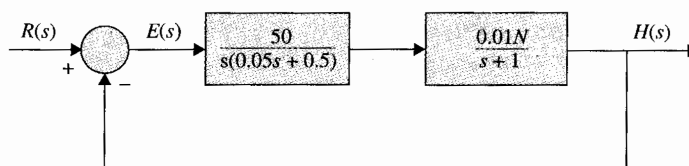


Figura 7P-29



(b) Obtenga la respuesta al escalón unitario (con condiciones iniciales a cero) del sistema original de tercer orden con $N = 1$ y luego con $N = 10$. Compare las respuestas del sistema original con aquellas del sistema de aproximación de segundo orden. Comente la exactitud de la aproximación como una función de N.

▲ Efectos de movimiento de los ceros en lazo abierto

7-30. La función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema de control con realimentación unitaria es:

$$G(s) = \frac{1 + T_z s}{s(s+1)^2}$$

Calcule y grafique las respuestas al escalón unitario del sistema en lazo cerrado para $T_z = 0$, 0.5, 1, 10 y 50. Suponga condiciones iniciales a cero. Utilice cualquier programa de simulación que esté disponible. Comente sobre los efectos de los varios valores de T_z en la respuesta al escalón.

▲ Efecto de movimiento de los polos en lazo abierto

7-31. La función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema de control de realimentación unitaria es:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2(1 + T_p s)}$$

Calcule y grafique las respuestas al escalón unitario del sistema en lazo cerrado para $T_p = 0$, 0.5 y 0.707. Suponga condiciones iniciales a cero. Utilice cualquier programa de simulación. Encuentre el valor crítico de T_p para que el sistema en lazo cerrado sea marginalmente estable. Comente sobre los efectos del polo en $s = -1/T_p$ en $G(s)$.

▲ Sistema de control de nivel de líquido de orden reducido

7-32. Este problema está dedicado a la aproximación del sistema de tercer orden mediante uno de segundo orden, utilizando el método descrito en la Sec. 7-9. El sistema de control de nivel de líquido descrito en los problemas 6-13 y 7-29 tiene la función de transferencia de trayectoria directa:

$$G(s) = \frac{10N}{s(s+1)(s+10)}$$

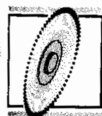
(a) Para N = 1, encuentre la función de transferencia $G_L(s)$ de un sistema de segundo orden que se aproxima al sistema de tercer orden. Calcule las respuestas al escalón unitario de los sistemas, y observe la cercanía de la aproximación. Compare las raíces de las ecuaciones características de los dos sistemas de lazo cerrado.

(b) Repita la parte (a) con $N = 2$.

(c) Repita la parte (a) con $N = 3$.

(d) Repita la parte (a) con $N = 4$.

(e) Repita la parte (a) con $N = 5$.



▲ Sistema de control de impresión por margarita de orden reducido

7-33. El sistema de un motor de dc para controlar la impresión con una margarita descrito en el problema 4-14 tiene la siguiente función de transferencia de la trayectoria directa cuando $K_L = \infty$:

$$G(s) = \frac{891{,}100K}{s(s^2 + 5000s + 566{,}700)}$$

El sistema va a ser aproximado mediante un sistema de segundo orden utilizando el método descrito en la Sec. 7-9.

(a) Para $K = 1$, encuentre la función de segundo orden de $G_L(s)$ que aproxima a $G(s)$. Calcule y grafique las respuestas de los sistemas a escalón unitario, y evalúe la cercanía de la aproximación. Compare las raíces de las ecuaciones características de los dos sistemas en lazo cerrado.

(b) Repita la parte (a) con $K = 100$.

(c) Repita la parte (a) con $K = 1000$.

▲ Aproximación de orden reducido

7-34. Aproxime el sistema de control que se muestra en la Fig. 7P-23 cunado $K = -1$ mediante un sistema de segundo orden con la función de transferencia en lazo cerrado:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1 + c_1 s}{1 + d_1 s + d_2 s^2}$$

en donde c_1, d_1 y d_2 son constantes reales. Utilice el método que se detalla en la Sec. 7-9. Calcule y grafique las respuestas al escalón unitario del sistema de tercer orden original ($K = -1$), y el sistema de aproximación de segundo orden. Compare las raíces de las ecuaciones características de los dos sistemas.

7-35. Un sistema de control con realimentación unitaria tiene la función de transferencia de la trayectoria directa:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)(s+20)}$$

(a) Para $K = 10$, el sistema de cuarto orden va a ser aproximado mediante un sistema de segundo orden con la función de transferencia en lazo cerrado:

$$L(s) = \frac{G_L(s)}{1 + G_L(s)} = \frac{1}{1 + d_1 s + d_2 s^2}$$

Encuentre d_1 y d_2 utilizando el método detallado en la Sec. 7-9. Calcule y grafique las respuestas al escalón unitario de los sistemas de cuarto y segundo órdenes y compare. Encuentre las raíces de las ecuaciones características de los dos sistemas.

(b) Para $K = 10$, aproxime el sistema mediante un modelo de tercer orden con:

$$L(s) = \frac{1}{1 + d_1 s + d_2 s^2 + d_3 s^3}$$

Lleve a cabo las tareas especificadas en la parte (a).

(c) Repita las partes (a) y (b) con $K = 40$.

▲ Sistema de datos muestreados

7-36. En la Fig. 7P-36 se muestra el diagrama de bloque de un sistema de control de datos muestreados.

(a) Derive las funciones de transferencia de la trayectoria directa y en lazo cerrado del sistema en la transformada z. El periodo de muestreo es de 0.1 s.

(b) Calcule la respuesta al escalón unitario de $y(kT)$ para $k = 0$ a 100.

(c) Repita las partes (a) y (b) para $T = 0.05$ s.

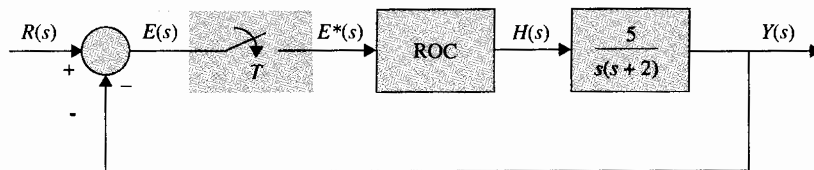


Figura 7P-36

▲ Sistema de datos muestreados, constantes de error

7-37. El diagrama de bloque de un sistema de control de datos muestreados se muestra en la Fig. 7P-37.

(a) Encuentre las constantes de error K_p^*, K_v^*, y K_a^*.

(b) Derive las funciones de transferencia $Y(z)/E(z)$ y $Y(z)/R(z)$.

(c) Para $T = 0.1$ s, encuentre el valor crítico de K para la estabilidad del sistema.

(d) Calcule la respuesta al escalón unitario $y(kT)$ para $k = 0$ a 50 para $T = 0.1$ s y $K_t = 5$.

(e) Repita la parte (d) para $T = 0.1$ s y $K_t = 1$.

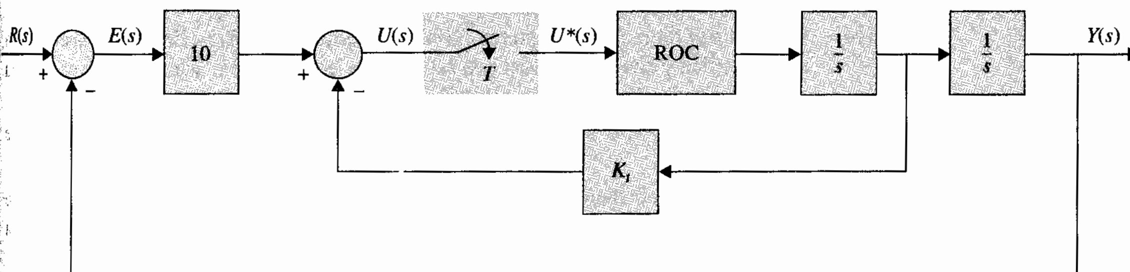


Figura 7P-37

▲ Sistema de control digital de un motor de cd

7-38. El sistema de control de un motor de dc de la trayectoria directa descrito en el problema 5-33 ahora se incorpora en un sistema de control digital, como se muestra en la Fig. 7P-38(a). El microprocesador toma la información del codificador y calcula la velocidad de la información. Esto genera las secuencias de números $\omega(kT)$, $k = 1, 2, \ldots$. El microprocesador entonces genera la señal de error $e(kT) = r(kT) - \omega(kT)$. El control digital se modela mediante

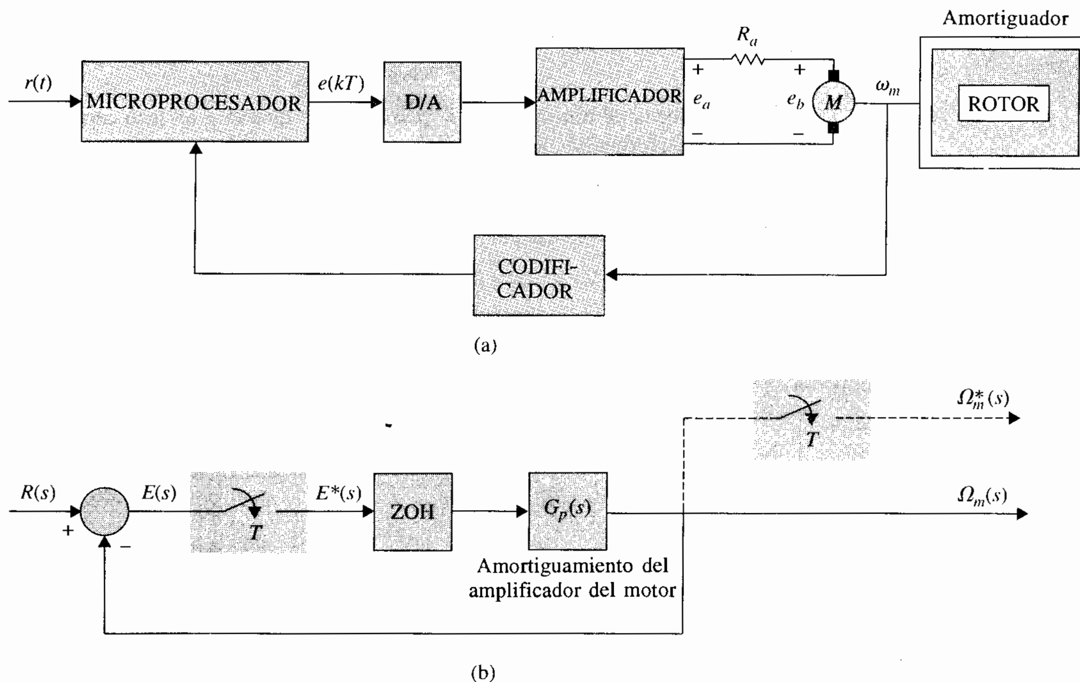


Figura 7P-38

Resp

diagrama de bloque que se muestra en la Fig. 7P-38(b). Utilice los valores de los parámetros dados en el problema 5-33.

(a) Encuentre la función de transferencia $\Omega(z)/E(z)$ con el periodo de muestreo $T = 0.1$ s.

(b) Encuentre la función de transferencia en lazo cerrado $\Omega(z)/R(z)$. Encuentre la ecuación característica y sus raíces. Localice estas raíces en el plano z. Muestre que el sistema en lazo cerrado es inestable cuando $T = 0.1$ s.

(c) Repita las partes (a) y (b) para $T = 0.01$ y 0.001 s. Utilice cualquier programa de simulación.

(d) Encuentre las constantes de error K_p^*, K_v^*, y K_a^*. Encuentre el error en estado estable $e(kT)$ mientras $k \to \infty$ cuando la entrada $r(t)$ es una función escalón unitario, una función rampa unitaria, y una función parábola $t^2u_s(t)/2$.

Problemas adicionales para computadora

Compare y grafique las respuestas al escalón unitario de los sistemas en lazo cerrado con realimentación unitaria con las funciones de transferencia de la trayectoria directa dadas con anterioridad. Suponga condiciones iniciales a cero. Utilice cualquier programa de simulación.

7-39. **(a)** para $T_z = 0, 1, 5, 20,$

$$G(s) = \frac{1 + T_z s}{s(s + 0.55)(s + 1.5)}$$

(b) para $T_z = 0, 1, 5, 20,$

$$G(s) = \frac{1 + T_z s}{s^2 + 2s + 2}$$

7-40. **(a)** para $T_p = 0, 0.5, 1.0,$

$$G(s) = \frac{2}{(s^2 + 2s + 2)(1 + T_p s)}$$

(b) para $T_p = 0, 0.5, 1.0,$

$$G(s) = \frac{10}{s(s + 5)(1 + T_p s)}$$

7-41. $$G(s) = \frac{K}{s(s + 1.25)(s^2 + 2.5s + 10)}$$

(a) para $K = 5$. **(b)** para $K = 10$. **(c)** para $K = 30$.

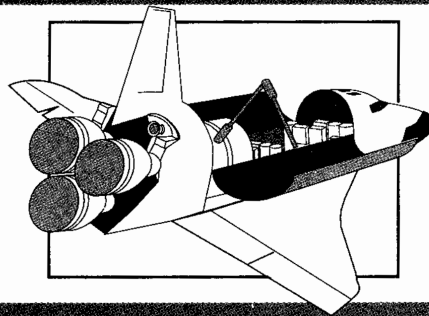
7-42. $$G(s) = \frac{K(s + 2.5)}{s(s + 1.25)(s^2 + 2.5s + 10)}$$

(a) para $K = 5$. **(b)** para $K = 10$. **(c)** para $K = 30$.

Respuestas a verdadero y falso de las preguntas de repaso

7. (F) **8.** (V) **9.** (F) **10.** (V) **11.** (F) **12.** (V) **13.** (V) **14.** (F)
15. (V) **16.** (V) **17.** (F) **18.** (F) **21.** (V)

8 La técnica del lugar geométrico de las raíces



PALABRAS CLAVE Y TEMAS

- ▲ **Lugar geométrico de las raíces**
- ▲ **Propiedades del lugar geométrico de las raíces**
- ▲ **Sensibilidad de las raíces**
- ▲ **Contornos de las raíces**
- ▲ **Lugar geométrico de las raíces de sistemas en tiempo discreto**

8-1 Introducción

▲ El lugar geométrico de las raíces son las trayectorias de la ecuación característica cuando un parámetro del sistema varía.

En el capítulo anterior, se mostró la importancia de los polos y ceros de la función de transferencia en lazo cerrado de un sistema de control lineal sobre el desempeño dinámico del sistema. Las raíces de la ecuación característica, las cuales son los polos de la función de transferencia en lazo cerrado, determinan la estabilidad relativa y absoluta de un sistema lineal SISO. Se debe tener en mente que las propiedades transitorias del sistema también dependen de los ceros de la función de transferencia en lazo cerrado.

Un estudio importante en sistemas de control lineales es la investigación de las trayectorias en las raíces de la ecuación característica—o, simplemente, **lugar geométrico de las raíces**—cuando cierto parámetro del sistema varía. En el Cap. 7, varios ejemplos ilustraron la utilidad del lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica en el estudio de sistemas de control lineal.

Las propiedades básicas de la construcción sistemática del lugar geométrico de las raíces se debe, en primer lugar, a W. R. Evans [1, 3]. En este capítulo se muestra cómo construir estos lugares geométricos mediante el seguimiento de algunas reglas simples. Para dibujar el lugar geométrico de las raíces en forma exacta, se puede emplear un programa del lugar geométrico de las raíces y una computadora digital. Por ejemplo, los programas **ROOTLOCI** en el paquete **ACSP, rlplot** en la caja de herramientas **CSAD**, y **ROOT LOCUS** en el **Program CC,** solo por nombrar algunos, se pueden emplear para generar los datos y las gráficas de los lugares geométricos de las raíces a partir de la función de transferencia del lazo. Si se está en un curso para técnico, todo lo que se tiene que hacer es familiarizarse con uno de estos programas. Sin embargo, es más importante aprender las bases del lugar geométrico de las raíces, sus propiedades, así como la forma de interpretar los datos proporcionados por el lugar geométrico de las raíces para fines de análisis y diseño. Como un ingeniero inteligente, se debe saber si los datos provistos por el lugar geométrico de las raíces son en realidad correctos, y ser capaz de obtener información vital del lugar geométrico de las raíces. El material en este capítulo está preparado con estos objetivos en mente.

La técnica del lugar geométrico de las raíces no está confinada al estudio de sistemas de control. En general, el método se puede aplicar al estudio del comportamiento de las raíces de cualquier ecuación algebraica con parámetros variables. El problema del lugar geométrico de las raíces se puede formular con referencia a la siguiente ecuación algebraica de la variable compleja s:

$$F(s) = P(s) + KQ(s) = 0 \tag{8-1}$$

donde $P(s)$ es un polinomio en s de grado n,

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{8-2}$$

y $Q(s)$ es un polinomio en s de grado m; n y m son enteros positivos.

$$Q(s) = s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \tag{8-3}$$

Para el presente, no se establecen limitaciones para las magnitudes relativas entre n y m. K en la ecuación (8-1) es una constante real que puede variar desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

Los coeficientes $a_0, a_2, \ldots, a_{n-1}, b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}$ se consideran reales y fijos.

El lugar geométrico de las raíces de parámetros variables múltiples se puede tratar al variar un parámetro a la vez. Los lugares geométricos de las raíces resultantes se denominan **contornos de las raíces,** y serán tratados en la sección 8-6. Al reemplazar s por z en la ecuación (8-1) hasta la (8-3), se puede construir el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica de sistemas en tiempo discreto lineales en forma similar.

ℓ. El lugar geométrico de las raíces de parámetros múltiples se llaman contornos de las raíces.

Para propósitos de identificación, en este libro se definen las siguientes categorías de lugares geométricos de las raíces basados en el signo de K:

▲ RL se refiere al lugar geométrico de las raíces con valores positivos de K.

▲ CRL se refiere al lugar geométrico de las raíces con valores negativos de K.

1. **RL:** la porción del lugar geométrico de las raíces donde K es positiva; $0 \leq K < \infty$.
2. **CRL (lugar geométrico de las raíces complementario):** la porción del lugar geométrico de las raíces donde K es negativa; $-\infty < K \leq 0$.
3. **RC (contornos de las raíces):** contornos de las raíces cuando varía más de un parámetro.
4. **Lugar geométrico de las raíces:** se refiere al lugar geométrico de las raíces total para $-\infty < K < \infty$.

8-2 Propiedades básicas del lugar geométrico de las raíces

Como nuestro principal interés son los sistemas de control, se considera la función de transferencia en lazo cerrado de un sistema de un sólo lazo:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{8-4}$$

manteniendo en mente que la función de transferencia de sistemas SISO con múltiples lazos también se pueden expresar en forma similar. La ecuación característica del sistema en lazo cerrado se obtiene al igualar al polinomio denominador de $Y(s)/R(s)$ a cero. Por tanto, las raíces de la ecuación característica deben satisfacer:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \tag{8-5}$$

suponga que $G(s)H(s)$ contiene un parámetro variable K como un factor multiplicativo, de forma que la función racional se puede expresar como:

$$G(s)H(s) = \frac{KQ(s)}{P(s)} \tag{8-6}$$

donde $P(s)$ y $Q(s)$ son polinomios definidos por las ecuaciones (8-2) y (8-3), respectivamente. La ecuación (8-5) se escribe como:

$$1 + \frac{KQ(s)}{P(s)} = \frac{P(s) + KQ(s)}{P(s)} = 0 \tag{8-7}$$

El polinomio numerador de la ecuación (8-7) es idéntico al de la (8-1). Por tanto, al considerar que la función de transferencia de lazo $G(s)H(s)$ se puede escribir en la forma de la ecuación (8-6), se puede identificar el lugar geométrico de las raíces de un sistema de control con el problema general del lugar geométrico de las raíces.

Cuando el parámetro variable K no aparece como un factor multiplicativo de $G(s)H(s)$, siempre se pueden escribir las funciones en la forma de la ecuación (8-1). Como ejemplo ilustrativo, considere que la ecuación característica de un sistema de control es:

$$s(s+1)(s+2)+s^2+(3+2K)s+5=0 \tag{8-8}$$

Para expresar está última ecuación en la forma de la ecuación (8-7), *se dividen ambos miembros de la ecuación entre el término que no contiene a K*, y se obtiene:

$$1+\frac{2Ks}{s(s+1)(s+2)+s^2+3s+5}=0 \tag{8-9}$$

Al comparar esta última ecuación con la (8-7), se obtiene:

$$\frac{Q(s)}{P(s)}=\frac{2s}{s^3+4s^2+5s+5} \tag{8-10}$$

Ahora K está aislada como un factor multiplicativo de la función $Q(s)/P(s)$.

Ahora se mostrará que el lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-5) se puede construir con base en las propiedades de $Q(s)/P(s)$. En el caso donde $G(s)H(s) = KQ(s)/P(s)$, el problema del lugar geométrico de las raíces es otro ejemplo en el que las características del sistema en lazo cerrado, en este caso representada por las raíces de la ecuación característica, están determinadas del conocimiento de la función de transferencia de lazo $G(s)H(s)$.

Ahora se investigarán las condiciones bajo las cuales las ecuaciones (8-5) y (8-7) se satisfacen. $G(s)H(s)$ se expresa como:

$$G(s)H(s) = KG_1(s)H_1(s) \tag{8-11}$$

donde $G_1(s)H_1(s)$ no contiene el parámetro variable K. Entonces la ecuación (8-5) se escribe como:

$$G_1(s)H_1(s) = -\frac{1}{K} \tag{8-12}$$

Para obtener la ecuación (8-12), las condiciones siguientes se deben satisfacer en forma simultánea:

Condición de magnitud

$$|G_1(s)H_1(s)| = \frac{1}{|K|} \qquad -\infty < K < \infty \tag{8-13}$$

Condiciones de ángu!o

$$\angle G_1(s)H_1(s) = (2i + 1)\pi \qquad K \geq 0$$
$$= \text{múltiplos impares de } \pi \text{ radianes o } 180° \tag{8-14}$$
$$\angle G_1(s)H_1(s) = 2i\pi \qquad K \leq 0$$
$$= \text{múltiplos pares de } \pi \text{ radianes o } 180° \tag{8-15}$$

donde $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (cualquier entero).

En la práctica, las condiciones establecidas en las ecuaciones (8-13) a (8-15) juegan diferentes roles en la construcción del lugar geométrico de las raíces.

- ▲ La condiciones de ángulos en las ecuaciones (8-14) u (8-15) se emplean para determinar las trayectorias del lugar geométrico de las raíces en el plano *s*.
- ▲ Una vez que se dibujo el lugar geométrico de las raíces, los valores de *K* sobre el lugar geométrico se determina mediante el empleo de la condición de magnitud de la ecuación (8-13).

La construcción del lugar geométrico de las raíces es básicamente un problema gráfico, aunque algunas de sus propiedades se obtuvieron en forma analítica. La construcción gráfica del lugar geométrico de las raíces se basa en el conocimiento de los polos y ceros de la función de $G(s)H(s)$. En otras palabras, $G(s)H(s)$ se debe escribir primero como:

$$G(s)H(s) = KG_1(s)H_1(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)\cdots(s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2)\cdots(s + p_n)} \tag{8-16}$$

donde los ceros y los polos de $G(s)H(s)$ son reales o en pares complejos conjugados.

Al aplicar las condiciones de las ecuaciones (8-13), (8-14), y (8-15) a la ecuación (8-16), se tiene:

$$|G_1(s)H_1(s)| = \frac{\prod_{k=1}^{m} |s + z_k|}{\prod_{j=1}^{n} |s + p_j|} = \frac{1}{|K|} \qquad -\infty < K < \infty \tag{8-17}$$

Para $0 \leq K < \infty$ (RL):

$$\angle G_1(s)H_1(s) = \sum_{k=1}^{m} \angle(s + z_k) - \sum_{j=1}^{n} \angle(s + p_j) = (2i + 1) \times 180° \tag{8-18}$$

Para $-\infty < K \leq 0$ (CRL):

$$\angle G_1(s)H_1(s) = \sum_{k=1}^{m} \angle(s + z_k) - \sum_{j=1}^{n} \angle(s + p_j) = 2i \times 180° \tag{8-19}$$

donde $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

La interpretación de la ecuación (8-18) es que cualquier punto s_1 sobre el RL que corresponde a un valor positivo de K debe satisfacer la condición:

La diferencia entre las sumas de los ángulos de los vectores dibujados desde los ceros y aquellos desde los polos de $G(s)H(s)$ a s_1 es un múltiplo impar de 180°.

Para valores negativos de K, cualquier punto s_1 sobre el CRL debe satisfacer la condición:

La diferencia entre las sumas de los ángulos de los vectores dibujados desde los ceros y aquellos trazados desde los polos de $G(s)H(s)$ a s_1 es un múltiplo par de 180°.

Una vez que el lugar geométrico de las raíces se ha construido, los valores de K a lo largo del lugar geométrico se pueden determinar al escribir la ecuación (8-17) como:

$$|K| = \frac{\prod_{j=1}^{n} |s + p_j|}{\prod_{k=1}^{m} |s + z_k|} \tag{8-20}$$

El valor de K en cualquier punto s_1 sobre el lugar geométrico de las raíces se obtiene al sustituir el valor de s_1 en la ecuación (8-20). En forma gráfica, el numerador de la ecuación (8-20) representa el producto de las longitudes de los vectores dibujados desde los polos de $G(s)H(s)$ a s_1, y el denominador representa el producto de las longitudes de los vectores dibujados desde los ceros de $G(s)H(s)$ a s_1. Si el punto s_1 está sobre el RL, K es positiva; si s_1 está sobre el CRL, entonces K es negativa.

Para ilustrar el empleo de las ecuaciones (8-18) a (8-20) para la construcción del lugar geométrico de las raíces, se considera la función:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + z_1)}{s(s + p_2)(s + p_3)} \tag{8-21}$$

La localización de los polos y ceros de $G(s)H(s)$ se asigna en forma arbitraria como se muestra en la Fig. 8-1. Se selecciona un punto de prueba arbitrario s_1 en el plano s y se dibujan los

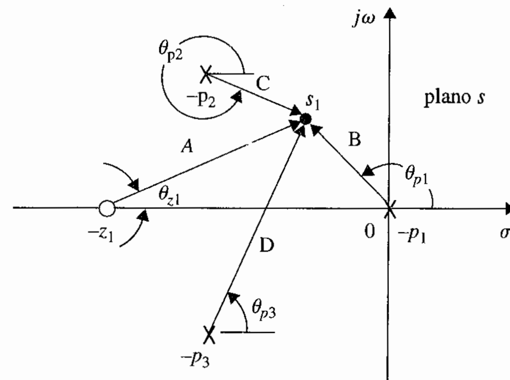


Figura 8-1 Configuración de polos y ceros de $G(s)H(s) = K(s + z_1)/[s(s + p_2)(s + p_3)]$.

vectores dēsde los polos y ceros de $G(s)H(s)$ al punto de prueba. Si s_1 es en verdad punto sobre el RL (K es positiva), debe satisfacer la ecuación (8-18); esto es, los ángulos de los vectores mostrados en la Fig. 8-1 deben satisfacer:

$$\begin{aligned} &\angle(s_1 + z_1) - \angle s_1 - \angle(s_1 + p_2) - \angle(s_1 + p_3) \\ &\quad = \theta_{z1} - \theta_{p1} - \theta_{p2} - \theta_{p3} = (2i + 1) \times 180^\circ \end{aligned} \tag{8-22}$$

donde $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Como se muestra en la Fig. 8-1, los ángulos de los vectores se miden con respecto al eje real positivo. De forma similar, si s_1 es un punto sobre el CRL (K es negativa), debe satisfacer la ecuación (8-19); esto es:

$$\begin{aligned} &\angle(s_1 + z_1) - \angle s_1 - \angle(s_1 + p_2) - \angle(s_1 + p_3) \\ &\quad = \theta_{z1} - \theta_{p1} - \theta_{p2} - \theta_{p3} = 2i \times 180^\circ \end{aligned} \tag{8-23}$$

donde $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Si s_1 satisface ya sea la ecuación (8-22) o la (8-23), la ecuación (8-20) se emplea para encontrar la magnitud de K en dicho punto. Como se muestra en la Fig. 8-1, las longitudes de los vectores se representan por A, B, C, y D. La magnitud de K es:

$$|K| = \frac{|s_1||s_1 + p_2||s_1 + p_3|}{|s_1 + z_1|} = \frac{BCD}{A} \tag{8-24}$$

El signo de K depende de si s_1 está sobre el RL o en el CRL. Por tanto, dada la función $G(s)H(s)$ con K como un factor multiplicativo y los polos y ceros son conocidos, la construcción del lugar geométrico de las raíces de los ceros de $1 + G(s)H(s)$ involucra los dos pasos siguientes:

1. La búsqueda de todos los puntos s_1 que satisfacen la ecuación (8-18) para K positiva. Si requiere el lugar geométrico de las raíces para valores negativos de K, se debe satisfacer la ecuación (8-19).
2. Para encontrar las magnitud de K sobre el lugar geométrico de las raíces se emplea la ecuación (8-20).

Se han establecido las condiciones básicas sobre la construcción del diagrama del lugar geométrico de las raíces. sin embargo, si se desea emplear el método de prueba y error descrito anteriormente, la búsqueda de todos los puntos del lugar geométrico de las raíces en el plano s que satisfacen la ecuación (8-18) o la (8-19) y la ecuación (8-20) podría ser una tarea muy tediosa. Hace años, cuando Evans inventó la técnica del lugar geométrico de las raíces, la tecnología de computadoras digitales estaba aún en su infancia; él tuvo que inventar una herramienta especial, denominada la **Spirula,** la cual se puede emplear para sumar y restar los ángulos de los vectores en forma rápida, de acuerdo a las ecuaciones (8-18) u (8-19). Aun con la spirula, para que dicho dispositivo fuera efectivo, el usuario aún tenía que conocer la ubicación aproximada de las raíces sobre el plano s.

Con la disponibilidad de las computadoras digitales y de subrutinas eficientes para encontrar raíces, la spirula y el método de prueba y error se han vuelto obsoletos. No obstante, aun con computadoras de alta velocidad y un programa eficiente para el lugar geométrico de las raíces, el analista debe tener una comprensión profunda de las propiedades del lugar geométrico de las raíces para ser capaz de buscar en forma manual lugares geométricos de las raíces de sistemas simples y moderadamente complejos e interpretar los resultados de la computadora en forma correcta, cuando se aplica el lugar geométrico de las raíces para el análisis y diseño de sistemas de control.

8-3 Propiedades y construcción del lugar geométrico de las raíces

Las siguientes propiedades del lugar geométrico de las raíces son útiles para construir el lugar geométrico de las raíces en forma manual y para comprenderlo. Las propiedades se desarrollan con base en la relación entre los polos y ceros de $G(s)H(s)$ y los ceros de $1 + G(s)H(s)$, que son las raíces de la ecuación característica.

8-3-1 Puntos donde $K = 0$ y $K = \pm\infty$

Los puntos sobre el lugar geométrico de las raíces donde $K = 0$ son los polos de $G(s)H(s)$.
Los puntos sobre el lugar geométrico de las raíces donde $K = \pm\infty$ son los ceros de $G(s)H(s)$.

Los polos y ceros referidos aquí incluyen los que están en el infinito, si es que existen.

La razón para esto se ve en la condición del lugar geométrico de las raíces dado por la ecuación (8-12).

$$G_1(s)H_1(s) = -\frac{1}{K} \tag{8-25}$$

Cuando la magnitud de K se aproxima a cero, $G_1(s)H_1(s)$ se aproxima a infinito, por lo que s se aproxima a los polos de $G_1(s)H_1(s)$ o de $G(s)H(s)$. De forma similar, si la magnitud de K se aproxima a infinito, s se aproxima a los ceros de $G(s)H(s)$.

Ejemplo 8-1

Considere la ecuación:

$$s(s + 2)(s + 3) + K(s + 1) = 0 \tag{8-26}$$

Cuando $K = 0$, las tres raíces de la ecuación están en $s = 0, -2$, y -3. Cuando la magnitud de K es infinita, las tres raíces de la ecuación están en $s = -1, \infty$, e ∞. Es útil considerar que el infinito en el

plano s es un concepto crucial. se puede visualizar que el plano s finito es sólo una pequeqña porción de una esfera con radio infinito. Entonces, el infinito en el plano s es un punto en el lado opuesto de la esfera que se está observando.

Al dividir ambos miembros de la ecuación (8-26) entre los términos que no contienen a K, se obtiene:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} = 0 \tag{8-27}$$

lo cual da:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} \tag{8-28}$$

Por tanto, las tres raíces de la ecuación (8-26) cuando $K = 0$ son las mismas que los polos de la función $G(s)H(s)$. Las tres raíces de la ecuación (8-26) cuando $K = \pm\infty$ son los tres ceros de $G(s)H(s)$, incluidos los del infinito. Los tres puntos sobre el lugar geométrico de las raíces en donde $K = 0$ y aquellos donde $K = \pm\infty$ se muestran en la Fig. 8-2. ▲

8-3-2 Número de ramas sobre el lugar geométrico de las raíces

Una rama del lugar geométrico de las raíces es el lugar geométrico de una raíz cuando K varía entre $-\infty$ e ∞. La siguiente propiedad del lugar geométrico de las raíces resulta, ya que el número de ramas del lugar geométrico de las raíces es igual al número de raíces de la ecuación.

El número de ramas del lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-1) o ecuación (8-5) es igual al orden del polinomio.

▲ Es importante mantener el seguimiento del número total de ramas del lugar geométrico de las raíces.

El mantener el seguimiento de las ramas individuales y del número total de ramas del diagrama del lugar geométrico de las raíces es importante para verificar que la gráfica se ha realizado en forma correcta. Esto es en particular cierto cuando la gráfica del lugar geométrico de las raíces se realiza mediante computadora, ya que a menos que las ramas del lugar geométrico de las raíces se dibujen en diferente color, se deja al usuario hacer la distinción.

Ejemplo 8-2

El número de ramas del lugar geométrico de las raíces de:

$$s(s+2)(s+3) + K(s+1) = 0 \tag{8-29}$$

es tres, ya que la ecuación es de tercer orden. En otras palabras, la ecuación tiene tres raíces y por tanto, debe haber tres lugares de las raíces. ▲

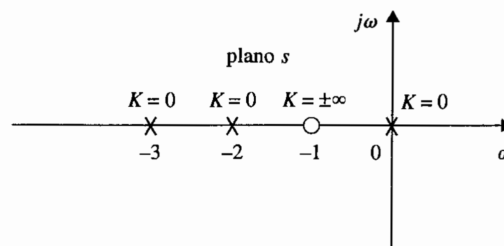


Figura 8-2 Puntos en los cuales $K = 0$ sobre el lugar geométrico de las raíces de $s(s + 2)(s + 3) + K(s + 1) = 0$.

8-3-3 Simetría del lugar geométrico de las raíces

▲ Es importante poner atención en la simetría del lugar geométrico de las raíces.

El lugar geométrico de las raíces es simétrico respecto al eje real del plano s. En general, el lugar geométrico de las raíces es simétrico respecto a los ejes de simetría de la configuración de polos y ceros de $G(s)H(s)$.

La razón detrás de esta propiedad es porque como los coeficientes de la ecuación (8-1) son reales, las raíces deben ser reales o en pares complejos conjugados. En general, si los polos y ceros de $G(s)H(s)$ son simétricos respecto a un eje además del eje real en el plano s, este eje de simetría se puede ver como el eje real de un nuevo plano s obtenido mediante una transformación lineal.

Ejemplo 8-3

Considere la ecuación:

$$s(s + 1)(s + 2) + K = 0 \tag{8-30}$$

Al dividir ambos miembros de la ecuación entre los términos que no contienen a K, se obtiene:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 2)} \tag{8-31}$$

El lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-30) se muestra en la Fig. 8-3 para $K = -\infty$ hasta $K = \infty$. Ya que la configuración de los polos y ceros de $G(s)H(s)$ es simétrica respecto al eje real así como el eje $s = -1$, la gráfica del lugar geométrico de las raíces es simétrica a los dos ejes.

Como una revisión de estas propiedades del lugar geométrico de las raíces presentadas hasta ahora, se tiene el siguiente ejercicio que visualiza al lugar geométrico de las raíces de la Fig. 8-3. Los puntos en los que $K = 0$ son los polos de $G(s)H(s)$, $s = 0$, -1 y -2. La función $G(s)H(s)$ tiene tres ceros en $s = \infty$ en donde $K = \pm\infty$. El lector debe tratar de seguir las tres ramas separadas del lugar geométrico de las raíces desde el comienzo cuando $K = -\infty$, pasando por $K = 0$ y termina en $K = \infty$ en $s = \infty$. ▲

Ejemplo 8-4

Cuando la configuración de polos y ceros de $G(s)H(s)$ es simétrica con respecto a algún punto en el plano s, el lugar geométrico de las raíces también será simétrico a ese punto. Esto se ilustra con la gráfica del lugar geométrico de las raíces de:

$$s(s + 2)(s + 1 + j)(s + 1 - j) + K = 0 \tag{8-32}$$

que se muestra en la Fig. 8-4. ▲

8-3-4 Ángulos de las asíntotas del lugar geométrico de las raíces: Comportamiento del lugar geométrico de las raíces en $|s| = \infty$

▲ Las asíntotas del lugar geométrico de las raíces se refiere al comportamiento del lugar geométrico de las raíces cuando $s \to \infty$.

Como se muestra por los lugares geométricos de las raíces de las Figs. 8-3 y 8-4, cuando n, el orden de $P(s)$, no es igual a m, el orden de $Q(s)$, algunos de los lugares geométricos se aproximarán a infinito en el plano s. Las propiedades del lugar geométrico de las raíces cerca del infinito en el plano s se escriben mediante las **asíntotas** del lugar geométrico cuando $|s| \to \infty$.

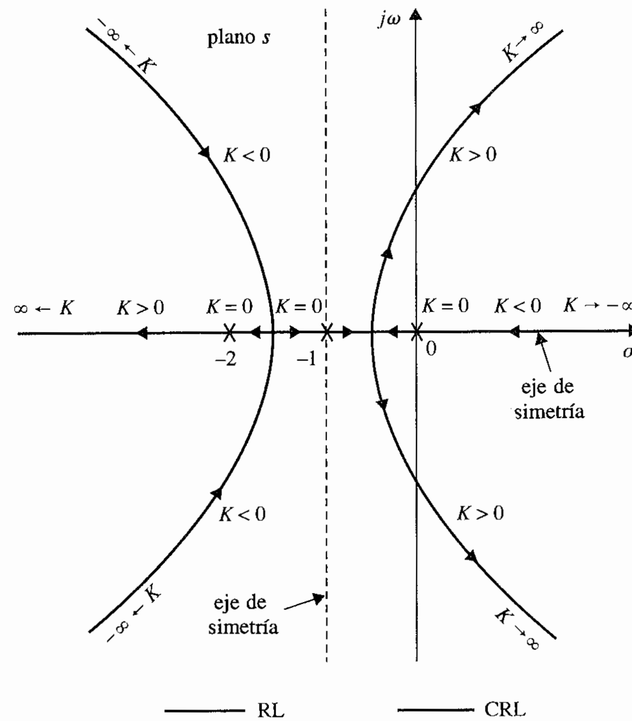


Figura 8-3 Lugar geométrico de las raíces de $s(s + 1)(s + 2) + K = 0$, que muestran las propiedades de simetría

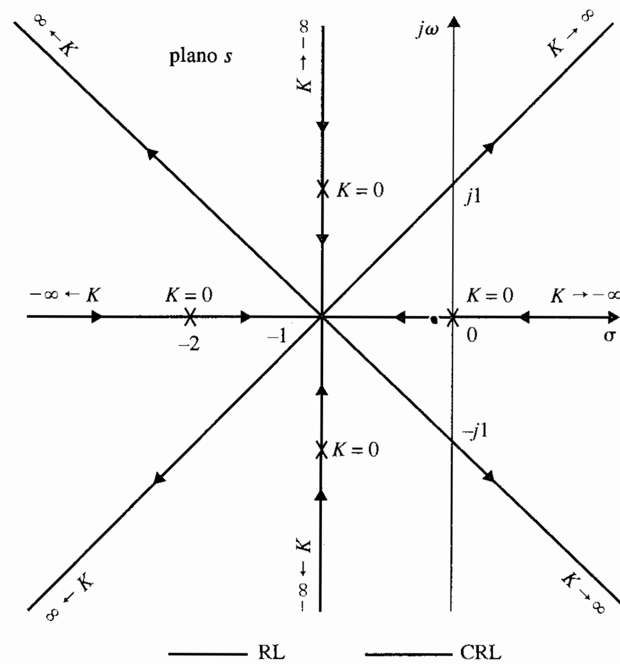


Figura 8-4 Lugar geométrico de las raíces de $s(s + 2)(s^2 + 2s + 2) + K = 0$, que muestran las propiedades de simetría.

En general, cuando $n \neq m$, habrá $2|n - m|$ asíntotas que describen el comportamiento del lugar geométrico de las raíces en $|s| = \infty$. Los ángulos de las asíntotas y su intersección con el eje real del plano s se describen como sigue:

Para valores grandes de s, el lugar geométrico de las raíces para $K \geq 0$ (RL), son asintóticas con asíntotas con ángulos dados por:

$$\theta_i = \frac{2i + 1}{|n - m|} \times 180^\circ \qquad n \neq m \tag{8-33}$$

donde $i = 0, 1, 2, \ldots, |n - m| - 1$; n y m son el número de polos finitos y ceros de $G(s)H(s)$, respectivamente. Para $K \leq 0$ (CRL), los ángulos de las asíntotas son:

$$\theta_i = \frac{2i}{|n - m|} \times 180^\circ \qquad n \neq m \tag{8-34}$$

donde $i = 0, 1, 2, \ldots, |n - m| - 1$.

8-3-5 Intersección de las asíntotas (centroide)

La intersección de las $2|n - m|$ asíntotas del lugar geométrico de las raíces cae en el eje real del plano s como:

$$\sigma_1 = \frac{\Sigma \text{ polos finitos de } G(s)H(s) - \Sigma \text{ceros finitos de } G(s)H(s)}{n - m} \tag{8-35}$$

en donde n es el número de polos finitos y m es el número de ceros finitos de $G(s)H(s)$, respectivamente. La intersección de las asíntotas σ_1 representa el centro de gravedad del lugar geométrico de las raíces, y siempre es un número real.

Ya que los polos y ceros de $G(s)H(s)$ ya sea reales o en pares complejos conjugados, las partes imaginarias en el numerador de la ecuación (8-35) siempre se cancelan con otras. Por tanto, en la ecuación (8-35), los términos de la sumatoria se reemplazan por las partes reales de los polos y ceros de $G(s)H(s)$ respectivamente. Esto es:

$$\sigma_1 = \frac{\Sigma \text{partes reales de polos de } G(s)H(s) - \Sigma \text{partes reales de ceros de } G(s)H(s)}{n - m} \tag{8-36}$$

Ejemplo 8-5

Considere la función de transferencia:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)} \tag{8-37}$$

que corresponde a la ecuación característica:

$$s(s+4)(s^2+2s+2) + K(s+1) = 0 \tag{8-38}$$

La configuración de polos y ceros de $G(s)H(s)$ se muestra en la Fig. 8-5. De las seis propiedades del lugar geométrico de las raíces discutidas hasta ahora, la siguiente información concerniente al lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-38), cuando K varía desde $-\infty$ a ∞ se obtiene:

1. $K = 0$: Los puntos en los que $K = 0$ sobre el lugar geométrico de las raíces son los polos de $G(s)H(s)$: $s = 0, -4, -1+j$, y $-1-j$.
2. $K = \pm\infty$: Los puntos en donde $K = \pm\infty$ sobre el lugar geométrico de las raíces son los ceros de $G(s)H(s)$: $s = -1, \infty, \infty$, e ∞.
3. Hay cuatro ramas del lugar geométrico de las raíces, ya que las ecuaciones (8-37) y (8-38) son de cuarto orden.
4. Los lugares geométricos de las raíces son simétricos con respecto al eje real.
5. Ya que el número de polos finitos de $G(s)H(s)$ excede el número de ceros finitos de $G(s)H(s)$ por tres ($n - m = 4 - 1 = 3$), cuando $K = \pm\infty$, el lugar geométrico de las raíces se aproxima a

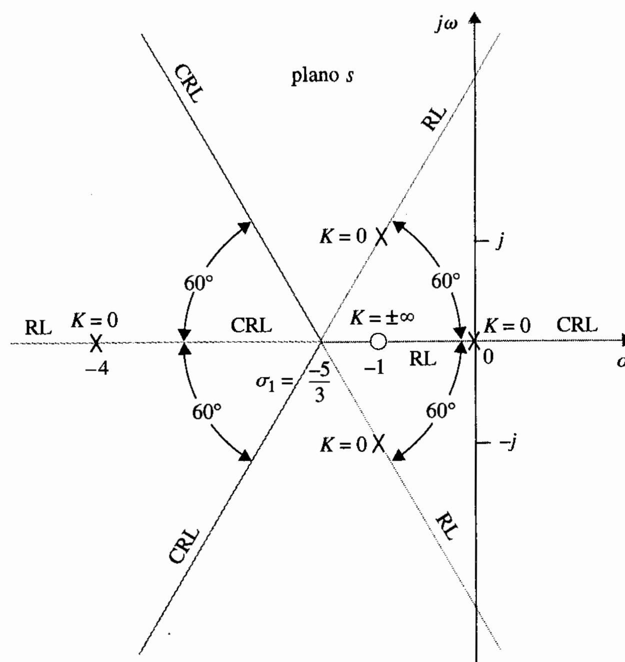


Figura 8-5 Asíntotas del lugar geométrico de las raíces de $s(s+4)(s^2+2s+2)+K(s+1)=0$

$s = \infty$ a lo largo de seis asíntotas. Los ángulos de las asíntotas del RL, ($K \geq 0$) se dan en la ecuación (8-33).

$$i = 0: \quad \theta_0 = \frac{180°}{3} = 60°$$

$$i = 1: \quad \theta_1 = \frac{540°}{3} = 180°$$

$$i = 2: \quad \theta_2 = \frac{900°}{3} = 300°$$

Los ángulos de las asíntotas del CRL ($K \leq 0$) están dados por la ecuación (8-34) y se calculan en 0°, 120° y 240°.

6. La intersección de las asíntotas está dada por la ecuación (8-36):

$$\sigma_1 = \frac{(-4 - 1 - 1) - (-1)}{4 - 1} = -\frac{5}{3} \qquad (8\text{-}39)$$

Las asíntotas del lugar geométrico de las raíces se muestran en la Fig. 8-5. ▲

Ejemplo 8-6

Como una ilustración posterior, las asíntotas del lugar geométrico de las raíces de varias ecuaciones se muestran en la Fig. 8-6. ▲

8-3-6 Lugar geométrico de las raíces sobre el eje real.

▲ El eje real completo del plano s se ocupa por el lugar geométrico de las raíces.

El eje real completo del plano s está ocupado por el lugar geométrico de las raíces (es decir, ya sea el RL o el CRL).

1. ***RL: sobre una sección dada del eje real, RL se encuentra en la sección sólo si el número total de polos y ceros de $G(s)H(s)$ a la derecha de la sección es impar.***
2. ***CRL: sobre una sección dada del eje real, el CRL se encuentra en la sección sólo si el número total de polos y ceros reales de $G(s)H(s)$ a la derecha de la sección es par. Los polos y ceros complejos de $G(s)H(s)$ no afectan el tipo del lugar geométrico de las raíces encontrados sobre el eje real.***

Estas propiedades se basan en las siguientes observaciones:

1. En cualquier punto s_1 sobre el eje real, los ángulos de los vectores dibujados desde los polos y ceros complejos de $G(s)H(s)$ se suman y su suma es igual a cero. Por tanto, sólo los ceros y polos reales de $G(s)H(s)$ contribuyen a la relación angular de las ecuaciones (8-18) y (8-19).

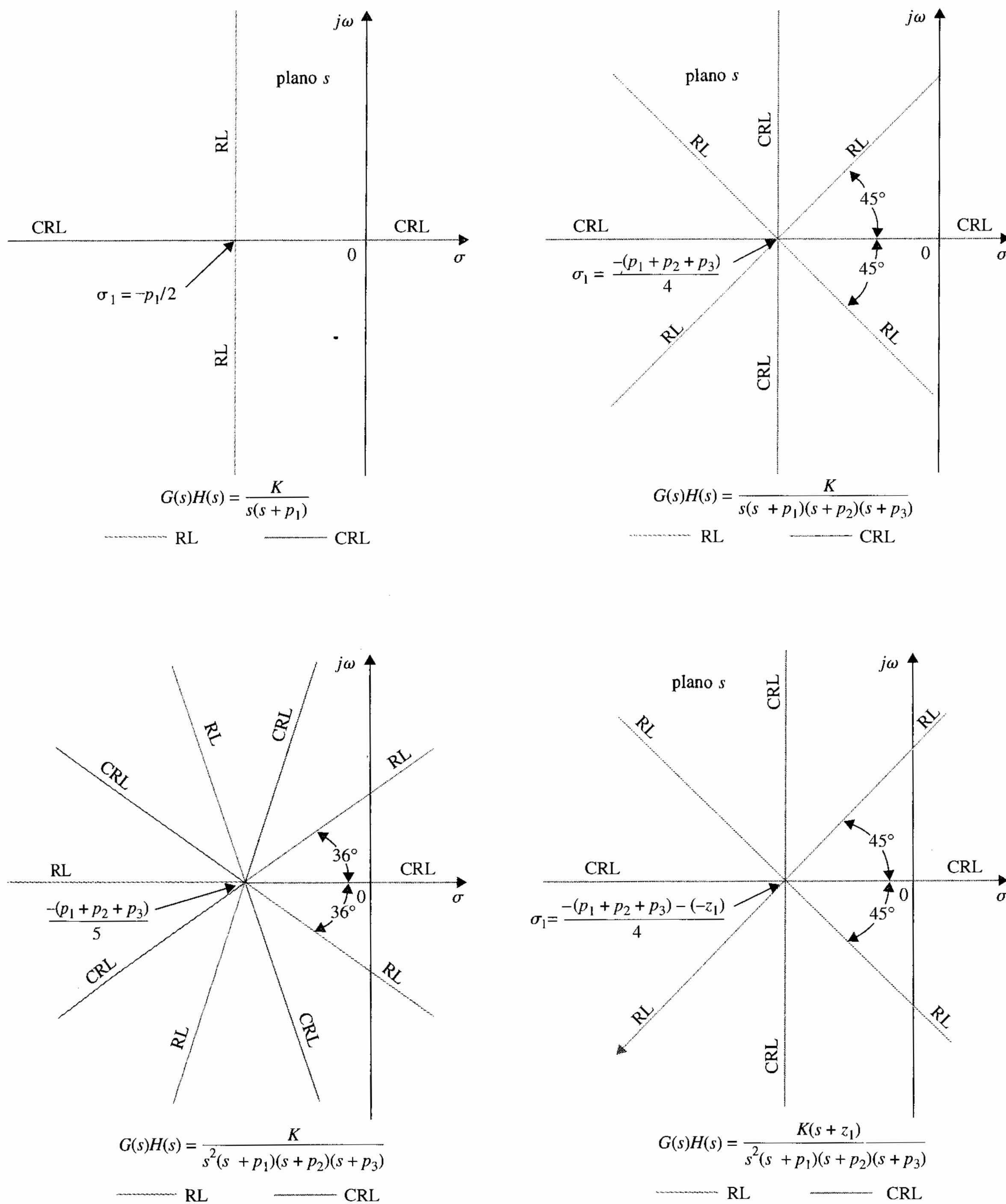


Figura 8-6 Ejemplos de las asíntotas del lugar geométrico de las raíces (RL y CRL).

2. Sólo los ceros y polos reales de $G(s)H(s)$ que caen a la derecha del punto s_1 contribuyen en las ecuaciones (8-18) y (8-19), ya que los polos y ceros reales que caen a la izquierda del punto contribuyen con cero grados a las ecuaciones (8-18) y (8-19).
3. Cada polo real de $G(s)H(s)$ a la derecha de s_1 contribuye con $-180°$, y cada cero real de $G(s)H(s)$ a la derecha de s_1 contribuye con $+180°$ a las ecuaciones (8-18) y (8-19).

La última observación muestra que para que s_1 sea un punto sobre el RL, debe haber un número **impar** de polos y ceros de $G(s)H(s)$ a la derecha del punto. Para que s_1 sea un punto sobre el CRL, el número total de ceros y polos de $G(s)H(s)$ a la derecha del punto debe ser **par.** El ejemplo siguiente ilustra cómo determinar las propiedades del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real del plano s.

Ejemplo 8-7

El lugar geométrico de las raíces sobre el eje real para la configuración de dos polos y ceros de $G(s)H(s)$ se muestra en la Fig. 8-7. Observe que el eje real completo está ocupado ya sea por el RL o el CRL. ▲

8-3-7 Ángulos de salida y ángulos de llegada del lugar geométrico de las raíces

El ángulo de salida o llegada de un lugar geométrico de las raíces a un cero o polo de $G(s)H(s)$, respectivamente, denotan el ángulo de la tangente del lugar geométrico cerca del punto.

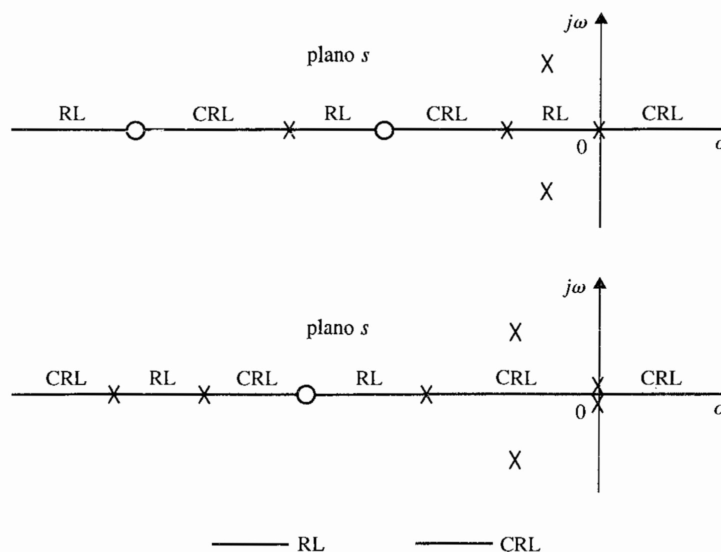


Figura 8-7 Propiedades del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real.

Los ángulos de salida y llegada se determinan utilizando la ecuación (8-18) para RL y la ecuación (8-19) para CRL. Los detalles se ilustran en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 8-8

Para el diagrama del lugar geométrico de las raíces que se muestra en la Fig. 8-8, el lugar geométrico de las raíces cerca del polo $s = -1 + j$ puede ser dibujado con mayor exactitud conociendo el ángulo en donde el lugar geométrico de las raíces deja al polo. Como se muestra en la Fig. 8-8, el ángulo de salida del lugar geométrico de las raíces en $s = -1 + j$ está representado por θ_2, medida con respecto al eje real. Si se asigna s_1 al punto sobre el RL que deja al polo en $-1 + j$ y que está muy cerca al polo. Entonces s_1 debe satisfacer la ecuación (8-18). Por tanto:

$$\angle G(s_1)H(s_1) = -(\theta_1' + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = (2i + 1)180° \tag{8-40}$$

en donde i es cualquier entero. Ya que se supone que s_1 está muy cerca al polo en $-1 + j$, los ángulos

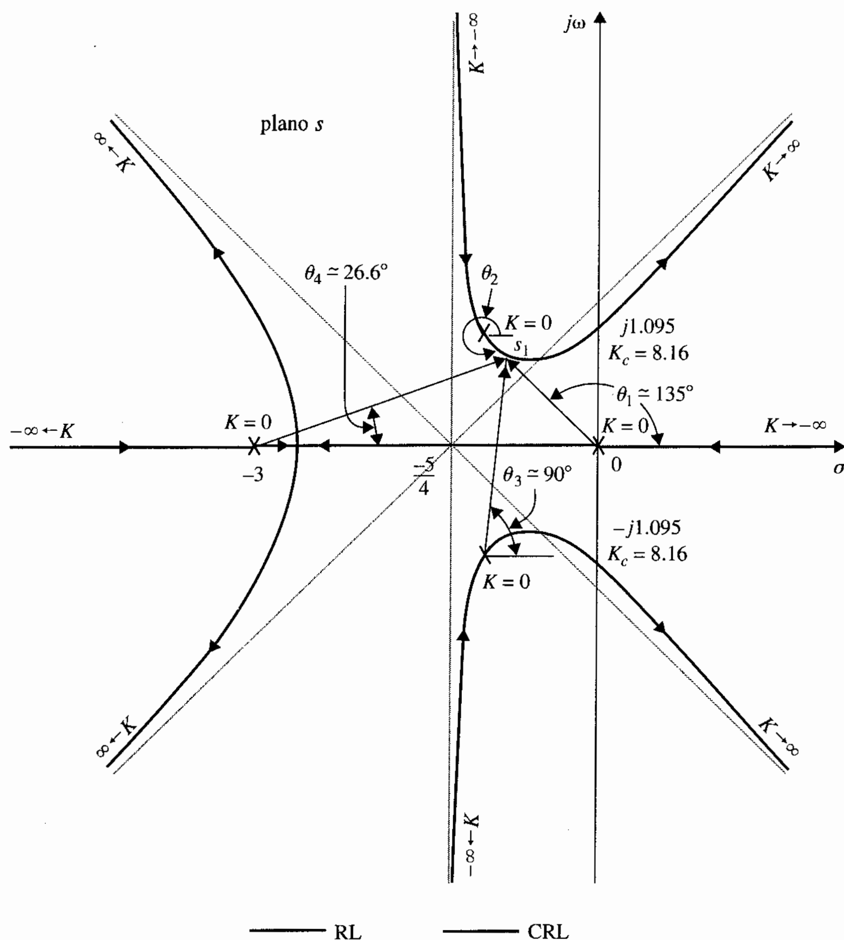


Figura 8-8 Lugar geométrico de las raíces de $s(s + 3)(s^2 + 2s + 2) + K = 0$ para ilustrar los ángulos de salida y llegada.

de los vectores dibujados desde los otros tres polos se aproximan al considerar que s_1 está en $-1+j$. De la Fig. 8-8, la ecuación (8-40) se escribe como:

$$-(135° + \theta_2 + 90° + 26.6°) = (2i + 1)180° \qquad (8\text{-}41)$$

en donde θ_2 es el ángulo desconocido. En este caso, se puede hacer que i sea -1, y el resultado para θ_2 es $-71.6°$.

Cuando el ángulo de salida o llegada de RL a un polo o cero simple de $G(s)H(s)$ se determina, el ángulo de llegada o salida del CRL al mismo punto, difiere por un ángulo de 180°, y la ecuación (8-19) se utiliza. La Fig. 8-8 muestra que el ángulo de llegada del CRL a $-1+j$ es 108.4°, que es 180° − 71.6°. En forma similar, para el diagrama del lugar geométrico de las raíces en la Fig. 8-8, se puede mostrar que el CRL llega al polo en $s = -3$ con un ángulo de 180°, y el RL deja al mismo polo en 0°. Para el polo en $s = 0$, el ángulo de llegada del CRL es 0°, mientras que el ángulo de salida del RL es 180°. Estos ángulos también se determinan el conocimiento del tipo de lugar geométrico de las raíces sobre las sección del eje real separada por los polos y ceros de $G(s)H(s)$. Ya que el ángulo total de los vectores dibujados desde los polos y ceros complejos conjugados a cualquier punto del eje real se suman para ser cero, los ángulos de llegada y salida del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real no son afectados por los polos y ceros complejos de $G(s)H(s)$. ▲

Ejemplo 8-9

En este ejemplo se examinan los ángulos de salida y llegada del lugar geométrico de las raíces en polos y ceros de orden múltiple de $G(s)H(s)$. Considere que $G(s)H(s)$ tiene un polo de orden múltiple (tercer orden) sobre el eje real, como se muestra en la Fig. 8-9. Sólo se muestran los polos y ceros reales de $G(s)H(s)$, ya que los complejos no afectan los tipos de ángulos de llegada y salida del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real. Para el polo de tercer orden en $s = -2$, hay tres RL de salida y tres CRL de llegada en cada punto. Para encontrar los ángulos de salida del RL, se asigna un punto s_1 en uno de los RL cerca de $s = -2$, y se aplica la ecuación (8-18). El resultado es:

$$-\theta_1 - 3\theta_2 + \theta_3 = (2i + 1)180° \qquad (8\text{-}42)$$

en donde θ_1 y θ_3 denotan los ángulos de los vectores dibujados desde el polo en 0 y el cero en -3, respectivamente, a s_1. El ángulo θ_2 se multiplica por 3, ya que hay tres polos en $s = -2$, por tanto hay tres

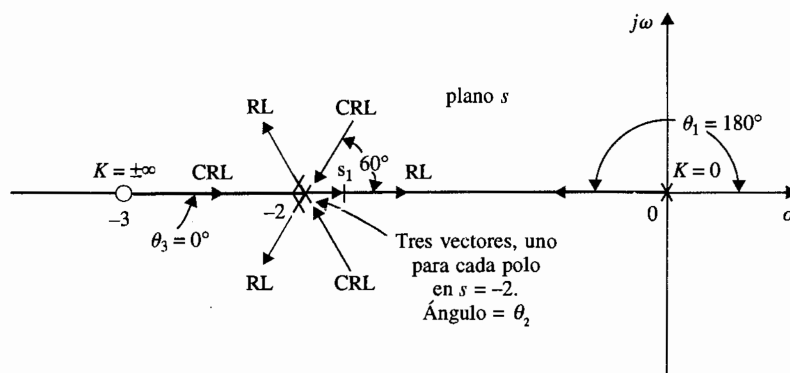


Figura 8-9 Ángulos de salida y llegada en un polo de tercer orden.

vectores dibujados desde – 2 a s_1. Haciendo i igual a cero en la ecuación (8-42), y si $\theta_1 = 180°$, $\theta_3 = 0°$, se tiene que $\theta_2 = 0°$, el cual es el ángulo de salida del RL que está entre $s = 0$ y $s = -2$. Para los ángulos de salida de los otros dos RLs, se tiene $i = 1$ e $i = 2$, sucesivamente en la ecuación (8-42), y se tiene que $\theta_2 = 120°$ y $-120°$. En forma similar, para los tres CRL que llegan a $s = -2$, la ecuación (8-19) se emplea y los ángulos de llegada se encuentran como 60°, 180°, y – 60°. ▲

8-3-8 Intersección del lugar geométrico de las raíces con el eje imaginario

▲ El criterio de Routh-Hurwitz puede ser utilizado para encontrar las intersecciones en el lugar geométrico de las raíces con el eje imaginario.

Los puntos donde el lugar geométrico de las raíces interceptan con el eje imaginario del plano s, si existen, y los valores correspondientes de K se pueden determinar por medio del criterio de Routh-Hurwitz. Para situaciones complejas cuando el lugar geométrico de las raíces tiene varias ramas de intersección con el eje imaginario, la intersección y los valores críticos de K se pueden determinar con la ayuda del programa de computadora del lugar geométrico de las raíces. El método del diagrama de Bode en el Cap. 9, asociado con la respuesta en frecuencia se puede emplear para este propósito.

Ejemplo 8-10

El lugar geométrico de las raíces que se muestra en la Fig. 8-8 es para la ecuación:

$$s(s + 3)(s^2 + 2s + 2) + K = 0 \tag{8-43}$$

La Fig. 8-8 muestra la intersección de RL con el eje $j\omega$ en dos puntos. Al aplicar el criterio de Routh-Hurwitz a la ecuación (8-43), y resolviendo la ecuación auxiliar, se tiene el valor crítico de K para la estabilidad en $K = 8.16$, y los puntos de cruce correspondientes en el eje $j\omega$ están en $\pm j1.095$.

8-3-9 Puntos de ruptura (puntos de silla) sobre el lugar geométrico de las raíces

Los puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces de una ecuación corresponden a raíces de orden múltiple de la ecuación.

▲ Una grafica del lugar geométrico de las raíces puede tener más de un punto de ruptura.

▲ Los puntos de ruptura pueden ser complejos conjugados en el plano s.

La Fig. 8-10(a) ilustra un caso en el que dos ramas del lugar geométrico de las raíces se juntan en un punto de ruptura sobre el eje real y después parten desde el eje en direcciones opuestas. En este caso el punto de ruptura representa una raíz doble de la ecuación cuando se asigna el valor de K correspondiente al punto. La Fig. 8-10(b) muestra otra situación como cuando dos lugares geométricos de las raíces de polos complejos conjugados se aproximan al eje real, se encuentran en un punto de ruptura y después parten en direcciones opuestas a lo largo del eje real. En general un punto de ruptura puede involucrar más de dos lugares geométricos de las raíces. La Fig. 8-10(c) ilustra una situación cuando el punto de ruptura representa una raíz de cuarto orden.

Un diagrama del lugar geométrico de las raíces puede tener por supuesto, más de un punto de ruptura, sin embargo los puntos de ruptura no siempre necesitan estar sobre el eje real. Debido a la simetría conjugada del lugar geométrico de las raíces, los puntos de ruptura

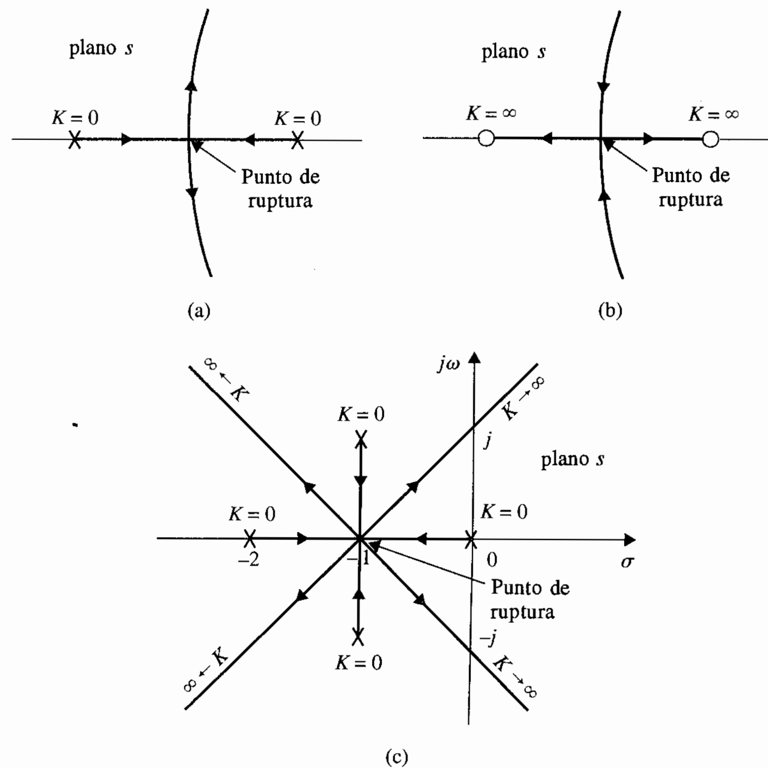


Figura 8-10 Ejemplos de puntos de ruptura sobre el eje real en el plano *s*.

que no están sobre el eje real deben estar en pares complejos conjugados. Refiérase a la Fig. 8-13 para un ejemplo del lugar geométrico de las raíces con puntos de ruptura complejos. Las propiedades de los puntos de ruptura del lugar geométrico de las raíces se dan a continuación.

Los puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces de $1 + KG_1(s)H_1(s) = 0$ deben satisfacer:

$$\frac{dG_1(s)H_1(s)}{ds} = 0 \qquad (8\text{-}44)$$

Es importante apuntar que la condición para un punto de ruptura dada en la ecuación (8-44) es *necesaria* pero *no suficiente.* En otras palabras, todos los puntos de ruptura sobre RL y CRL deben satisfacer la ecuación (8-44), pero no todas las soluciones de la ecuación (8-44) son puntos de ruptura. Para que sea un punto de ruptura, la solución de la ecuación (8-44) debe satisfacer la ecuación $1 + KG_1(s)H_1(s) = 0$; esto es, deben ser un punto del lugar geométrico

geométrico de las raíces para algún valor real de K. En general, las conclusiones siguientes se pueden hacer al observar las soluciones de la ecuación (8-44);

1. Todas las soluciones *reales* de la ecuación (8-44) son puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces (RL y CRL), ya que el eje real entero del plano s está ocupado por el lugar geométrico de las raíces.
2. Las soluciones complejas conjugadas de la ecuación (8-44) son puntos de ruptura solo si satisfacen la ecuación característica o son puntos sobre el lugar geométrico de las raíces.
3. Ya que la condición del lugar geométrico de las raíces es

$$K = -\frac{1}{G_1(s)H_1(s)} \tag{8-45}$$

al tomar la derivada en ambos miembros de la ecuación con respecto a s se tiene

$$\frac{dK}{ds} = \frac{dG_1(s)H_1(s)/ds}{[G_1(s)H_1(s)]^2} \tag{8-46}$$

Por tanto, la condición de punto de ruptura también se escribe como:

$$\frac{dK}{ds} = 0 \tag{8-47}$$

en donde K se expresa como en la ecuación (8-45).

Ángulo de llegada y de salida del lugar geométrico de las raíces en los puntos de ruptura

Los ángulos en los cuales el lugar geométrico de las raíces llega o sale desde un punto de ruptura depende del número de lugar geométrico que están involucrados en el punto. Por ejemplo, el lugar geométrico de las raíces que se muestra en la Fig. 8-10(a) y (b) todos llegan y se van en 90°, mientras que en la Fig. 8-10(c) , los cuatro lugares geométricos de las raíces llegan y se van con ángulos de 45°. En general,

> ***n lugares geométricos de las raíces (RL o CRL) llegan o se van de un punto de ruptura con 180/n grados***

Muchos programas de computadora para el lugar geométrico de las raíces tienen funciones que obtendrán los puntos de ruptura que es una de las propiedades del lugar geométrico de las raíces que es más tediosa de hacer en forma manual.

Eje
8-1

Ejemplo 8-11

Considere la ecuación de segundo orden:

$$s(s+2)+K(s+4)=0 \tag{8-48}$$

Con base en algunas propiedades del lugar geométrico de las raíces descritas anteriormente, el lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-48) se bosqueja como se muestra en la Fig. 8-11 para $-\infty < K < \infty$. Se puede probar que la porción compleja del lugar geométrico de las raíces es un círculo. Los dos puntos de ruptura están sobre el eje real, uno entre cero y – 2 y el otro entre – 4 y $-\infty$. De la ecua-ción (8-48) se tiene:

$$G_1(s)H_1(s)=\frac{s+4}{s(s+2)} \tag{8-49}$$

Al aplicar la ecuación (8-44) los puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces deberán satisfacer:

$$\frac{dG_1(s)H_1(s)}{ds}=\frac{s(s+2)-2(s+1)(s+4)}{s^2(s+2)^2}=0 \tag{8-50}$$

o

$$s^2+8s+8=0 \tag{8-51}$$

Al resolver la ecuación (8-51), se pueden encontrar los dos puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces en $s=-1.172$ y -6.828. La Fig. 8-11 muestra que los dos puntos de ruptura están sobre RL. ▲

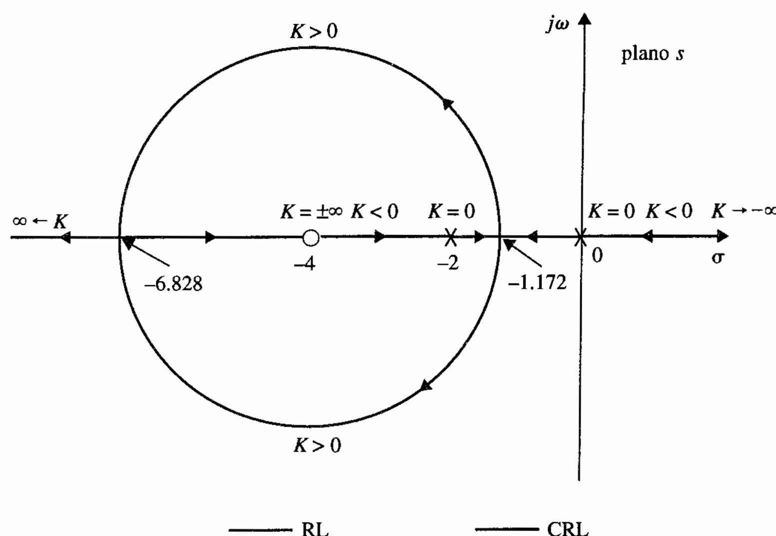


Figura 8-11 Lugar geométrico de las raíces de $s(s+2)+K(s+4)=0$

Ejemplo 8-12

Considere la ecuación:

$$s^2 + 2s + 2 + K(s + 2) = 0 \tag{8-52}$$

La $G(s)H(s)$ equivalente se obtiene al dividir ambos miembros de la ecuación (8-52) entre los términos que no contienen a K. Se tiene:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s^2 + 2s + 2} \tag{8-53}$$

Con base en los polos y ceros de $G(s)H(s)$, el lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-52) se dibuja como se muestra en la Fig. 8-12. La gráfica muestra que RL y CRL, cada uno tiene un punto de ruptura. Estos puntos de ruptura se determinan de:

$$\frac{dG_1(s)H_1(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{s+2}{s^2+2s+2}\right) = \frac{s^2 + 2s + 2 - 2(s+1)(s+2)}{(s^2+2s+2)^2} = 0 \tag{8-54}$$

o bien:

$$s^2 + 4s + 2 = 0 \tag{8-55}$$

La solución a esta ecuación da los puntos de ruptura en $s = -0.586$, que está sobre el CRL, y $s = -3.414$, que es un punto de ruptura del RL. ▲

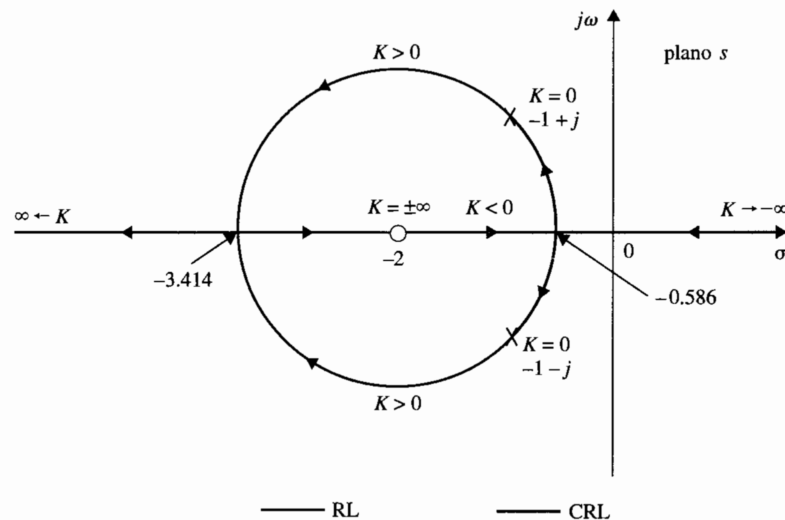


Figura 8-12 Lugar geométrico de las raíces de $s^2 + 2s + 2 + K(s + 2) = 0$.

Ejemplo 8-13

La Fig. 8-13 muestra el lugar geométrico de las raíces de la ecuación:

$$s(s + 4)(s^2 + 4s + 20) + K = 0 \tag{8-56}$$

Al dividir ambos miembros de la última ecuación entre los términos que no contienen a K, se tiene:

$$1 + KG_1(s)H_1(s) = 1 + \frac{K}{s(s + 4)(s^2 + 4s + 20)} = 0 \tag{8-57}$$

Ya que los polos de $G_1(s)H_1(s)$ son simétricos alrededor del eje $\sigma = -2$ y $\omega = 0$ en el plano s, el lugar geométrico de las raíces de la ecuación es simétrico con respecto a estos dos ejes.

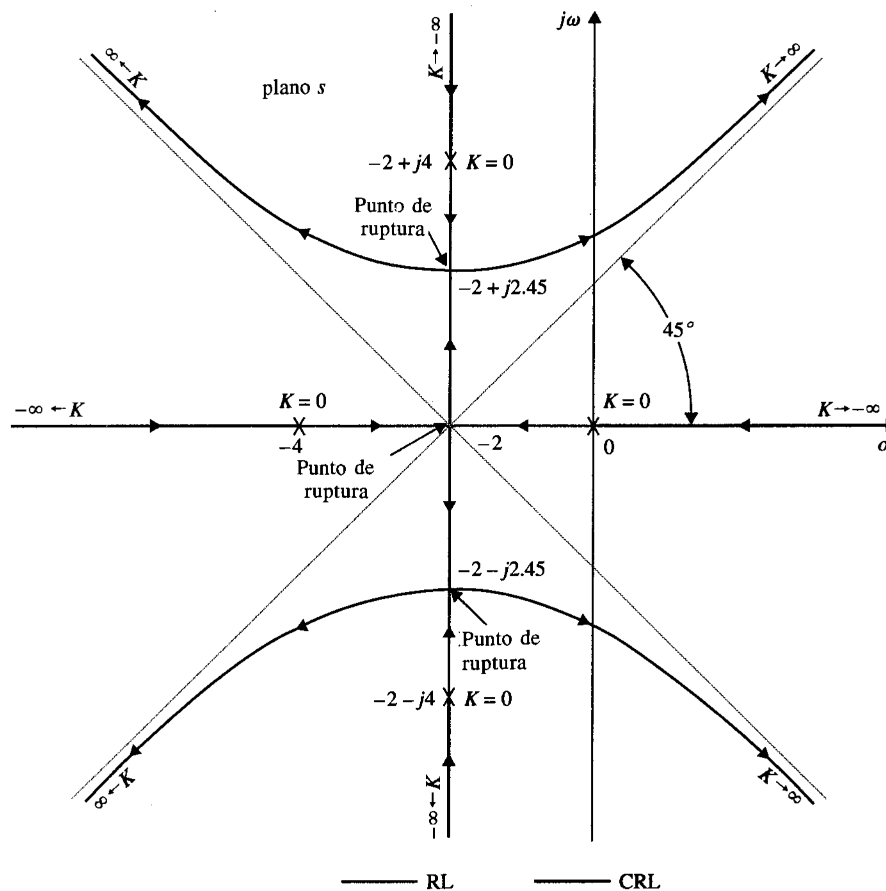


Figura 8-13 Lugar geométrico de las raíces de $s(s + 4)(s^2 + 4s + 20) + K = 0$.

Al tomar la derivada de $G_1(s)H_1(s)$ con respecto a s, se tiene:

$$\frac{dG_1(s)H_1(s)}{ds} = -\frac{4s^3 + 24s^2 + 72s + 80}{[s(s+4)(s^2+4s+20)]^2} = 0 \tag{8-58}$$

o

$$s^3 + 6s^2 + 18s + 20 = 0 \tag{8-59}$$

Las soluciones de estas últimas ecuaciones son $s = -2, -2 + j2.45$, y $-2 - j2.45$. En este caso, la Fig. 8-13 muestra que todas las soluciones de la ecuación (8-59) son puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces y dos de estos puntos son complejos. ▲

Ejemplo 8-14

En este ejemplo se muestra que no todas las soluciones de la ecuación (8-44) son puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces. El lugar geométrico de las raíces de la ecuación:

$$s(s^2 + 2s + 2) + K = 0 \tag{8-60}$$

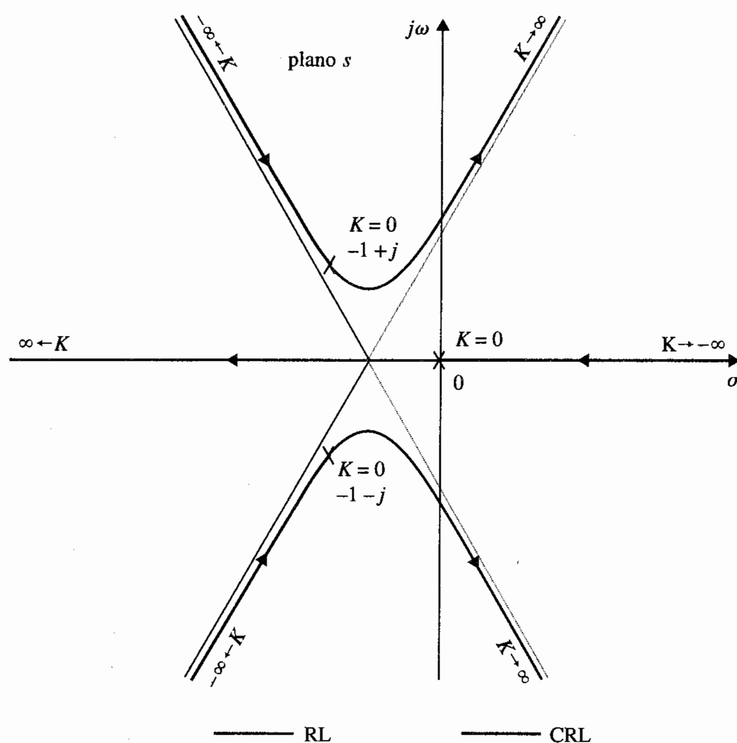


Figura 8-14 Lugar geométrico de las raíces de $s(s^2 + 2s + 2) + K = 0$

se muestra en la Fig. 8-14. El lugar geométrico de las raíces muestra que tanto el RL como el CRL no tienen ningún punto de ruptura en este caso. Sin embargo, al escribir la ecuación (8-60) como:

$$1 + KG_1(s)H_1(s) = 1 + \frac{K}{s(s^2 + 2s + 2)} = 0 \tag{8-61}$$

y al aplicar la ecuación (8-44) se tiene la ecuación para los puntos de ruptura:

$$3s^2 + 4s + 2 = 0 \tag{8-62}$$

Las raíces de la ecuación (8-62) son $s = -0.667 + j0.471$ y $-0.667 - j0.471$. Estas dos raíces no son puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces, ya que no satisfacen la ecuación (8-60) para algún valor real de K. ▲

8-3-10 Sensibilidad de las raíces [20 – 22]

▲ La sensibilidad en la raíz en los puntos de ruptura es infinita.

La condición sobre los puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces en la ecuación (8-47) nos lleva a la **sensibilidad de las raíces** de la ecuación característica. La sensibilidad de las raíces de la ecuación característica cuando K varía se define como la **sensibilidad de las raíces,** y está dada por:

$$S_K = \frac{ds/s}{dK/K} = \frac{K}{s}\frac{ds}{dK} \tag{8-63}$$

▲ Desde el punto de vista de la sensibilidad de las raíces un sistema no debe operar en los puntos de ruptura.

Por tanto, la ecuación (8-63) muestra que la *sensibilidad de las raíces de los puntos de ruptura es infinita* . Desde el punto de vista de sensibilidad de las raíces, debemos evitar seleccionar los valores de K que operan sobre puntos de ruptura, que corresponden a raíces de orden múltiple de la ecuación característica. En el diseño de sistemas de control, no sólo es importante llegar a sistemas que tengan una característica deseada, sino también es importante que el sistema deba ser insensible a la variación de los parámetros. Por ejemplo, un sistema que pueda desarrollar satisfactoriamente con una cierta K, pero que si es muy sensible a la variación de K pueda caer en la región indeseable o volverse inestable si K varía sólo en una pequeña cantidad. En terminología formal de sistema de control, un sistema que es insensible a la variación de los parámetros se llama un **sistema robusto.** Por tanto, el estudio del lugar geométrico de las raíces de sistemas de control debe involucrar no sólo la forma del lugar geométrico de las raíces con respecto al parámetro variable de K, sino también como las raíces a lo largo del lugar geométrico varían con la variación de K.

Ejemplo 8-15

La Fig. 8-15 muestra el diagrama del lugar geométrico de las raíces de:

$$s(s + 1) + K = 0 \tag{8-64}$$

cuando K se incrementa uniformemente sobre 100 valores desde –20 a 20. El lugar geométrico de las raíces fue calculado con el programa **ROOTLOCI** de **ACSP** y dibujado en forma digital. Cada punto

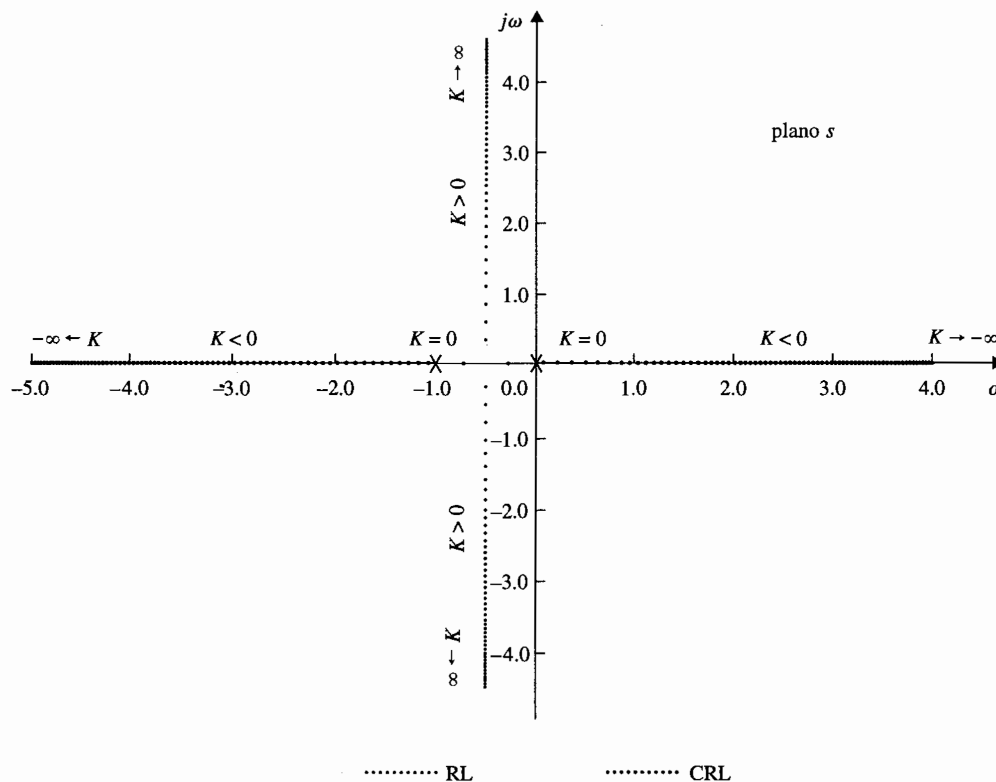


Figura 8-15 Lugar geométrico de las raíces de $s(s + 1) + K = 0$ que muestra la sensibilidad de la raíz con respecto a K.

sobre la gráfica del lugar geométrico de las raíces representa una raíz para un valor distinto de K. Por tanto, se ve que la sensibilidad de las raíces es baja cuando la magnitud de K es grande. Cuando la magnitud de K se decrementa, los movimientos de las raíces se vuelven más grandes para los mismos incrementos en K. En el punto de ruptura, $s = -0.5$, la sensibilidad de las raíces es infinita.

La Fig. 8-16 muestra el lugar geométrico de las raíces de:

$$s^2(s + 1)^2 + K(s + 2) = 0 \tag{8-65}$$

con K incrementada uniformemente por 200 valores desde −40 a 50. Otra vez el lugar geométrico muestra que la sensibilidad de las raíces incrementa cuando las raíces se aproximan a los puntos de ruptura en $s = 0$, −0.543, −1.0, y −2.457.

Se puede investigar la sensibilidad de las raíces posteriormente mediante el uso de la expresión en la ecuación (8-47). Para la ecuación de segundo orden en la ecuación (8-64):

$$\frac{dK}{ds} = -2s - 1 \tag{8-66}$$

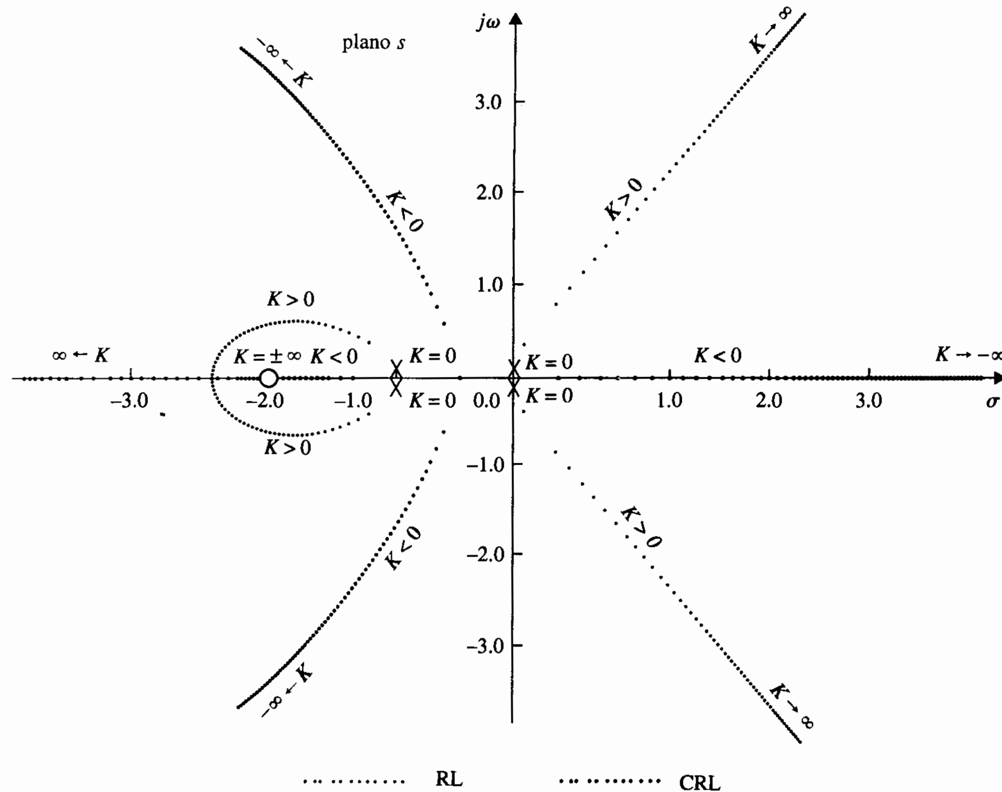


Figura 8-16 Lugar geométrico de las raíces de $s^2(s + 1) + K(s + 2) = 0$, que muestra la sensibilidad de la raíz con respecto a K.

De la ecuación (8-64), $K = -s\,(s + 1)$; la sensibilidad de las raíces se convierte en:

$$S_K = \frac{ds}{dK}\frac{K}{s} = \frac{s + 1}{2s + 1} \tag{8-67}$$

en donde $s = \sigma + j\omega$, y s debe tomar valores sobre el lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-64). Para las raíces sobre el eje real, $\omega = 0$. Por tanto la ecuación (8-67) lleva a:

$$|S_K|_{\omega=0} = \left|\frac{\sigma + 1}{2\sigma + 1}\right| \tag{8-68}$$

Cuando las dos raíces son complejas, $\sigma = -0.5$ para todos los valores de ω. La ecuación (8-67) da:

$$|S_K|_{\sigma=-0.5} = \left(\frac{0.25 + \omega^2}{4\omega^2}\right)^{1/2} \tag{8-69}$$

De la ecuación (8-69) es claro que la sensibilidad de las raíces en pares complejos conjugados es la misma, ya que ω aparece sólo como ω^2 en la ecuación. La ecuación (8-68) indica que las sensibilidades de las dos raíces reales son diferentes para un valor de K dado. La tabla 8-1 da las magnitudes de las sensibilidades de las dos raíces de la ecuación (8-64) para diferentes valores de K, donde $|S_{K1}|$ denota la sensibilidad de la primera raíz y $|S_{K2}|$ denota lo mismo para la segunda raíz. Estos valores indican que aunque las dos raíces reales alcanzan $\sigma = -0.5$ para el mismo valor de $K = 0.25$, y cada raíz viaja la misma distancia desde $s = 0$ y $s = -1$, respectivamente, la sensibilidad de las dos raíces reales no es la misma.

8-3-11 Cálculo de *K* sobre el lugar geométrico de las raíces

Una vez que se construye el lugar geométrico de las raíces, los valores de K en cualquier punto s_1 sobre el lugar geométrico de las raíces se pueden determinar mediante el uso de la ecuación (8-20). En forma gráfica la magnitud de K se puede escribir como:

$$|K| = \frac{\prod \text{ longitudes de los vectores dibujados desde los polos de } G_1(s)H_1(s) \text{ a } s_1}{\prod \text{ longitudes de los vectores dibujados desde los ceros de } G_1(s)H_1(s) \text{ a } s_1} \quad (8\text{-}70)$$

Ejemplo 8-16

Una ilustración sobre cómo determinar los valores de K sobre el lugar geométrico de las raíces, el lugar geométrico de las raíces de la ecuación:

$$s^2 + 2s + 2 + K(s + 2) = 0 \quad (8\text{-}71)$$

como se muestra en la Fig. 8-17. El valor de K en el punto s_1 está dado por:

$$K = \frac{A \times B}{C} \quad (8\text{-}72)$$

Tabla 8-1 Sensibilidad de las raíces

K	Raíz 1	$\lvert S_{K1}\rvert$	Raíz 2	$\lvert S_{K2}\rvert$
0	0	1.000	−1.000	0
0.04	−0.042	1.045	−0.958	0.454
0.16	−0.200	1.333	−0.800	0.333
0.24	−0.400	3.000	−0.600	2.000
0.25	−0.500	∞	−0.500	∞
0.28	$-0.5 + j0.173$	1.527	$-0.5 - j0.173$	1.527
0.40	$-0.5 + j0.387$	0.817	$-0.5 - j0.387$	0.817
1.20	$-0.5 + j0.975$	0.562	$-0.5 - j0.975$	0.562
4.00	$-0.5 + j1.937$	0.516	$-0.5 - j1.937$	0.516
∞	$-0.5 + j\infty$	0.500	$-0.5 - j\infty$	0.500

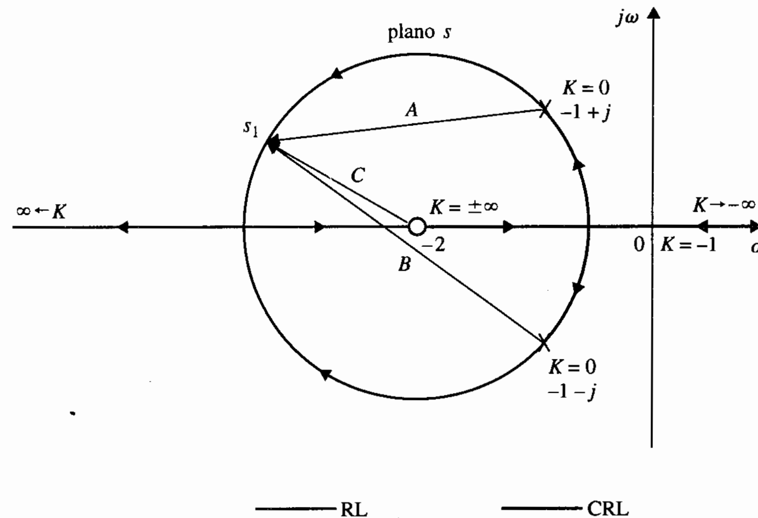


Figura 8-17 Método gráfico para encontrar los valores de K sobre el lugar geométrico de las raíces.

donde A y B son longitudes de los vectores dibujados desde los polos de $G(s)H(s) = K(s + 2)/(s^2 + 2s + 2)$ al punto s_1, y C es la longitud de los vectores dibujados desde el cero de $G(s)H(s)$ a s_1. En este caso, s_1 está sobre el RL, por lo que K es positiva. En general, el valor de K en los puntos donde el lugar geométrico de las raíces intersecta el eje imaginario se puede encontrar por el método descrito anteriormente. La Fig. 8-17 muestra que el valor de K en $s = 0$ es -1. El método de la computadora y el criterio de Routh-Hurwitz son otras alternativas convenientes para encontrar los valores críticos de K para la estabilidad. ▲

En resumen, excepto para casos extremadamente complejos, las propiedades sobre el lugar geométrico de las raíces presentadas con anterioridad, se deben adecuar para hacer un bosquejo razonablemente exacto del diagrama del lugar geométrico de las raíces al graficar punto por punto. Los programas de computadora se pueden utilizar para resolver la localización exacta de las raíces, los puntos de ruptura y algún otro detalle específico del lugar geométrico de las raíces, incluyendo la gráfica final del mismo. Sin embargo, uno no puede confiar por completo en la solución por computadora, ya que los usuarios aún tienen que decidir en que rango y la resolución de K para que el diagrama del lugar geométrico de las raíces aparezca en forma razonable. Para rápida referencia, las propiedades importantes descritas se resumen en la tabla 8-2.

El siguiente ejemplo ilustra la construcción del diagrama de lugar geométrico de las raíces en forma manual, paso por paso, empleando las propiedades del lugar geométrico de las raíces dadas en la tabla 8-2.

Ejemplo 8-17

Considere la ecuación:

$$s(s + 5)(s + 6)(s^2 + 2s + 2) + K(s + 3) = 0 \tag{8-73}$$

Al dividir ambos miembros de la última ecuación entre los términos que no contienen a K, se tiene:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)} \tag{8-74}$$

Las siguientes propiedades del lugar geométrico de las raíces se determinan:

1. Los puntos en $K = 0$ son los polos de $G(s)H(s)$: $s = 0, -5, -6, -1 + j$, y $-1 -j$.
2. Los puntos en $K = \pm\infty$ son los ceros de $G(s)H(s)$: $s = -3, \infty, \infty, \infty, \infty$.
3. Hay cinco ramas separadas sobre el lugar geométrico de las raíces.
4. Los lugares geométricos de las raíces son simétricos con respecto al eje real del plano s.

Tabla 8-2 Propiedades del lugar geométrico de las raíces de $1 + KG_1(s)H_1(s) = 0$

1. Los puntos en $K = 0$	Los puntos en $K = 0$ son en los polos en $G(s)H(s)$, incluyendo aquellos en $s = \infty$.
2. Los puntos en $K = \pm\infty$	Los puntos en $K = \pm\infty$ son los ceros de $G(s)H(s)$, incluyendo aquellos en $s = \infty$.
3. Número de los lugares geométricos de las raíces separados	El número total del lugar geométrico de las raíces es igual al orden de la ecuación $F(s) = 0$.
4. Simetría del lugar geométrico de las raíces	Los lugares geométrico de las raíces son simétricos respecto a los ejes de simetría de la configuración de polos y ceros de $G(s)H(s)$.
5. Asíntotas del lugar geométrico de las raíces cuando $s \to \infty$	Para valores grandes de s, el RL ($K > 0$) son asintóticos o son asíntotas con ángulos dados por: $\theta_i = \frac{2i+1}{\|n-m\|} \times 180°$ Para CRL ($K < 0$), $\theta_i = \frac{2i}{\|n-m\|} \times 180°$ en donde: $i = 0, 1, 2, \ldots, \|n-m\| - 1$; n = número de polos finitos de $G(s)H(s)$; m = número de ceros finitos de $G(s)H(s)$
6. Intersección de las asíntotas:	(a) La intersección de las asíntotas cae solamente sobre el eje real en el plano s. (b) El punto de intersección de las asíntotas está dado por:

$$\sigma_1 = \frac{\Sigma \text{ partes reales de polos de } G(s)H(s) - \Sigma \text{ partes reales de ceros de } G(s)H(s)}{[n-m]}$$

Tabla 8-2 *Continuación*

7. Lugar geométrico de las raíces sobre el eje real	RL ($K > 0$) se encuentran en una sección del eje real sólo si el número total de polos y ceros reales de $G(s)H(s)$ a la **derecha** de la sección es **impar.** Si el número total de polos reales y ceros a la derecha de una sección dada es **par,** se encuentra CRL ($K < 0$).
8. Ángulos de salida	Los ángulos de salida o llegada del un lugar de raíces desde un polo o un cero de $G(s)H(s)$ se puede determinar al suponer un punto s_1 que está muy cercano al polo, o cero, y al aplicar la ecuación: $$\angle G(s_1)H(s_1) = \sum_{k=1}^{m} \angle(s_1 + z_k) - \sum_{j=1}^{n} \angle(s_1 + p_j) = 2(i+1)180° \quad RL \; = 2i \times 180° \quad CRL$$ en donde $i = 0, \pm 1, \pm 2$.
9. Intersección del lugar geométrico de las raíces con el eje imaginario	Los puntos de cruce del lugar geométrico de las raíces sobre el eje imaginario y el valor correspondiente de K se pueden encontrar al emplear el criterio de Routh-Hurwitz.
10. Puntos de ruptura	Los puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces se determinan al encontrar las raíces de $dK/ds = 0$, o $dG(s)H(s)/ds = 0$. Estas son condiciones necesarias solamente
11. Cálculo de los valores de K sobre el lugar geométrico de las raíces	El valor absoluto de K en cualquier punto s_1 sobre el lugar geométrico de las raíces se determina de la ecuación: $$\lvert K\rvert = \frac{1}{\lvert G_1(s_1)H_1(s_1)\rvert}$$

5. Ya que $G(s)H(s)$ tiene cinco polos y un cero finito, cuatro de el RL y CRL se deben de aproximar al infinito a lo largo de las asíntotas. Los ángulos de las asíntotas de el RL están dadas por [Ecuación (8-33)]:

$$\theta_i = \frac{2i+1}{|n-m|} 180° = \frac{2i+1}{|5-1|} 180° \qquad 0 \le K < \infty \tag{8-75}$$

para $i = 0, 1, 2, 3$. Por tanto, los cuatro lugares geométricos de las raíces que se aproximan a infinito cuando K se aproxima a infinito deben aproximarse asintóticamente con ángulos de 45°, –45°, 135°, y –135°, respectivamente. Los ángulos de las asíntotas de el CRL en el infinito están dados por [Ecuación (8-34)]:

$$\theta_i = \frac{2i}{|n-m|} 180° = \frac{2i}{|5-1|} 180° \qquad -\infty < K \le 0 \tag{8-76}$$

para $i = 0, 1, 2, 3$. Por tanto, cuando K se aproxima a $-\infty$, los cuatro CRL deben aproximarse a infinito a lo largo de las asíntotas con ángulos de 0°, 90°, 180°, y 270°.

6. La intersección de las asíntotas está dada por [Ecuación (8-36)]:

$$\sigma_1 = \frac{\Sigma(-5-6-1-1)-(-3)}{4} = -2.5 \tag{8-77}$$

Los resultados de estos seis pasos se ilustran en la Fig. 8-18. Se debe de señalar que en general las propiedades de las asíntotas no indican en qué lado cae el lugar geométrico de las raíces. Las asíntotas no indican nada más que el comportamiento del lugar geométrico de las raíces cuando $s \to \infty$. De hecho, el lugar geométrico de las raíces puede aun cruzar una asíntota en el dominio s finito. Los segmentos de RL y CRL que se muestran en la Fig. 8-18 se pueden dibujar exactamente sólo si se da información adicional.

7. El lugar geométrico de las raíces sobre el eje real: Hay RL sobre el eje real entre $s = 0$ y -3, $s = -5$ y -6. Hay CRL en las porciones restantes del eje real, esto es entre $s = -3$ y -5, y $s = -6$ y $-\infty$, como se muestra en la Fig. 8-19.

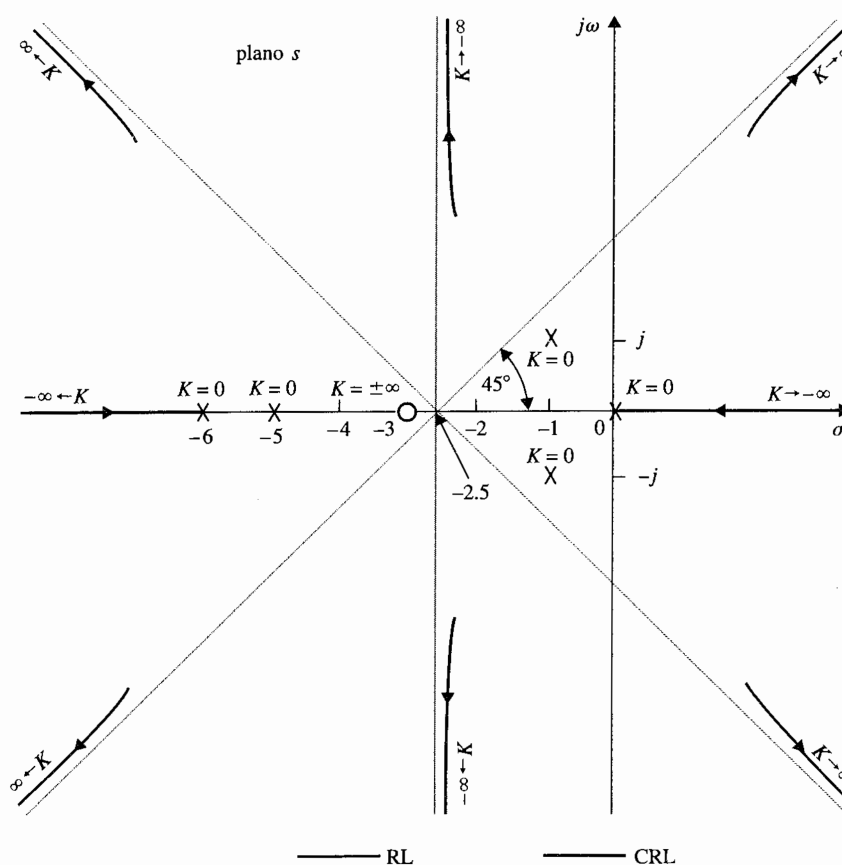


Figura 8-18 Cálculos preliminares del lugar geométrico de las raíces de $s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)+K(s+3)=0$.

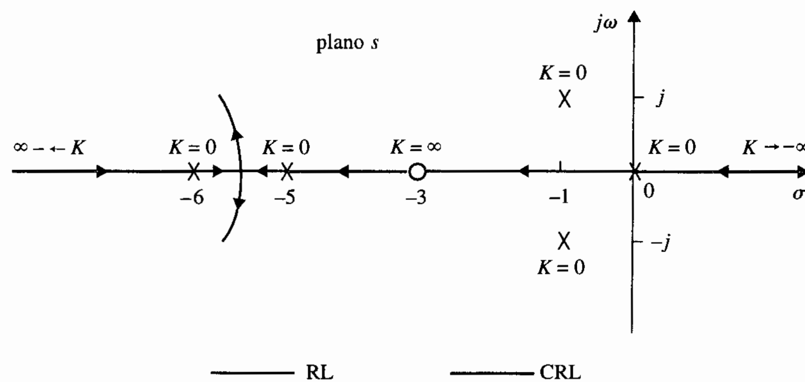


Figura 8-19 Lugar geométrico de las raíces de $s(s + 5)(s + 6)(s^2 + 2s + 2) + K(s + 3) = 0$ sobre el eje real.

8. Los ángulos de salida: Los ángulos de salida θ de el RL que dejan el polo en $-1 + j$ se determinan al emplear la ecuación (8-18). Si s_1 es un punto de el RL que deja el polo en $-1 + j$, y s_1 está muy cerca al polo, como se muestra en la Fig. 8-20, la ecuación (8-18) da:

$$\angle(s_1 + 3) - \angle s_1 - \angle(s_1 + 1 + j) - \angle(s_1 + 5) - \angle(s_1 + 1 - j) = (2i + 1)180° \quad (8\text{-}78)$$

o

$$26.6° - 135° - 90° - 14° - 11.4° - \theta \cong (2i + 1)180° \quad (8\text{-}79)$$

para $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Por tanto, al seleccionar $i = 2$ se obtiene:

$$\theta \cong -43.8° \quad (8\text{-}80)$$

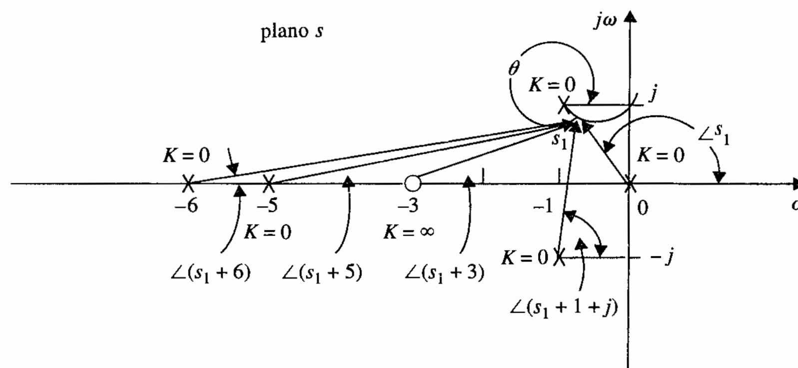


Figura 8-20 Cálculo de los ángulos de salida del lugar geométrico de las raíces de $s(s + 5)(s + 6)(s^2 + 2s + 2) + K(s + 3) = 0$.

En forma similar la ecuación (8-19) se utiliza para determinar los ángulos de llegada θ de el CRL al llegar al polo $-1+j$. Es fácil ver que θ' difiere de θ por 180°; por tanto:

$$\theta' = 180° - 43.8° = 136.2° \tag{8-81}$$

9. La intersección del lugar geométrico de las raíces con el eje imaginario se determina mediante la tabla de Routh. La ecuación (8-73) se escribe como:

$$s^5 + 13s^4 + 54s^3 + 82s^2 + (60 + K)s + 3K = 0 \tag{8-82}$$

La tabla de Routh es:

s^5	1	54	$60 + K$
s^4	13	82	$3K$
s^3	47.7	$0.769K$	0
s^2	$65.6 - 0.212K$	$3K$	0
s^1	$\dfrac{3940 - 105K - 0.163K^2}{65.6 - 0.212K}$	0	0
s^0	$3K$	0	0

Para la ecuación (8-82) no se tienen raíces sobre el eje imaginario o en el semiplano derecho del plano s, los elementos en la primera columna de la tabla de Routh deben ser todos del mismo signo. Por tanto, las siguientes desigualdades se deben satisfacer:

$$65.6 - 0.212K > 0 \quad \text{o} \quad K < 309 \tag{8-83}$$

$$3940 - 105K - 0.163K^2 > 0 \quad \text{o} \quad K < 35 \tag{8-84}$$

$$K > 0 \tag{8-85}$$

Por tanto, todas las raíces de la ecuación (8-82) deben permanecer en el lado izquierdo del plano s si K permanece entre 0 y 35, lo que significa que el lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-82) cruza el eje imaginario cuando $K = 35$ y $K = 0$. Las coordenadas de los puntos de cruce sobre el eje imaginario que corresponden a $K = 35$ se determinan de la ecuación auxiliar:

$$A(s) = (65.6 - 0.212K)s^2 + 3K = 0 \tag{8-86}$$

que se obtiene al utilizar los coeficientes del renglón justo abajo del renglón de ceros en el renglón s^1 que sucede cuando K se coloca en 35. Al sustituir $K = 35$ en la ecuación (8-86), se obtiene:

$$58.2s^2 + 105 = 0 \tag{8-87}$$

Las raíces de la ecuación (8-87) son $s = j1.34$ y $-j1.34$, que son los puntos en que el lugar geométrico de las raíces cruza el eje $j\omega$.

10. Puntos de ruptura: Con base a la información reunida de los nueve puntos anteriores, se bosqueja una prueba del lugar geométrico de las raíces que indica que sólo puede haber un punto de ruptura en el lugar geométrico de las raíces completo, y el punto debe estar

entre dos polos de $G(s)H(s)$ en $s = -5$ y -6. Para encontrar el punto de ruptura se toma la derivada en ambos miembros de la ecuación (8-74) con respecto a s y se iguala a cero, el resultado de la ecuación es:

$$s^5 + 13.5s^4 + 66s^3 + 142s^2 + 123s + 45 = 0 \qquad (8\text{-}88)$$

Ya que sólo se espera un punto de ruptura únicamente la raíz de la ecuación (8-88) es la solución correcta del punto de ruptura. Las cinco raíces de la ecuación (8-88) son:

$$s = -3.33 + j1.204 \qquad s = -3.33 - j1.204$$
$$s = -0.656 + j0.468 \qquad s = -0.656 - j0.468$$
$$s = -5.53$$

Claramente, el punto de ruptura está en -5.53. Las otras cuatro soluciones no satisfacen la ecuación (8-82) y por tanto no son puntos de ruptura. Con base en la información obtenida en los últimos 10 pasos, el lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-82) se bosqueja como se muestra en la Fig. 8-21. ▲

8-4 Soluciones por computadora

En esta sección se demuestra que las soluciones por computadora del lugar geométrico de las raíces usando **rlplot** de las herramientas de **CSAD** y **root** del **Programa CC.**

8-4-1 rlplot de CSAD

La función de transferencia $G(s)H(s)$ en la ecuación (8-74) se introduce a **rlplot** en formato de $N(s)/D(s)$.

```
>>n=[1 3] <CR>
>>d=pmult([1 0],[1 5],[1 6],[1 2 2]) <CR>
>>rlplot <CR>
```

Aparecerá el siguiente menú:

```
    - RLPLOT OPTIONS -

K values       Zeta line
Single K       Wn circle
Find K         Rule info
Grid           New/clear
Title          Display TF
               Quit

Option? >k <CR>     (Select K values to plot root loci)
Enter k values to plot >linespace(-3000,3000) <CR>     (K = -3000 to 3000)
```

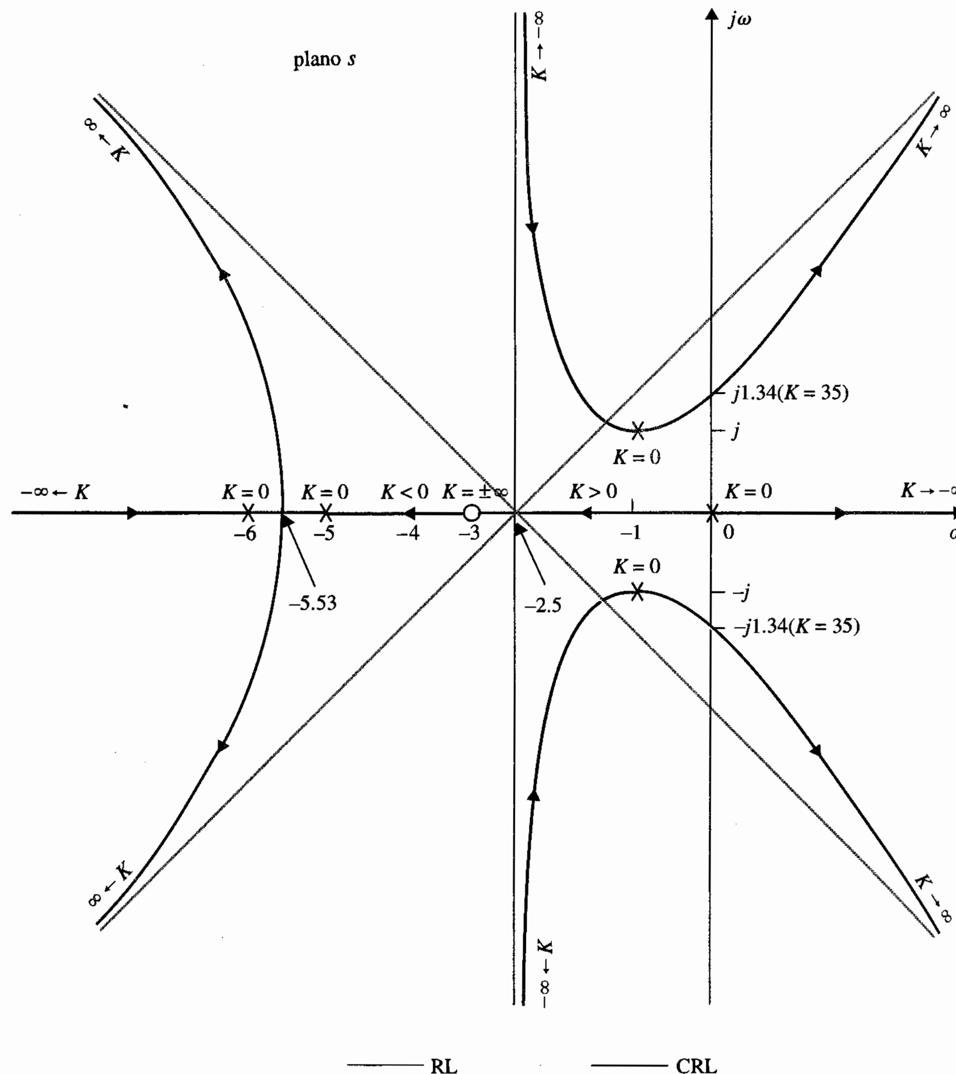


Figura 8-21 Lugar geométrico de las raíces de $s(s + 5)(s + 6)(s^2 + 2s + 2) + K(s + 3) = 0$

Este comando producirá una gráfica del lugar geométrico de las raíces de 100 puntos linealmente espaciados (por omisión) comenzando en $K = -3000$ a $K = 3000$. La gráfica del lugar geométrico de las raíces se muestra en la Fig. 8-22. Estas gráficas se obtienen con la tecla de shift-PrtSc para hacer una impresión de pantalla con **MATLAB.** Con un monitor a color, el RL se grafica en rojo y el CRL en verde.

Al seleccionar la opción de **Rule info** desde el menú, se obtiene la siguiente información sobre el lugar geométrico de las raíces:

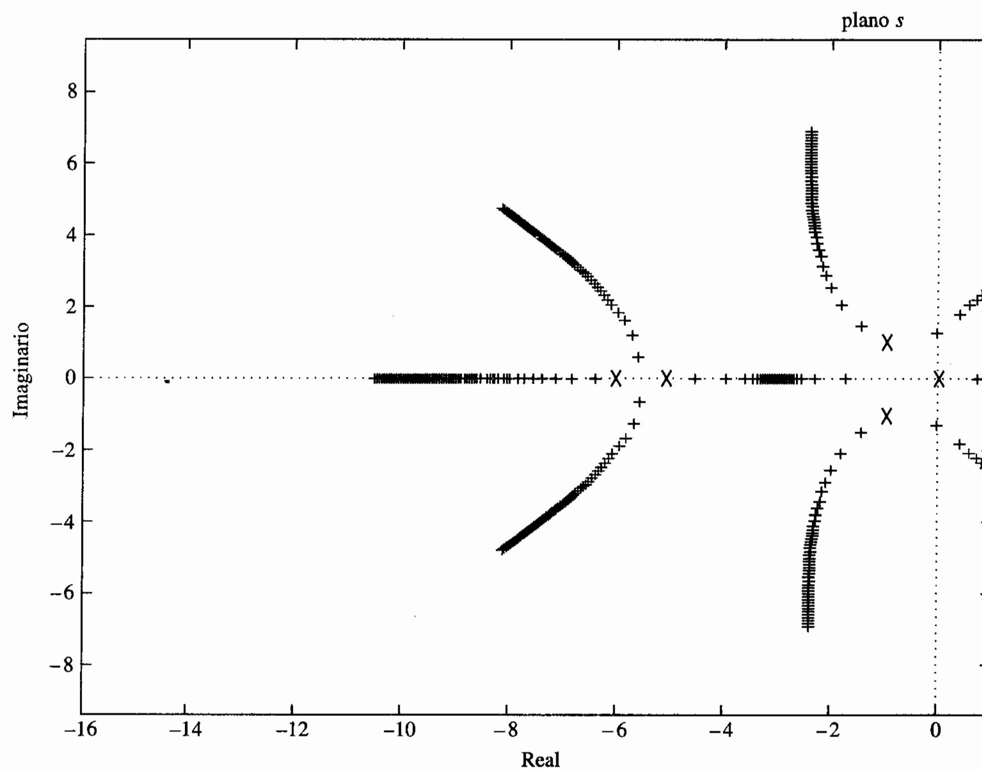


Figura 8-22 Lugar geométrico de las raíces de $G(s)H(s) = \dfrac{K(s+3)}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)}$ para $-3000 < K < 3000$ dibujado con **rlplot** de **CSAD.**

```
K=0 points                    K=inf points


                 0            -3.0000e+00
-6.0000e+000                       ∞
-5.0000e+000                       ∞
-1.0000e+000+ 1.0000e+000i         ∞
-1.0000e+000- 1.0000e+000i         ∞


Asymptote angles in degrees for
K>0           K<0
 45             0
135            90
225           180
315           270
```

```
Asymptote Intersection is: -2.5
Press any key to continue . . .
K>0 root loci appears on the real axis between:
0 and -3
-5 and -6
K<0 root loci appears along all
other sections of the real axis.
Angles of departure for K>0 are
Pole                            Angle (deg)
-1.0000+000- 1.0000e+000i       4.3781e+001
-1.0000+000+ 1.0000e+000i       -4.3781e+001
Possible Breakaway Points, and associatd |K| values are:
    Point                       |K|
-5.5257e+000                    1.1718e+001      (This is the only breakaway point)
-3.3311e+000+ 1.2040e+001i      1.2830e+002
-3.3311e+000- 1.2040e+001i      1.2830e+002
-6.5604e-000+ 4.6768e-001i      7.5478e+000
-6.5604e-000- 4.6768e-001i      7.5478e+000
Find a jw-axis crossing? (y/n) [y] ><CR>
Enter a value of K that gives stability [0.001]><CR>
Enter a value of K that gives Instability [1000]><CR>
A jw-axis crossing occurs at K=35.519
Associated system poles are
-5.5803 + 0.7077i
-5.5803 - 0.0707i
-1.8393
-0.0000 + 1.3531i
-0.0000 - 1.3531i
```

Este programa tiene otras funciones, encontrar los valores de las raíces para un valor de K dado, encontrar las raíces para valores de K en un punto sobre el lugar geométrico de las raíces indicado por el cursor del ratón, etcétera.

8-4-2 Lugar geométrico de las raíces del Programa CC

El **Programa CC** tiene un comando, **root, g,** que calcula y gráfica el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica de la función de transferencia de $G(s)$. Los siguientes mandatos de entrada se dan para la función de transferencia de la ecuación (8-74):

```
>g=(s+3)/(s*(s+5)*(s+6)*(s^2+2*s+2)) <CR>
>root,g,auto <CR>    (auto implies that automatic scales are selected for both axes)
```

La gráfica del lugar geométrico de las raíces de la Fig. 8-23 se muestra en la pantalla del monitor para el RL y para el CRL utilizando la opción N para ganancias negativas. Sin embargo, el vaciado de la pantalla en la versión de **CC** para estudiantes toma un tiempo muy largo para ejecutarse. La opción **I** despliega información sobre polos en lazo abierto, ceros, puntos de ruptura, ángulos de salida y llegada, y comportamiento de las asíntotas. Otros detalles del programa no se presentan aquí.

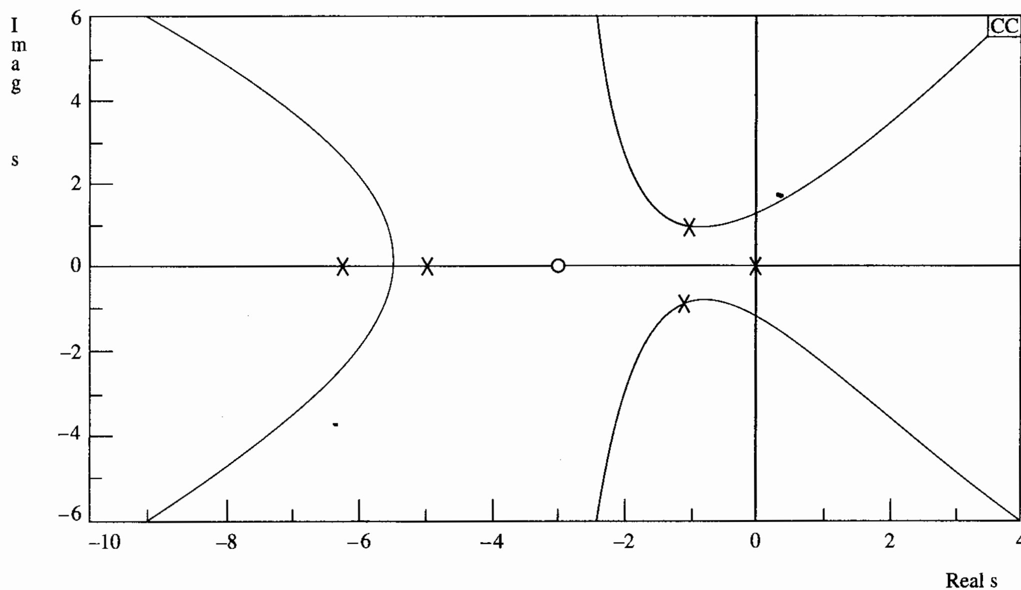


Figura 8-23 Lugar geométrico de las raíces de $G(s)H(s) = \dfrac{K(s+3)}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)}$ dibujado con **root** de **Program CC.**

8-5 Algunos aspectos importantes de la construcción del lugar geométrico de las raíces

Uno de los aspectos importantes de la técnica del lugar geométrico de las raíces es que para la mayoría de los sistemas de control con una complejidad moderada, el analista o diseñador puede tener información vital sobre el desempeño del sistema al hacer un rápido bosquejo del lugar geométrico de las raíces empleando algunas de las propiedades del lugar geométrico de las raíces. Es importante entender todas las propiedades del lugar geométrico de las raíces aun cuando el diagrama será graficado con la ayuda de una computadora digital. Desde el punto de vista de diseño, es útil aprender los efectos sobre el lugar geométrico de las raíces cuando polos y ceros de $G(s)H(s)$ se añaden o mueven del plano s. Algunas de estas propiedades son de utilidad en la construcción del diagrama del lugar geométrico de las raíces.

8-5-1 Efectos de añadir polos y ceros a $G(s)H(s)$

El problema general del diseño de controladores en sistemas de control se debe tratar como el investigar los efectos sobre el lugar geométrico de las raíces cuando se añaden polos y ceros a la función de transferencia de lazo $G(s)H(s)$.

▲ El añadir un polo a $G(s)H(s)$ tiene el efecto de empujar el lugar geométrico de las raíces hacia la derecha.

La Adición de polos a $G(s)H(s)$

Añadir un polo a $G(s)H(s)$ tiene el efecto de empujar el lugar geométrico de las raíces hacia el semiplano derecho del plano s.

El efecto de añadir un polo a $G(s)H(s)$ se puede ilustrar mediante varios ejemplos:

Ejemplo 8-18

Considere la función:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+a)} \qquad a > 0 \tag{8-89}$$

El RL de $1 + G(s)H(s) = 0$ se muestra en la Fig. 8-24(a). Estos lugares geométricos de las raíces se construyen con base a los polos de $G(s)H(s)$, que son $s = 0$ y $-a$. Ahora se introduce un polo en $s = -b$ con $b > a$. La función $G(s)H(s)$ ahora se convierte:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+a)(s+b)} \tag{8-90}$$

La Fig. 8-24(b) muestra que el polo en $s = -b$ causa que la parte compleja del lugar geométrico de las raíces se mueva hacia el semiplano derecho del plano s. Los ángulos de las asíntotas para raíces complejas cambian desde ±90° hasta ±60°. La intersección de las asíntotas también se mueve desde $-a/2$ hasta $-(a + b)/2$ sobre el eje real. Si $G(s)H(s)$ representa la función de transferencia de lazo de un sistema de control, el sistema con el lugar geométrico de las raíces en la Fig. 8-24(b) se puede volver inestable si los valores de K exceden el valor crítico para la estabilidad, mientras que el sistema representado por el lugar geométrico de las raíces en la Fig. 8-24(a) está siempre estable para $K > 0$. La Fig. 8-24(c) muestra que el lugar geométrico de las raíces con otro polo añadido a $G(s)H(s)$ es $s = -c$, $c > b$. El sistema es ahora de cuarto orden, y los lugares geométricos de las raíces son complejos y se mueven hacia la derecha. Los ángulos de las asíntotas de estos lugares geométricos complejos son ahora de ±45°. La condición de estabilidad al sistema de cuarto orden es ahora más aguda que para el sistema de tercer orden. La Fig. 8-24(d) ilustra que la adición de un par de polos complejos conjugados a la función de transferencia de la ecuación (8-89) resultará en un efecto similar. Por tanto, se puede delinear una conclusión general de que la adición de polos a $G(s)H(s)$ tiene el efecto de mover la porción dominante del lugar geométrico de las raíces hacia el semiplano derecho del plano s. ▲

Adición de ceros a $G(s)H(s)$

▲ El añadir ceros a $G(s)H(s)$ tiende a empujar el lugar geométrico de las raíces hacia la izquierda.

El añadir ceros en el semiplano izquierdo a la función $G(s)H(s)$ generalmente tiene el efecto de mover y colocar el lugar geométrico de las raíces hacia el semiplano izquierdo del plano s.

El siguiente ejemplo ilustra el efecto de adicionar un cero y ceros a $G(s)H(s)$ *sobre* el lugar geométrico de las raíces.

Ejemplo 8-19

La Fig. 8-25(a) muestra el RL de $G(s)H(s)$ en la ecuación (8-89) con un cero añadido a $s = -b$ ($b > a$). Las partes complejas conjugadas de el RL del sistema original se mueven hacia la izquierda y forman un círculo. Por tanto, si $G(s)H(s)$ es la función de transferencia de lazo de un sistema de control, la estabilidad relativa del sistema se incrementa al añadir el cero. La Fig. 8-25(b) muestra que un efecto similar se puede producir cuando un par de ceros complejos conjugados se añade a la función de la ecuación

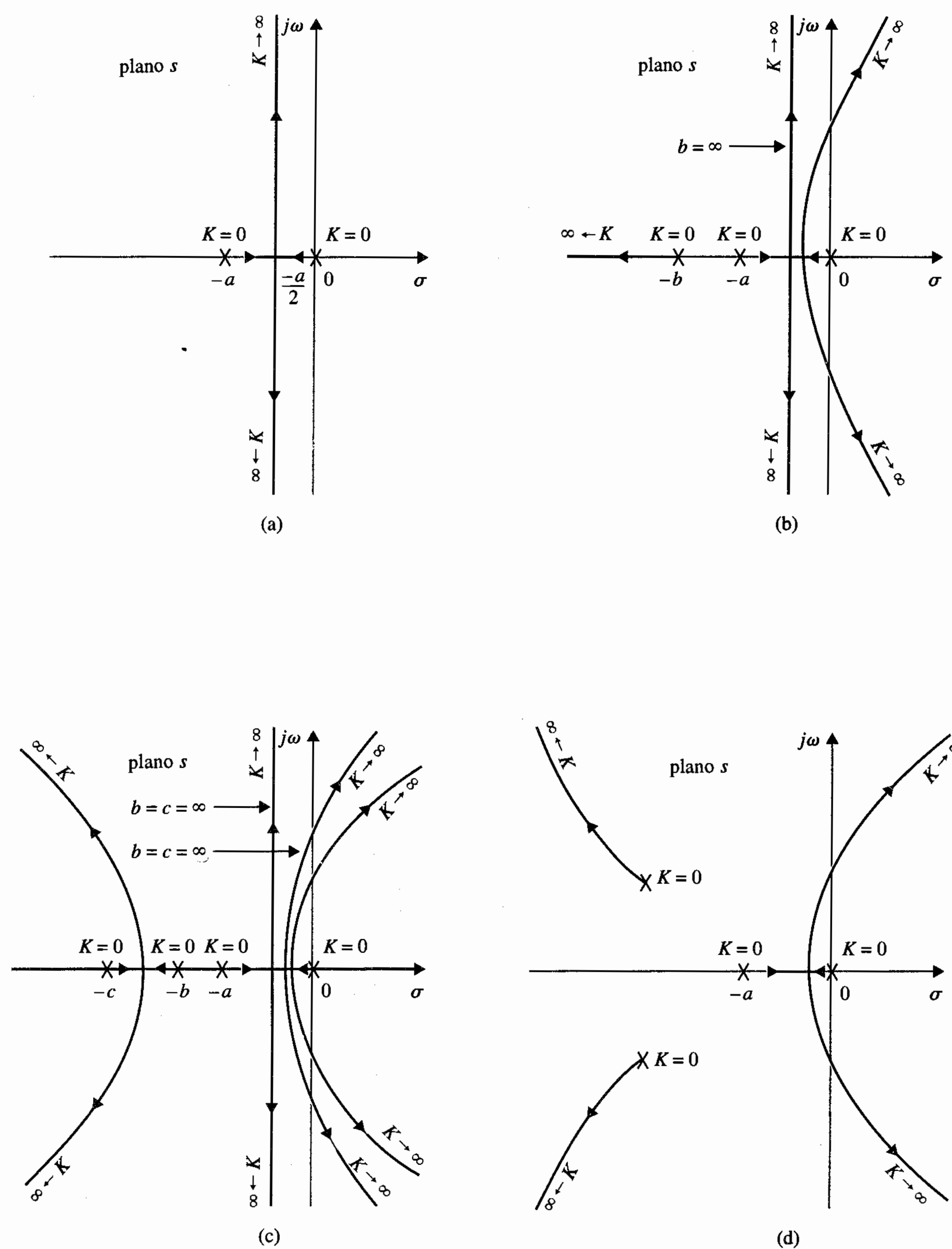


Figura 8-24 Diagramas del lugar geométrico de las raíces que muestran los efectos de añadir polos a $G(s)H(s)$.

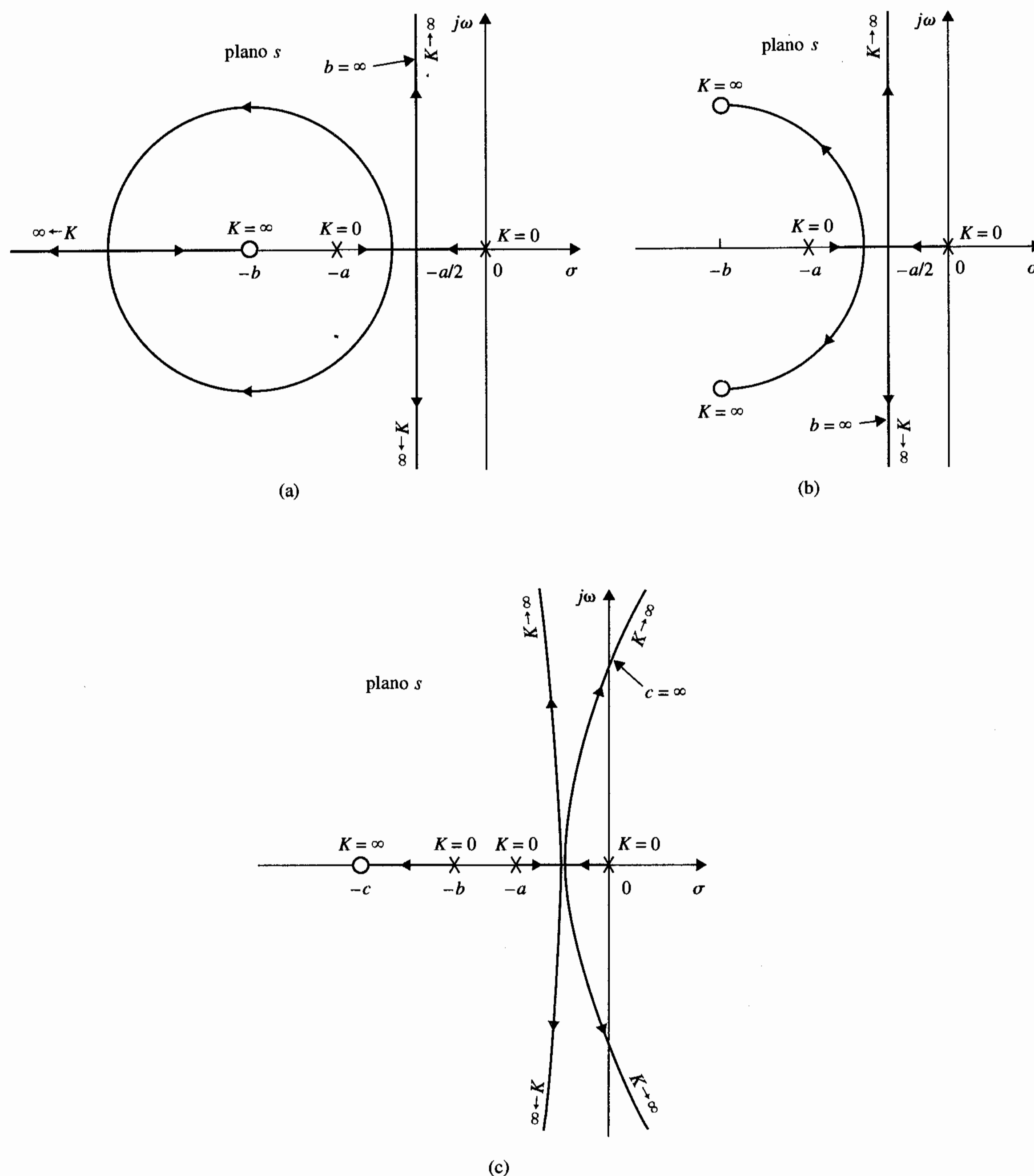


Figura 8-25 Diagramas del lugar geométrico de las raíces que muestran los efectos de añadir un cero a $G(s)H(s)$.

E 8

(8-89). La Fig. 8-25(c) muestra el RL, cuando un cero en $s = -c$ se añade a la función de transferencia de la ecuación (8-90). ▲

Ejemplo 8-20

Considere la ecuación:

$$s^2(s + a) + K(s + b) = 0 \tag{8-91}$$

Al dividir ambos lados de la ecuación (8-91) entre los términos que no contienen a K, se tiene la función de transferencia de lazo:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + b)}{s^2(s + a)} \tag{8-92}$$

se puede mostrar que los puntos de ruptura no cero dependen del valor de a, y son:

$$s = -\frac{a + 3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{a^2 - 10a + 9} \tag{8-93}$$

La Fig. 8-26 muestra el RL de la ecuación (8-91) con $b = 1$ y valores diferentes de a. Los resultados se resumen a continuación:

- ▲ La Fig. 8-26(a): $a = 10$. Puntos de ruptura: $s = -2.5$ y -4.0.
- ▲ La Fig. 8-26(b): $a = 9$. Los dos puntos de ruptura dados por la ecuación (8-93) convergen a un punto que es igual a $s = -3$. Observe el cambio en el RL cuando el polo en $-a$ se mueve de -10 hacia -9.

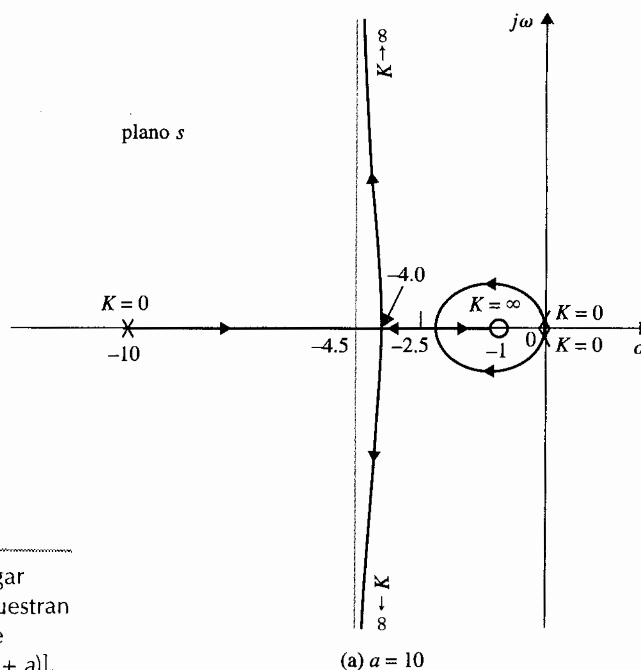
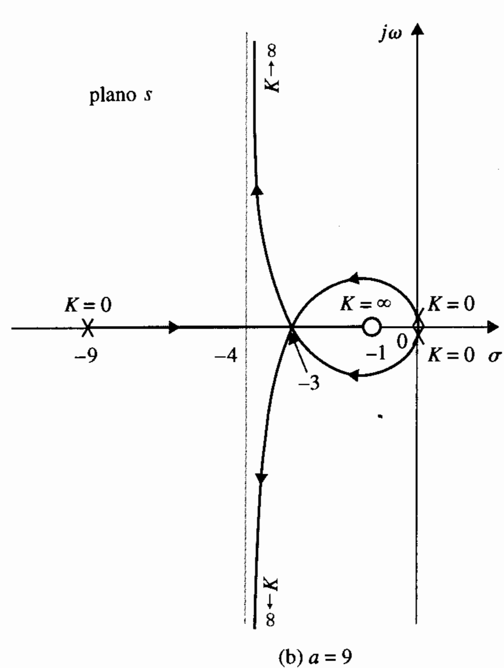
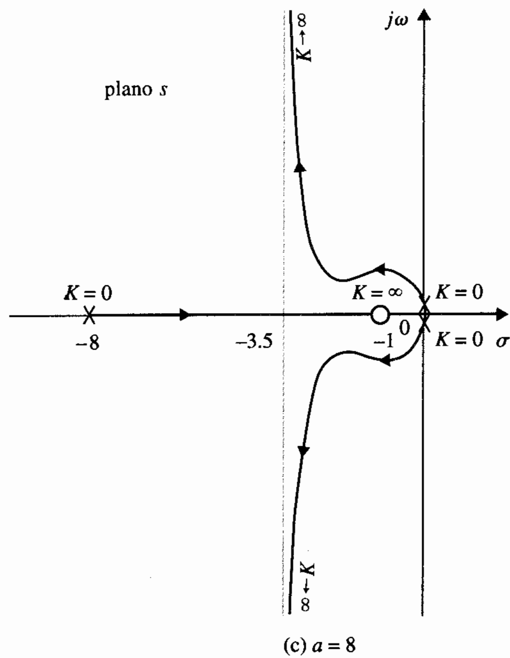


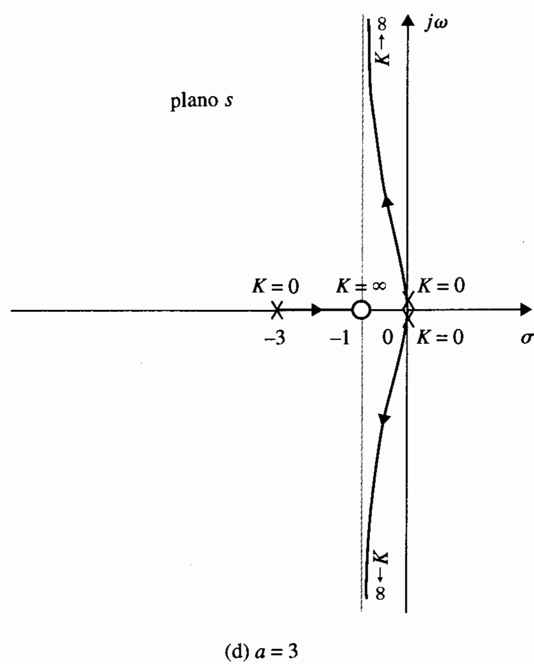
Figura 8-26 Diagramas del lugar geométrico de las raíces que muestran los efectos de mover un polo de $G(s)H(s)$. $G(s)H(s) = K(s+1)/[s^2(s + a)]$.



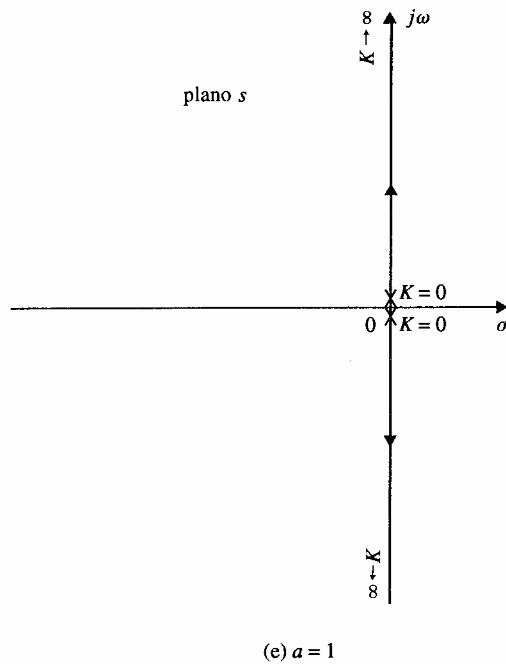
(b) $a = 9$



(c) $a = 8$



(d) $a = 3$



(e) $a = 1$

Figura 8-26 (Continuación.)

Para los valores de a menores a 9, los valores de s dados por la ecuación (8-93) no satisfacen la ecuación (8-91), lo que significa que no hay puntos de ruptura finitos, otro mas que $s = 0$.

▲ La Fig. 8-26(c): $a = 8$. No hay puntos de ruptura sobre el RL, excepto en $s = 0$.

Como el polo en $s = -a$ se mueve más lejos hacia la derecha sobre el eje real, la porción compleja de el RL es empujada lejos hacia el semiplano derecho.

▲ La Fig. 8-26(d): $a = 3$
▲ La Fig. 8-26(e): $a = b = 1$. El polo en $s = -a$ y el cero en $-b$ se cancelan uno con otro, y el RL degenera en un sistema de segundo orden y cae enteramente dentro del eje $j\omega$. ▲

Ejemplo 8-21

Considere la ecuación:

$$s(s^2 + 2s + a) + K(s + 2) = 0 \tag{8-94}$$

que nos lleva a $G(s)H(s)$ equivalente como:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 2)}{s(s^2 + 2s + a)} \tag{8-95}$$

El objetivo es estudiar el RL para varios valores de a (>0). La ecuación del punto de ruptura del RL se determina como:

$$s^3 + 4s^2 + 4s + a = 0 \tag{8-96}$$

La Fig. 8-27 muestra el lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-94) bajo las siguientes condiciones.

▲ Fig. 8-27(a): $a = 1$. Puntos de ruptura: $s = -0.38$, -1.0, y -2.618, con el último punto sobre el CRL. A medida que el valor de a incrementa desde uno, dos polos dobles de $G(s)H(s)$ en $s = -1$ se moverán en forma vertical de arriba hacia abajo, con las partes reales igual a -1. Los puntos de ruptura en $s = -0.38$ y $s = -2.618$ se moverán a la izquierda, mientras que el punto de ruptura en $s = -1$ se moverán hacia la derecha.
▲ Fig. 8-27(b): $a = 1.12$. Puntos de ruptura: $s = -0.493$, -0.857, y -2.65. Ya que las partes reales de los ceros y polos de $G(s)H(s)$ no se afectan por el valor de a, la intersección de asíntotas siempre está en $s = 0$.
▲ Fig. 8-27(c): $a = 1.185$. Puntos de ruptura: $s = -0.667$, -0.667, y -2.667. Los dos puntos de ruptura de RL que están entre $s = 0$ y -1 convergen a un punto.
▲ Fig. 8-27(d): $a = 3$. Puntos de ruptura: $s = -3$. Cuando a es mayor que 1.185, la ecuación (8-96) da una solución para el punto de ruptura.

El lector puede investigar las diferencias entre el lugar geométrico de las raíces en la Fig. 8-27(c) y (d), y cubrir la evolución del lugar cuando el valor de a se cambia gradualmente desde 1.185 hasta 3 y más allá. ▲

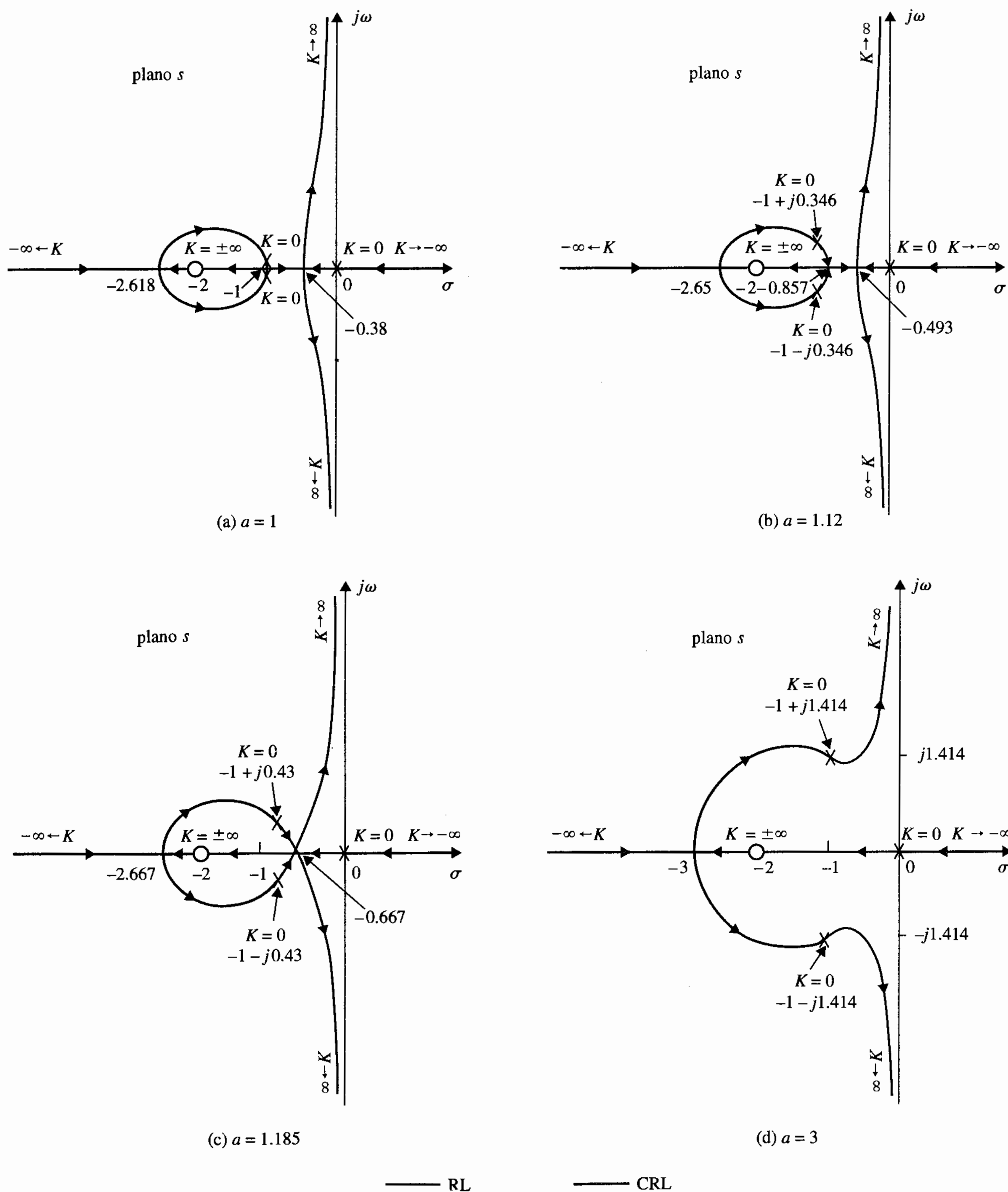


Figura 8-27 Diagramas del lugar geométrico de las raíces que muestran los efectos de mover un polo de $G(s)H(s) = K(s+2)/[s(s^2 + 2s + 2)]$.

8-6 Contornos de las raíces: Variación de parámetros múltiples

La técnica del lugar geométrico de las raíces estudiada hasta ahora se limita sólo a un parámetro variable en K. En muchos problemas de sistemas de control, a menudo los efectos de la variación de diferentes parámetros se deben investigar. Por ejemplo, cuando se diseña un controlador que está representado por una función de transferencia con polos y ceros, es útil investigar los efectos sobre las raíces de la ecuación característica cuando estos polos y ceros toman varios valores. En la Sec. 8-5 el lugar geométrico de las raíces de ecuaciones con dos parámetros variables se estudiaron con un parámetro fijo y asignación de diferentes valores al otro. En esta sección, el problema de parámetros múltiples se investiga a través de un método más sistemático. Cuando más de un parámetro varía en forma continua desde $-\infty$ hasta ∞, el lugar geométrico de las raíces se refiere como los **contornos de las raíces** (RCs). Se mostrará que los contornos de las raíces poseen todavía las mismas propiedades que el lugar geométrico de las raíces de un parámetro sencillo, por lo que los métodos de construcción discutidos hasta ahora son aplicables.

El principio de los contornos de las raíces puede describirse al considerar la ecuación:

$$P(s) + K_1Q_1(s) + K_2Q_2(s) = 0 \tag{8-97}$$

donde K_1 y K_2 son los parámetros variables y $P(s)$, $Q_1(s)$ y $Q_2(s)$ son polinomios de s. El primer paso involucra hacer el valor de uno de los parámetros a cero. Considere que K_2 es cero. Entonces, la ecuación (8-97) se convierte en:

$$P(s) + K_1Q_1(s) = 0 \tag{8-98}$$

que sólo tiene un parámetro variable en K_1. El lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-98) se puede determinar al dividir ambos miembros de la ecuación entre $P(s)$. Por tanto:

$$1 + \frac{K_1Q_1(s)}{P(s)} = 0 \tag{8-99}$$

La última ecuación es de la forma de $1 + K_1 G_1(s)H_1(s) = 0$, por lo que se puede construir el lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-98) con base en la configuración de polos y ceros de $G_1(s) H_1(s)$. Después se restaura el valor de K_2, mientras que se considera que el valor de K_1 está fijo, y se dividen ambos miembros de la ecuación (8-97) entre los términos que no contengan a K_2. Se obtiene:

$$1 + \frac{K_2Q_2(s)}{P(s) + K_1Q_1(s)} = 0 \tag{8-100}$$

que es de la forma de $1 + K_2G_2(s)H_2(s) = 0$. Los contornos de las raíces de la ecuación (8-97) cuando K_2 varía (mientras K_1 es fija), se construye con base en la configuración de polos y ceros de:

$$G_2(s)H_2(s) = \frac{Q_2(s)}{P(s) + K_1Q_1(s)} \tag{8-101}$$

Es importante notar que los polos de $G_2(s)H_2(s)$ son idénticos a las raíces de la ecuación (8-98). Por tanto, los contornos de las raíces de la ecuación (8-97) cuando K_2 varía deben todos comenzar ($K_2 = 0$) en los puntos en que están sobre el lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-98). Esta es la razón por la cual el problema del contorno de una raíz se considera incluido en otros. El mismo procedimiento se puede extender a la variación de más de dos parámetros. Los siguientes ejemplos ilustran la construcción de RCs cuando existen situaciones de variación en parámetros múltiples.

Ejemplo 8-22

Considere la ecuación:

$$s^3 + K_2 s^2 + K_1 s + K_1 = 0 \tag{8-102}$$

en donde K_1 y K_2 son los parámetros variables, que varían desde 0 hasta ∞.

Como primer paso, se asume que $K_2 = 0$, y la ecuación (8-102) se convierte a:

$$s^3 + K_1 s + K_1 = 0 \tag{8-103}$$

Al dividir ambos miembros de la última ecuación entre s^3, que es el término que no contienen a K_1, se tiene:

$$1 + \frac{K_1(s+1)}{s^3} = 0 \tag{8-104}$$

El RC de la ecuación (8-103) se dibuja con base en la configuración de polos y ceros de:

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{s+1}{s^3} \tag{8-105}$$

como se muestra en la Fig. 8-28(a). A continuación se deja que K_2 varíe desde 0 hasta ∞ mientras se mantiene constante a K_1 en un valor diferente de cero. Al dividir ambos lados de la ecuación (8-102) entre los términos que no contienen a K_2, se tiene:

$$1 + \frac{K_2 s^2}{s^3 + K_1 s + K_1} = 0 \tag{8-106}$$

Por tanto, los contornos de las raíces de la ecuación (8-102) cuando K_2 varía se puede dibujar de la configuración de polos y ceros de:

$$G_2(s)H_2(s) = \frac{s^2}{s^3 + K_1 s + K_1} \tag{8-107}$$

Los ceros de $G_2(s)H_2(s)$ están en $s = 0, 0$; pero los polos están en los ceros de $1 + K_1G_1(s)H_1(s)$, que se encuentran sobre el RL de la Fig. 8-28(a). Por tanto, para K_1 fija, el RC cuando K_2 varía debe emerger de el RC de la Fig. 8-28(a). La Fig. 8-28(b) muestra el RC de la ecuación (8-102) cuando K_2 varía desde 0 hasta ∞, para $K_1 = 0.0184$, 0.25, y 2.56. ▲

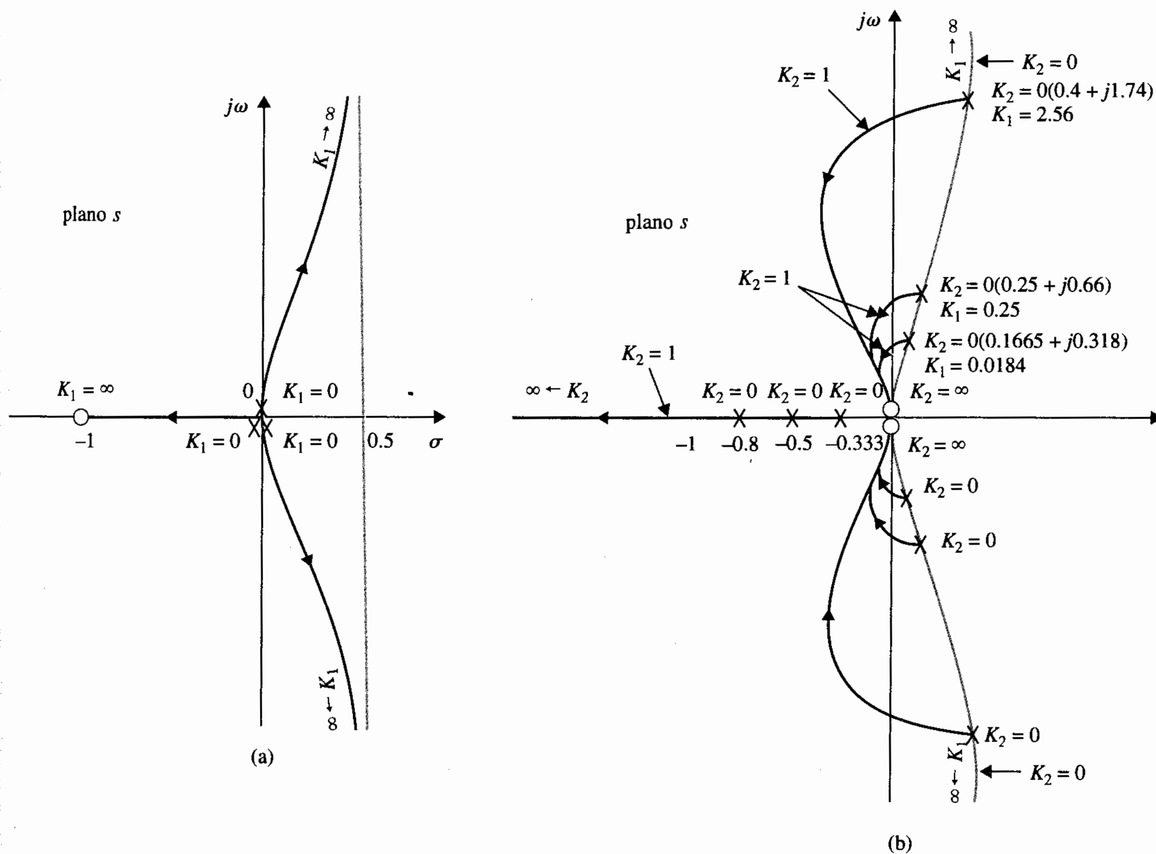


Figura 8-28 Contornos de las raíces de $s^3 + K_2 s^2 + K_1 s + K_1 = 0$. (a) $K_2 = 0$. (b) K_2 varía y K_1 es constante.

Ejemplo 8-23

Considere la función de transferencia de lazo:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(1 + Ts)(s^2 + 2s + 2)} \tag{8-108}$$

de un sistema de control en lazo cerrado. Se desea construir el RC de la ecuación característica con K y T como parámetros variables. La ecuación característica del sistema es:

$$s(1 + Ts)(s^2 + 2s + 2) + K = 0 \tag{8-109}$$

Primero, se hace a T igual a cero. La ecuación característica se convierte en:

$$s(s^2 + 2s + 2) + K = 0 \tag{8-110}$$

El RC de esta ecuación cuando K varía se dibuja con base en la configuración de polos y ceros de:

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} \tag{8-111}$$

como se muestra en la Fig. 8-29(a). A continuación se hace a K fija y se considera que T es el parámetro variable.

Al dividir ambos miembros de la ecuación (8-109) entre el término que no contiene a T, se tiene:

$$1 + TG_2(s)H_2(s) \doteq 1 + \frac{Ts^2(s^2 + 2s + 2)}{s(s^2 + 2s + 2) + K} = 0 \tag{8-112}$$

Los RCs cuando T varía se construyen con base en la configuración de polos y ceros de $G_2(s)\,H_2(s)$. Cuando $T = 0$, los puntos sobre los RCs son los polos de $G_2(s)\,H_2(s)$, que están sobre los RC de la ecuación (8-110). Cuando $T = \infty$, las raíces de la ecuación (8-109) son los ceros de $G_2(s)\,H_2(s)$, que están en $s = 0, 0, -1 + j$, y $-1 -j$. La Fig. 8-29(b) muestra la configuración de polos y ceros de $G_2(s)$ $H_2(s)$ para $K = 10$. Observe que $G_2(s)\,H_2(s)$ tiene tres polos finitos y cuatro ceros finitos. Los RCs de la ecuación (8-109) cuando T varía se muestran en las Figs. 8-80, 8-31, y 8-32 para tres valores diferentes de K. Los RCs en la Fig. 8-31 muestran que cuando $K = 0.5$ y $T = 0.5$, la ecuación característica en la ecuación (8-109) tiene una raíz cuádruple en $s = -1$. ▲

Ejemplo 8-24

Como ejemplo para ilustrar el efecto de la variación de un cero de $G(s)\,H(s)$, considere la función:

$$G(s)H(s) = \frac{K(1 + Ts)}{s(s + 1)(s + 2)} \tag{8-113}$$

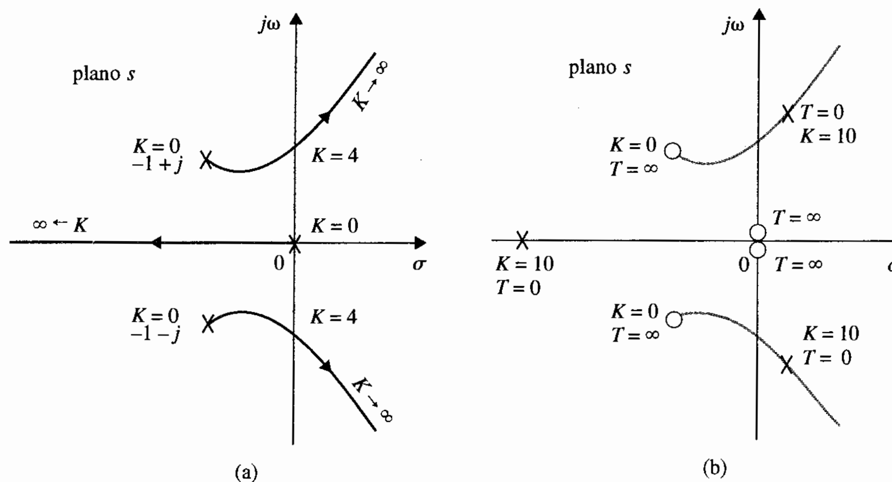


Figura 8-29 (a) Lugar geométrico de las raíces para $s(s^2 + 2s + 2) + K = 0$. (b) Configuración de polos y ceros de $G_2(s)\,H_2(s) = Ts^2(s^2 + 2s + 2)/[s(s^2 + 2s + 2) + K]$.

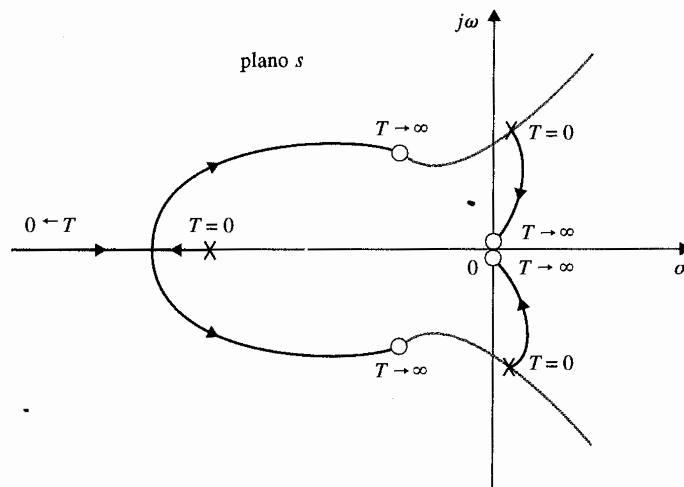


Figura 8-30 Contornos de las raíces para $s(1 + Ts)(s^2 + 2s + 2) + K = 0$. $K > 4$.

La ecuación característica es:

$$s(s + 1)(s + 2) + K(1 + Ts) = 0 \tag{8-114}$$

Haciendo que T sea igual a cero y considerando el efecto de variable K. La ecuación (8-114) se convierte en:

$$s(s + 1)(s + 2) + K = 0 \tag{8-115}$$

que lleva a:

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{1}{s(s + 1)(s + 2)} \tag{8-116}$$

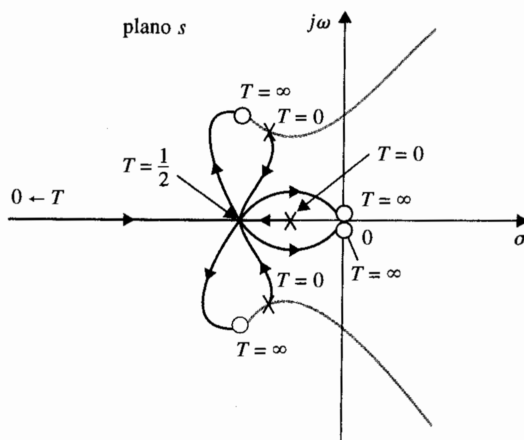


Figura 8-31 Contornos de las raíces para $s(1 + Ts)(s^2 + 2s + 2) + K = 0$. $K = 0.5$.

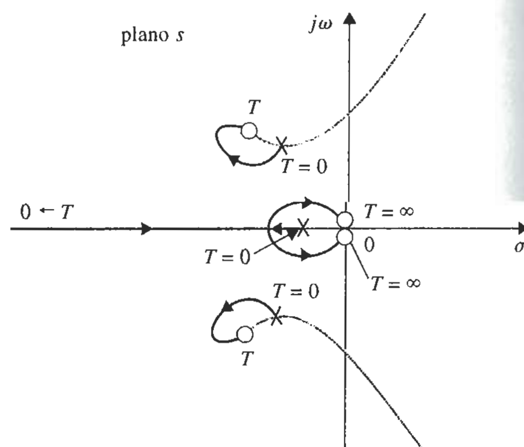


Figura 8-32 Contornos de las raíces para $s(1 + Ts)(s^2 + 2s + 2) + K = 0$. $\check{K} < 0.5$.

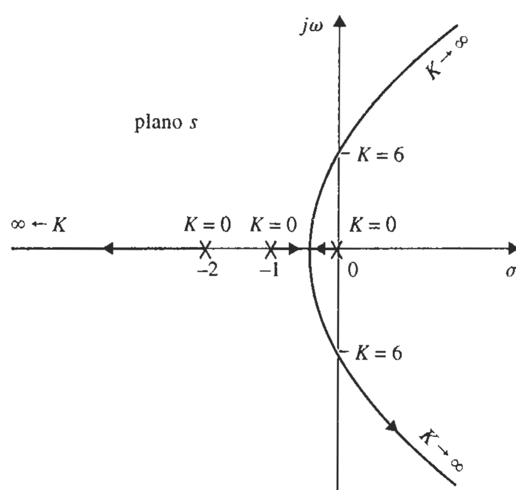


Figura 8-33 RC para $s(s + 1)(s + 2) + K = 0$.

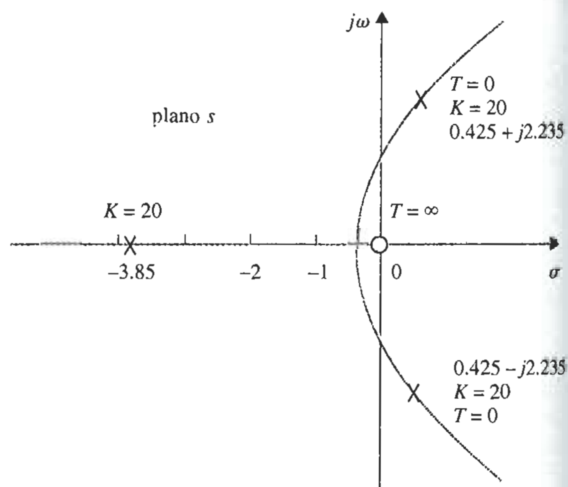


Figura 8-34 Configuración de polos y ceros de $G_2(s)H_2(s) = TKs/[s(s + 1)(s + 2) + K]$. $K = 20$.

El RL de la ecuación (8-115) se dibuja con base en la configuración de polos y ceros de la ecuación (8-116) y se muestra en la Fig. 8-33.

Cuando K está fija y no cero, se dividen ambos miembros de la ecuación (8-114) entre el término que no contiene T, y se tiene:

$$1 + TG_2(s)H_2(s) = 1 + \frac{TKs}{s(s+1)(s+2)+K} = 0 \qquad (8\text{-}117)$$

Los puntos que corresponden a $T = 0$ en los RCs son los polos de $G_2(s)H_2(s)$ o los ceros de $s(s+1)(s+2) + K$, cuyos RC se bosquejan como se muestra en la Fig. 8-33 cuando K varía. Si se selecciona $K = 20$ tal como se ilustra, la configuración de polos y ceros de $G_2(s)H_2(s)$ se muestra en la Fig. 8-34. Los RCs de la ecuación (8-114) para $0 \le T < \infty$ se muestran en la Fig. 8-35 para tres diferentes valores de K.

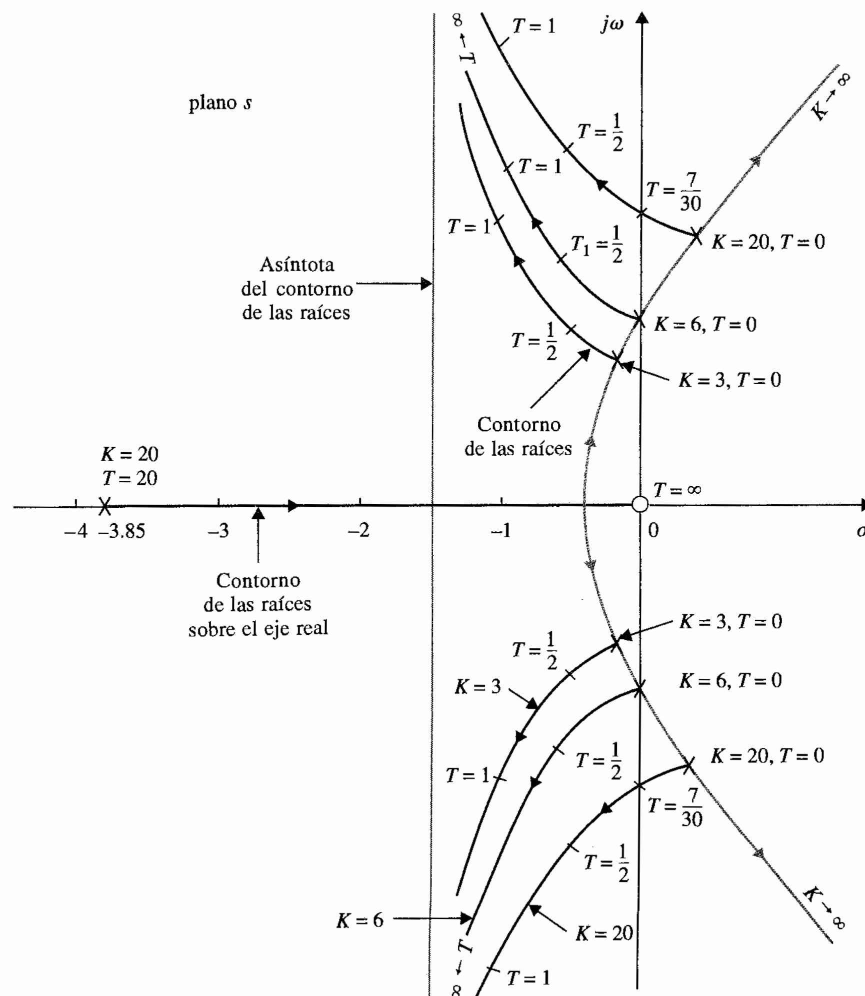


Figura 8-35 Contornos de las raíces de $s(s+1)(s+2) + K + KTs = 0$.

Ya que $G_2(s)H_2(s)$ tiene tres polos y un cero, los ángulos de las asíntotas de los RCs cuando T varía son 90° y −90°. Se puede mostrar que la intersección de las asíntotas es siempre $s = 1.5$. Esto se debe a que la suma de los polos de $G_2(s)H_2(s)$, que está dada por los negativos de los coeficientes del término s^2 en el polinomio denominador de la ecuación (8-117), es 3, la suma de ceros de $G_2(s)H_2(s)$ es 0, y $n - m$ en la ecuación (8-36) es 2.

Los RCs en la Fig. 8-35 muestran que al añadir un cero en la función de transferencia de lazo por lo general se mejora la estabilidad relativa del sistema en lazo cerrado al mover la raíz de la ecuación característica hacia la izquierda en el plano s. Como se muestra en la Fig. 8-35, para $K = 20$, el sistema se estabiliza para todos los valores de T mayores que 0.2333. Sin embargo, el factor de amortiguamiento relativo más grande que puede tener el sistema al incrementar T es aproximadamente del 30%. ▲

8-7 Lugar geométrico de las raíces de sistemas en tiempo discreto [23,24]

La técnica del lugar geométrico de las raíces se puede aplicar a sistemas en tiempo discreto sin ninguna complicación. Con la función de transferencia en términos de la transformada z, el lugar geométrico de las raíces para sistemas en tiempo discreto se grafica en el plano z, en lugar de en el plano s. Considérese el sistema en tiempo discreto que se muestra en la Fig. 8-36. Las raíces de la ecuación característica del sistema satisfacen a la ecuación siguiente:

$$1 + GH^*(s) = 0 \tag{8-118}$$

en el plano s, o

$$1 + GH(z) = 0 \tag{8-119}$$

en el plano z. Del Cap. 3, $GH^*(s)$ se escribe como:

$$GH^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s)H(s + jn\omega_s) \tag{8-120}$$

que es una serie infinita. Por lo tanto, los polos y ceros de $GH^*(s)$ en el plano s serán infinito en número. Esto evidentemente hace que la construcción del lugar geométrico de las raíces

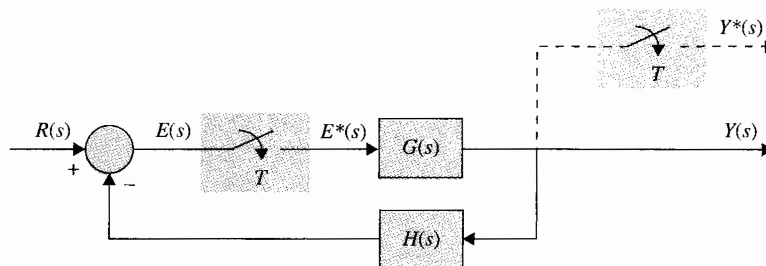


Figura 8-36 Sistema de control en tiempo discreto.

de la ecuación (8-118) en el plano s sea muy complicada. Como ilustración, considere que para el sistema de la Fig. 8-36:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)} \tag{8-121}$$

Al substituir la ecuación (8-121) en la ecuación (8-120), se tiene:

$$GH^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K}{(s + jn\omega_s)(s + jn\omega_s + 1)} \tag{8-122}$$

que tiene polos en $s = -jn\omega_s$ y $s = -1 - jn\omega_s$, en donde n toma todos los valores enteros entre $-\infty$ e ∞. La configuración de polos de $GH^*(s)$ se muestra en la Fig. 8-37(a). Mediante el uso de las propiedades de el RL en el plano s, el RL de $1 + GH^*(s) = 0$ se dibuja como se muestra

Figura 8-37 Configuración de polos de $GH^*(s)$ y el diagrama del lugar geométrico de las raíces en el plano s para el sistema en tiempo discreto de la Fig. 8-36 con $G(s)H(s) = K/[s(s+1)]$. $T = 1$ s.

▲ Los mismos procedimientos de construcción del lugar geométrico de las raíces de sistemas en tiempo continuo se pueden aplicar al lugar geométrico de las raíces de sistemas en tiempo discreto en el plano z.

en la Fig. 8-37(b) para un periodo de muestreo $T = 1$ s. El RL contiene un número infinito de ramas y estas indican claramente que el sistema en lazo cerrado es inestable para todos los valores de K mayores que 4.32. En contraste, es bien sabido que el mismo sistema sin muestreo es estable para todos los valores de K.

El problema del lugar geométrico de las raíces para sistemas en tiempo discreto se simplifica si el lugar geométrico de las raíces se construye en el plano z usando la ecuación (8-119). Ya que la ecuación (8-119) es, en general, una función racional en z con coeficientes constantes, sus polos y ceros son finitos en número, y el número de lugares geométricos de las raíces es finito en el plano z. Los mismos procedimientos de construcción para sistemas en tiempo continuo se aplican de forma directa en el plano z para sistemas en tiempo discreto. Los siguientes ejemplos ilustran la construcción del lugar geométrico de las raíces para sistemas en tiempo discreto en el plano z.

Ejemplo 8-25

Considere que para el sistema en tiempo discreto mostrado en la Fig. 8-36, la función de transferencia de lazo en el dominio z es:

$$GH(z) = \frac{0.632\,Kz}{(z-1)(z-0.368)} \qquad (8\text{-}123)$$

El RL de la ecuación característica en lazo cerrado se construye con base en la configuración de polos y ceros de $GH(z)$, como se muestra en la Fig. 8-38. Note que cuando el valor de K excede a 4.32, una de las dos raíces se mueve afuera del círculo unitario y el sistema se vuelve inestable. El lugar geométrico del factor de amortiguamiento relativo constante se puede dibujar sobre el RL para determinar el valor requerido de K para un factor de amortiguamiento relativo específico. En la Fig. 8-38, el lugar geométrico del factor de amortiguamiento relativo constante para $\zeta = 0.5$ se dibuja y la intersección con el RL da el

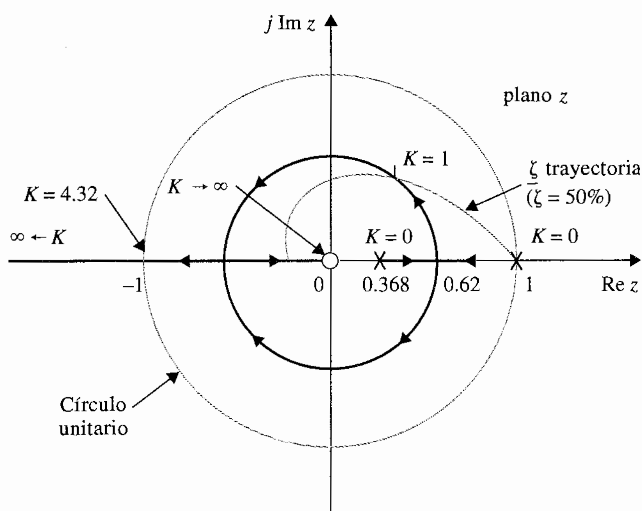


Figura 8-38 Diagrama del lugar geométrico de las raíces de un sistema de control en tiempo discreto sin retén de orden cero. $G(s)H(s) = K/[s(s+1)]$. $T = 1$ s.

valor deseado de $K = 1$. Para el mismo sistema, si el periodo de muestreo T se incrementa a dos segundos, la función de transferencia en términos de la transformada z se convierte en:

$$GH(z) = \frac{0.865\,Kz}{(z-1)(z-0.135)} \tag{8-124}$$

El RL para este caso se muestra en la Fig. 8-39. Observe que aunque la parte compleja de el RL para $T = 2$ s, toma la forma de un círculo más pequeño que para cuando $T = 1$ s, y sin embargo el sistema es menos estable, ya que el valor marginal de K para estabilidad es 2.624, como se compara con el valor de K marginal de 4.32 para $T = 1$ s.

A continuación se considera que un retén de orden cero se inserta entre el muestreador y el proceso controlado $G(s)$ en el sistema de la Fig. 8-36. La función de transferencia del sistema con el retén de orden cero es:

$$G_{ho}GH(z) = \frac{K[(T-1+e^{-T})z - Te^{-T} + 1 - e^{-T}]}{(z-1)(z-e^{-T})} \tag{8-125}$$

El RL del sistema con ROC para $T = 1$ y 2 s se muestran en las Figs. 8-40(a) y (b), respectivamente. En este caso, el valor marginal de estabilidad para K es 2.3 para $T = 1$ s y 1.46 para $T = 2$ s. Al comparar el lugar geométrico de las raíces del sistema con y sin el ROC, se observa que el ROC reduce el margen de estabilidad del sistema en tiempo discreto.

En conclusión, el lugar geométrico de las raíces de sistemas en tiempo discreto se puede construir en el plano z utilizando en esencia los mismos procedimientos de aquellas que para sistemas en tiempo continuo en el plano s. Sin embargo, las condiciones de estabilidad absoluta y relativa de sistemas en tiempo discreto se deben investigar con respecto al círculo unitario e investigar otra interpretación del desempeño con respecto a las regiones en el plano z. ▲

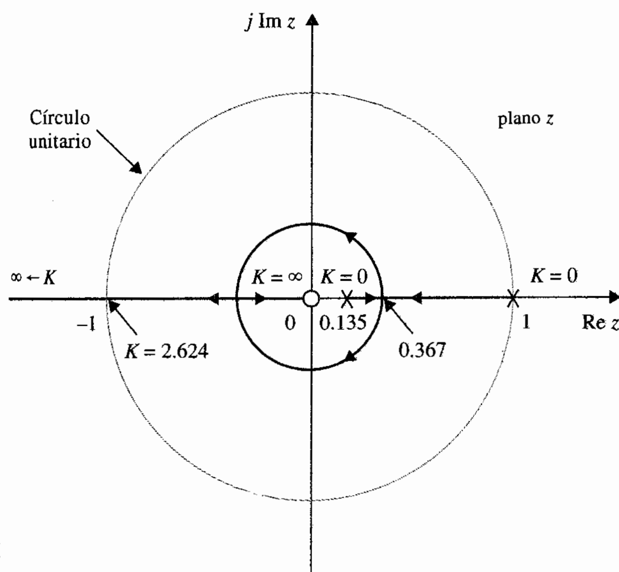
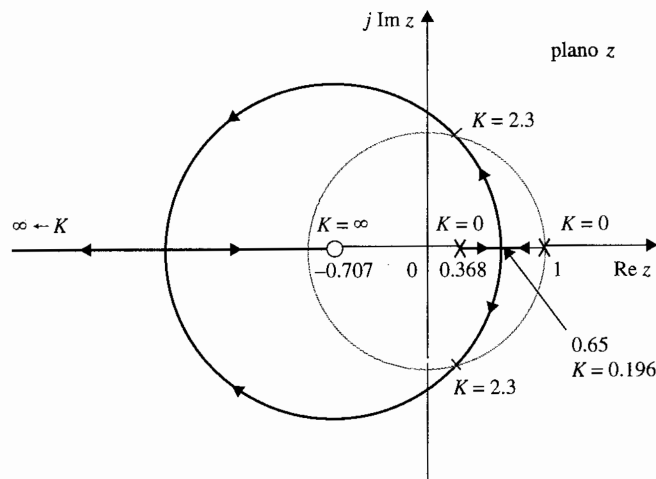
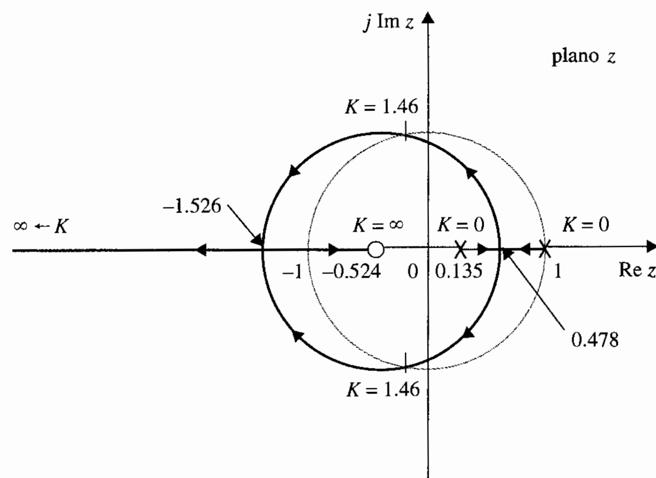


Figura 8-39 Diagrama del lugar geométrico de las raíces de un sistema de control en tiempo discreto sin retén de orden cero. $G(s)H(s) = K/[s(s+1)]$. $T = 2$ s.



(a) Lugar geométrico de las raíces para $T = 1$ s.



(b) Lugar geométrico de las raíces para $T = 2$ s.

Figura 8-40 Diagramas del lugar geométrico de las raíces de un sistema en tiempo discreto con muestreo y retén. $G(s)H(s) = K/[s(s+1)]$.

8-8 Resumen

En este capítulo se han presentado las técnicas del lugar geométrico de las raíces para sistemas de control lineales. La técnica representa un método gráfico para investigar las raíces de la ecuación característica de un sistema lineal e invariante con el tiempo cuando uno o más parámetros varían. En el Cap. 10, el método del lugar geométrico de las raíces será utilizado de manera exhaustiva para el diseño en sistemas de control. Sin embargo, se debe mantener en mente que las raíces de la ecuación

característica dan una indicación exacta de la estabilidad absoluta de sistemas lineales SISO, pero dan sólo información cualitativa sobre la estabilidad relativa, ya que los ceros de la función de transferencia en lazo cerrado, si existen, también juegan un papel importante en el desempeño dinámico del sistema.

La técnica del lugar geométrico de las raíces también se aplica a sistemas en tiempo discreto con la ecuación característica expresada en términos de la transformada z. Las propiedades y construcción del lugar geométrico de las raíces en el plano z son en esencia los mismos que aquellos para sistemas en tiempo continuo en el plano s, excepto que la interpretación de la localización de las raíces en el desempeño del sistema deben hacerse con respecto al círculo unitario $|z| = 1$ y el significado de las regiones en el plano z.

El material en este capítulo provee una guía de las bases fundamentales del lugar geométrico de las raíces y del bosquejo manual del lugar geométrico de las raíces. Los programas de computadora tales como **rootloci** en **ACSP, rlplot** en **CSAD/MATLAB,** y **root** en **Program CC**, solo por nombrar algunos, se pueden utilizar para realizar la gráfica del lugar geométrico de las raíces y dan información detallada de la gráfica. Sin embargo, el autor cree que los programas de computadora sólo se emplean como herramienta, y que el investigador inteligente no puede estar sin comprender lo fundamental de este tema.

La técnica del lugar geométrico de las raíces también se puede aplicar a sistemas lineales con tiempos de retardo puros en el lazo del sistema [25, 26]. El material no se trata aquí, ya que los sistemas con retardos puros se tratan más fácil con los métodos del dominio de la frecuencia que se estudiarán en el Cap. 9.

Preguntas de repaso

Las siguientes preguntas y los problemas de falso y verdadero se refieren a la ecuación $P(s) + KQ(s) = 0$, en donde $P(s)$ y $Q(s)$ son polinomios en s con coeficientes constantes.

1. Dé la condición para lo cual el lugar geométrico de las raíces se construye.
2. Determine los puntos sobre el lugar geométrico de las raíces completo en los cuales $K = 0$ con referencia a los polos y ceros de $Q(s)/P(s)$.
3. Determine los puntos sobre el lugar geométrico de las raíces en los que $K = \pm\infty$, con referencia a los polos y ceros de $Q(s)/P(s)$.
4. De el significado de los puntos de ruptura con respecto a las raíces de $P(s) + KQ(s) = 0$.
5. De la ecuación de intersección de las asíntotas
6. Las asíntotas del lugar geométrico de las raíces se refieren a los ángulos del lugar geométrico de las raíces cuando $K = \pm\infty$. **(V) (F)**
7. Hay sólo una intersección de las asíntotas del lugar geométrico de las raíces. **(V) (F)**
8. La intersección de las asíntotas debe siempre estar sobre el eje real. **(V) (F)**
9. Los puntos de ruptura del lugar geométrico de las raíces deben siempre estar sobre el eje real. **(V) (F)**
10. Dada la ecuación $1 + KG_1(s)H_1(s) = 0$, en donde $G_1(s)H_1(s)$ es una función racional de s y no contiene K, las raíces de la derivada de $dG_1(s)H_1(s)/ds$ son todos los puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces ($-\infty < K < \infty$). **(V) (F)**
11. En los puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces, la sensibilidad de las raíces es infinita. **(V) (F)**
12. Sin modificación todas las reglas y propiedades para la construcción del lugar geométrico de las raíces en el plano s, se puede aplicar en la construcción del lugar geométrico de las raíces de sistemas en tiempo discreto en el plano z. **(V) (F)**

13. La determinación de las intersecciones del lugar geométrico de las raíces en el plano s con el eje $j\omega$ se pueden obtener al resolver la ecuación auxiliar de la tabla de Routh de la ecuación. (V) (F)
14. Añadir un polo a $Q(s)/P(s)$ tiene el efecto general de empujar el lugar geométrico de las raíces a la derecha, mientras que añadir un cero empuja el lugar a la izquierda. (V) (F)

Las respuestas a las preguntas de falso y verdadero se dan al terminar la sección de problemas.

Referencias

Temas generales

1. **W. R. EVANS,** "Graphical Analysis of Control Systems," *Trans. AIEE,* Vol. 67, pp. 547–551, 1948.
2. **W. R. EVANS,** "Control System Synthesis by Root Locus Method," *Trans. AIEE,* Vol. 69, pp. 66–69, 1950.
3. **W. R. EVANS,** *Control System Dynamics,* McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.

Construcción y propiedades del lugar geométrico de las raíces

4. **C. C. MACDUFF,** *Theory of Equations,* pp. 29–104, John Wiley & Sons, New York, 1954.
5. **C. S. LORENS and R. C. TITSWORTH,** "Properties of Root Locus Asymptotes," *IRE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-5, pp. 71–72, Jan. 1960.
6. **C. A. STAPLETON,** "On Root Locus Breakaway Points," *IRE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-7, pp. 88–89, Apr. 1962.
7. **M. J. REMEC,** "Saddle-Points of a Complete Root Locus and an Algorithm for Their Easy Location in the Complex Frequency Plane," *Proc. Natl. Electronics Conf.,* Vol. 21, pp. 605–608, 1965.
8. **C. F. CHEN,** "A New Rule for Finding Breaking Points of Root Loci Involving Complex Roots," *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-10, pp. 373–374, July 1965.
9. **V. KRISHRAN,** "Semi-analytic Approach to Root Locus," *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-11, pp. 102–108, Jan. 1966.
10. **R. H. LABOUNTY and C. H. HOUPIS,** "Root Locus Analysis of a High-Grain Linear System with Variable Coefficients; Application of Horowitz's Method," *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-11, pp. 255–263, Apr. 1966.
11. **A. FREGOSI and J. FEINSTEIN,** "Some Exclusive Properties of the Negative Root Locus," *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-14, pp. 304–305, June 1969.

Representación analítica del lugar geométrico de las raíces

12. **G. A. BENDRIKOV and K. F. TEODORCHIK,** "The Analytic Theory of Constructing Root Loci," *Automatic and Remote Control,* pp. 340–344, Mar. 1959.
13. **K. STEIGLITZ,** "Analytical Approach to Root Loci," *IRE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-6, pp. 326–332, Sept. 1961.

Pr

14. **C. WOJCIK,** ''Analytical Representation of Root Locus,'' *Trans. ASME, J. Basic Eng.,* Ser. D, Vol. 86, Mar. 1964.

15. **C. S. CHANG,** ''An Analytical Method for Obtaining the Root Locus with Positive and Negative Gain,'' *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-10, pp. 92–94, Jan. 1965.

16. **B. P. BHATTACHARYYA,** ''Root Locus Equations of the Fourth Degree,'' *Internat. J. Control,* Vol. 1, No. 6, pp. 533–556, 1965.

Gráficas del lugar geométrico de las raíces asistido por computadora

17. **D. J. DODA,** ''The Digital Computer Makes Root Locus Easy,'' *Control Eng.,* May 1958.

18. **Z. KLAGSBRUNN and Y. WALLACH,** ''On Computer Implementation of Analytic Root-Locus Plotting,'' *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-13, pp. 744–745, Dec. 1968.

19. **R. H. ASH and G. R. ASH,** ''Numerical Computation of Root Loci Using the Newton—Raphson Technique,'' *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-13, pp. 576–582, Oct. 1968.

Sensibilidad de las raíces

20. **J. G. TRUXAL and M. HOROWITZ,** ''Sensitivity Consideration in Active Network Synthesis,'' *Proc. 2nd Midwest Symposium on Circuit Theory,* East Lansing, MI, 1956.

21. **R. Y. HUANG,** ''The Sensitivity of the Poles of Linear Closed-Loop Systems,'' *Trans. AIEE, Appl. Ind.,* Vol. 77, Part 2, pp. 182–187, Sept. 1958.

22. **H. UR,** ''Root Locus Properties and Sensitivity Relations in Control Systems,'' *IRE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-5, pp. 57–65, Jan. 1960.

El lugar geométrico de las raíces de sistemas en tiempo discreto

23. **M. MORI,** ''Root Locus Method of Pulse Transfer Function for Sampled-Data Control Systems,'' *IRE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-3, pp. 13–20, Nov. 1963.

24. **B. C. KUO,** *Digital Control Systems,* 2nd ed., Saunders College Publishing, Philadelphia, 1992.

El lugar geométrico de ias raíces para sistemas con retardos

25. **Y. CHU,** ''Feedback Control System with Dead-Time Lag or Distributed Lag by Root-Locus Method,'' *Trans. AIEE,* Vol. 70, Part 2, p. 291, 1951.

26. **B. C. KUO,** *Automatic Control Systems,* 5th ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.

Problemas

Cualquier software de computadora para el lugar geométrico de las raíces se puede emplear para resolver los problemas en este capítulo. Primero, haga los problemas sin confiar en la computadora, y después realice las soluciones en la computadora si el programa del lugar geométrico de las raíces está disponible. Determine toda la información vital y marque sobre el lugar geométrico de las raíces, incluyendo los puntos en los que el parámetro variable (*i.e.*, K) es igual a cero y $\pm\infty$, propiedades asintóticas, intersecciones en el eje $j\omega$ y los valores correspondientes del parámetro y los puntos de

ruptura. Indique con flechas la dirección de incremento del parámetro variable sobre el lugar geométrico de las raíces.

▲ Asíntotas

8-1. Encuentre los ángulos de las asíntotas y la intersección de las asíntotas del lugar geométrico de las raíces de las siguientes ecuaciones cuando K varía desde $-\infty$ a ∞.

(a) $s^4 + 4s^3 + 4s^2 + (K + 8)s + K = 0$
(b) $s^3 + 5s^2 + (K + 1)s + K = 0$
(c) $s^2 + K(s^3 + 3s^2 + 2s + 8) = 0$
(d) $s^3 + 2s^2 + 3s + K(s^2 - 1)(s + 3) = 0$
(e) $s^5 + 2s^4 + 3s^3 + K(s^2 + 3s + 5) = 0$
(f) $s^4 + 2s^2 + 10 + K(s + 5) = 0$

▲ Ángulos de salida y llegada

8-2. Para la siguiente función de transferencia de lazo, encuentre el ángulo de salida o llegada del lugar geométrico de las raíces en los polos y ceros designados.

(a) $G(s)H(s) = \dfrac{Ks}{(s + 1)(s^2 + 1)}$

Ángulo de llegada ($K < 0$) y ángulo de salida ($K > 0$) en $s = j$.

(b) $G(s)H(s) = \dfrac{Ks}{(s - 1)(s^2 + 1)}$

Ángulo de llegada ($K < 0$) y ángulo de salida ($K > 0$) en $s = j$.

(c) $G(s)H(s) = \dfrac{K}{s(s + 2)(s^2 + 2s + 2)}$

Ángulo de salida ($K > 0$) en $s = -1 + j$.

(d) $G(s)H(s) = \dfrac{K}{s^2(s^2 + 2s + 2)}$

Ángulo de salida ($K > 0$) en $s = -1 + j$.

(e) $G(s)H(s) = \dfrac{K(s^2 + 2s + 2)}{s^2(s + 2)(s + 3)}$

Ángulo de llegada ($K > 0$) en $s = -1 + j$.

▲ Los puntos $K = 0$ y $K = \pm\infty$ y RL y CRL sobre el eje real

8-3. Marque los puntos en $K = 0$ y $K = \pm\infty$ y el RL y CRL sobre el eje real para la configuración de polos y ceros mostrada en la Fig. 8P-3. Añada flechas sobre el lugar geométrico de las raíces en el eje real en la dirección de incremento de K.

▲ Puntos de ruptura

8-4. Encuentre los puntos de ruptura del lugar geométrico de las raíces del sistema descrito con la configuración de polos y ceros mostrada en la Fig. 8P-3.

▲ Construcción del lugar geométrico de las raíces

8-5. Construya el diagrama del lugar geométrico de las raíces para cada uno de los sistemas de control para los cuales se dan los polos y ceros de $G(s)H(s)$. La ecuación característica se obtiene al igualar el numerador de $1 + G(s)H(s)$ a cero.

(a) Polos en 0, –5, –6; cero en –8.
(b) Polos en 0, –1, –3, –4; no ceros finitos.

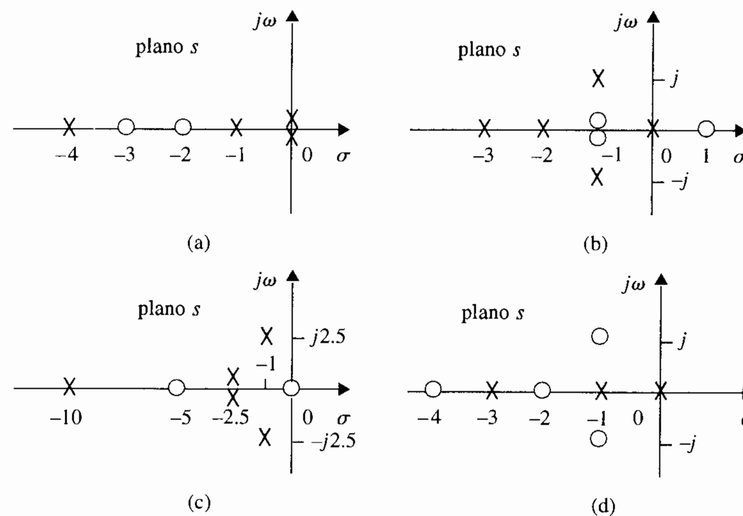


Figura 8P-3

(c) Polos en 0, 0, −2, −2; cero en −4.
(d) Polos en 0, $-1+j$, $-1-j$; cero en −2.
(e) Polos en 0, $-1+j$, $-1-j$; cero en −5.
(f) Polos en 0, $-1+j$, $-1-j$, −4.
(g) Polos en 0, 0, −8, −8; ceros en −4, −4.
(h) Polos en 0, 0, −8, −8; no ceros finitos.
(i) Polos en 0, 0, −8, −8; ceros en $-4+j2$, $-4-j2$.
(j) Polos en −2, 2; ceros en 0, 0.
(k) Polos en j, $-j$, $j2$, $-j2$; cero en −2, 2.
(l) Polos en j, $-j$, $j2$, $-j2$; cero en −1, 1.
(m) Polos en 0, 0, 0, 1; ceros en −1, −2, −3.
(n) Polos en 0, 0, 0, −100, −200; ceros en −5, −40.
(o) Polos en 0, −1, −2; cero en 1.

▲ Construcción del lugar geométrico de las raíces.

8-6. La ecuación característica de sistemas de control lineales se da a continuación. Construya el lugar geométrico de las raíces para $K \geq 0$.

(a) $s^3 + 3s^2 + (K+2)s + 5K = 0$
(b) $s^3 + s^2 + (K+2)s + 3K = 0$
(c) $s^3 + 5Ks^2 + 10 = 0$
(d) $s^4 + (K+3)s^3 + (K+1)s^2 + (2K+5) + 10 = 0$
(e) $s^3 + 2s^2 + 2s + K(s^2-1)(s+2) = 0$
(f) $s^3 - 2s + K(s+4)(s+1) = 0$
(g) $s^4 + 6s^3 + 9s^2 + K(s^2+4s+5) = 0$

(h) $s^3 + 2s^2 + 2s + K(s^2 - 2)(s + 4) = 0$
(i) $s(s^2 - 1) + K(s + 2)(s + 0.5) = 0$
(j) $s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2Ks + 5K = 0$

▲ Construcción del lugar geométrico de las raíces.

8-7. La función de transferencia de la trayectoria directa para sistemas de control con realimentación unitaria se da a continuación:

(a) $G(s) = \dfrac{K(s+4)}{s(s^2+4s+4)(s+5)(s+6)}$ (b) $G(s) = \dfrac{K}{s(s+2)(s+5)(s+10)}$

(c) $G(s) = \dfrac{K(s^2+2s+10)}{s(s+5)(s+10)}$ (d) $G(s) = \dfrac{K(s^2+4)}{(s+2)^2(s+5)(s+6)}$

Construya el lugar geométrico de las raíces para $K \geq 0$ y encuentre los valores de K que hacen que el factor de amortiguamiento relativo del sistema en lazo cerrado (medido mediante las raíces complejas dominantes de la ecuación característica) sea igual a 0.707, si tal solución existe.

▲ Lugar geométrico de las raíces, puntos de ruptura.

8-8. Un sistema de control con realimentación unitaria tiene una función de transferencia de la trayectoria directa dada a continuación. Construya el diagrama del lugar geométrico de las raíces para $K \geq 0$. Encuentre los valores de K para todos los puntos de ruptura.

(a) $G(s) = \dfrac{K}{s(s+10)(s+20)}$ (b) $G(s) = \dfrac{K}{s(s+1)(s+3)(s+5)}$

▲ Construcción del lugar geométrico de las raíces.

8-9. La función de transferencia de la trayectoria directa en sistemas de control con realimentación unitaria es:

$$G(s) = \frac{K}{(s+4)^n}$$

Construya el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado para $K \geq \infty$, con **(a)** $n = 1$, **(b)** $n = 2$, **(c)** $n = 3$, **(d)** $n = 4$, y **(e)** $n = 5$.

▲ Lugar geométrico de las raíces de sistemas realimentados mediante un tacómetro.

8-10. La ecuación característica de un sistema de control que se muestra en la Fig. 7P-10, cuando $K = 100$ es:

$$s^3 + 25s^2 + (100K_t + 2)s + 100 = 0$$

Construya el lugar geométrico de las raíces de la ecuación para $K_t \geq 0$.

▲ Lugar geométrico de las raíces de sistemas realimentados mediante un tacómetro.

8-11. El diagrama de bloques de un sistema de control realimentado mediante un tacómetro se muestra en la Fig. 8P-11.

(a) Construya el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica para $K \geq 0$, cuando $K_t = 0$.
(b) Con $K = 10$, construya el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica para $K_t \geq 0$.

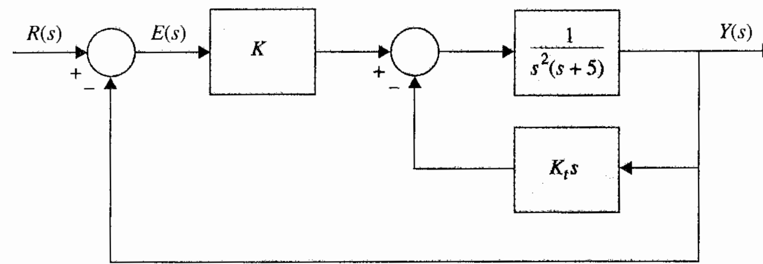


Figura 8P-11

▲ Lugar geométrico de las raíces de un sistema de control de un motor de cd.

8-12. La ecuación característica de un sistema de control del motor de cd descrito en el problema 7-27 se puede aproximar como:

$$2.05J_Ls^3 + (1 + 10.25J_L)s^2 + 116.84s + 1843 = 0$$

cuando $K_L = \infty$ y la inercia de carga J_L se considera como un parámetro variable. Construya el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica para $J_L \geq 0$.

▲ Lugar geométrico de las raíces de un sistema de control.

8-13. La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema de control mostrado en la Fig. 7P-11 es:

$$G(s) = \frac{K(s + \alpha)(s + 3)}{s(s^2 - 1)}$$

a) Construya el lugar geométrico de las raíces para $K \geq 0$, $\alpha = 5$.

b) Construya el lugar geométrico de las raíces para $\alpha \geq 0$, $K = 10$.

▲ Lugar geométrico de las raíces de un sistema de control de nivel de líquido.

8-14. La ecuación característica del sistema de control de nivel de líquido descrito en el problema 6-13, se escribe como:

$$0.06s(s + 12.5)(As + K_o) + 250N = 0$$

a) Para $A = K_o = 50$, construya el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica cuando N varía desde 0 hasta ∞.

b) Para $N = 10$ y $K_o = 50$, construya el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica para $A \geq 0$.

c) Para $A = 50$ y $N = 20$, construya el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica para $K_o \geq 0$.

▲ Lugar geométrico de las raíces de un sistema de control

8-15. Repita el problema 8-14 para los siguientes casos.

a) $A = K_o = 100$.
b) $N = 20$ y $K_o = 50$
c) $A = 100$ y $N = 20$

▲ Lugar geométrico de las raíces de un sistema de control

8-16. Las funciones de transferencia para sistemas de control en lazo cerrado sencillo son:

$$G(s) = \frac{K}{s^2(s+1)(s+5)} \qquad H(s) = 1$$

(a) Construya el lugar geométrico de los ceros de $1 + G(s)$ para $K \geq 0$.
(b) Repita el inciso (a) cuando $H(s) = 1 + 5s$.

▲ Lugar geométrico de las raíces de un sistema de control

8-17. Las funciones de transferencia para sistemas de control de un solo lazo realimentado son:

$$G(s) = \frac{10}{s^2(s+1)(s+5)} \qquad H(s) = 1 + T_d s$$

Construya el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica para $T_d \geq 0$.

▲ Lugar geométrico de las raíces de un sistema de control de un motor de cd.

8-18. Para el sistema de control del motor de cd descrito en el problema 7-27, es de interés estudiar los efectos de la compliancia del eje del motor K_L sobre el desempeño del sistema.

(a) Con $K = 1$ y con los otros parámetros dados como en el problema 7-27, encuentre la $G(s)H(s)$ equivalente con K_L como el factor de ganancia. Construya el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica para $K_L \geq 0$. El sistema aproxima por un sistema de cuarto orden al cancelar el polo negativo más grande y el cero de $G(s)H(s)$ que están muy juntos uno del otro.
(b) Repita el inciso (a) con $K = 1000$.

▲ Lugar geométrico de las raíces de un sistema de control de un motor de cd; J_L varía.

8-19. La ecuación característica del sistema de control del motor de cd descrito en el problema 7-27, está dado a continuación, cuando el eje del motor se considera rígido ($K_L = \infty$). Si $K = 1$, $J_m = 0.001$, $L_a = 0.001$, $n = 0.1$, $R_a = 5$, $K_i = 9$, $K_b = 0.0636$, $B_m = 0$, y $K_s = 1$:

$$L_a(J_m + n^2J_L)s^3 + (R_aJ_m + n^2R_aJ_L + \mathrm{B}_mL_a)s^2 + (\mathrm{R}_aB_m + K_iK_b)s + nK_sK_iK = 0$$

Construya el lugar geométrico de las raíces para $J_L \geq 0$ para mostrar los efectos de la variación de carga de la inercia en el desempeño del sistema.

▲ Lugar geométrico de las raíces con dos parámetros variables

8-20. Dada la ecuación:

$$s^3 + \alpha s^2 + Ks + K = 0$$

es deseable investigar el lugar geométrico de las raíces de esta ecuación para $-\infty < K < \infty$ y para varios valores de α.

(a) Construya el lugar geométrico de las raíces para $-\infty < K < \infty$ cuando $\alpha = 12$.
(b) Repita el inciso (a) cuando $\alpha = 4$.
(c) Determine el valor de α para que haya sólo un punto de ruptura diferente de cero en el lugar geométrico de las raíces completo para $-\infty < K < \infty$. Construya el lugar geométrico de las raíces.

▲ Puntos de ruptura del lugar geométrico de las raíces

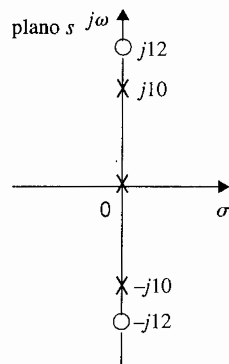
8-21. La función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema de control de realimentación unitaria es:

$$G(s) = \frac{K(s + \alpha)}{s^2(s + 3)}$$

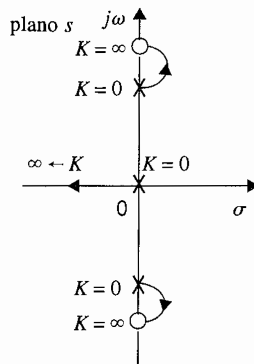
Determine los valores de α para que el lugar geométrico de las raíces ($-\infty < K < \infty$) tenga cero, uno y dos puntos de ruptura, respectivamente, sin incluir el de $s = 0$. Construya el lugar geométrico de las raíces para $-\infty < K < \infty$ para los tres casos.

▲ Ejercicios sobre ángulos de salida y llegada

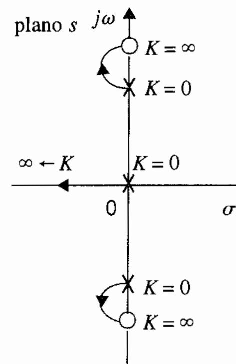
8-22. La configuración de polos y ceros de $G(s)H(s)$ de un sistema de control con un lazo de realimentación se muestra en la Fig. 8P-22(a). Sin hacer la gráfica, aplique las propiedades del ángulo de salida (y del ángulo de llegada) del lugar geométrico de las raíces para determinar cual de los diagramas del lugar geométrico de las raíces que se muestran es el correcto:



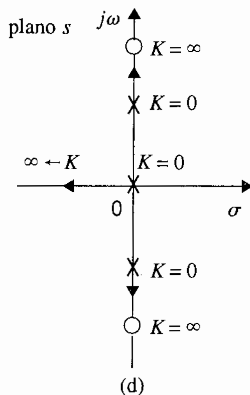
(a) Configuración de polos y ceros



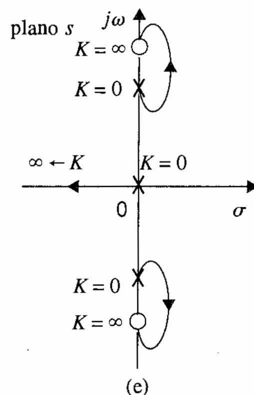
(b)



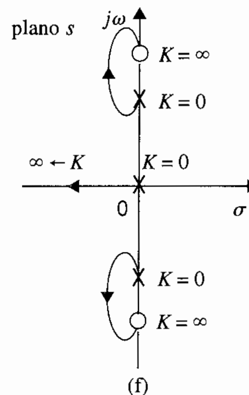
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 8P-22

▲ Lugar geométrico de las raíces de sistemas de datos muestreados.

8-23. El diagrama de bloque de un sistema de control de datos muestreados se denota en la Fig. 8P-23.

a) Construya el lugar geométrico de las raíces en el plano z para el sistema para $K \geq 0$, sin un retén de orden cero, cuando $T = 0.5$ s. y entonces cúando $T = 0.1$ s. Encuentre los valores marginales de K para la estabilidad.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+5)}$$

b) Repita el inciso (a) cuando el sistema tiene un retén de orden cero, como se muestra en la Fig. 8P-23.

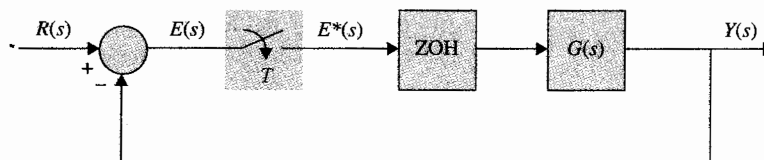


Figura 8P-23

▲ Lugar geométrico de las raíces de sistemas de datos muestreados.

8-24. El sistema que se muestra en la Fig. 8P-23 tiene la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{Ke^{-0.1s}}{s(s+1)(s+2)}$$

Construya el lugar geométrico de las raíces en el plano z para $K \geq 0$, con $T = 0.1$ s.

▲ Lugar geométrico de las raíces de sistemas en tiempo discreto.

8-25. Las ecuaciones características de sistemas de control en tiempo discreto se dan a continuación. Construya el lugar geométrico de las raíces para $K \geq 0$. Determine el valor marginal de K para la estabilidad:

(a) $z^3 + Kz^2 + 1.5Kz - (K + 1) = 0$

(b) $z^2 + (0.15K - 1.5)z + 1 = 0$

(c) $z^2 + (0.1K - 1)z + 0.5 = 0$

(d) $z^2 + (0.4 + 0.14K)z + (0.5 + 0.5K) = 0$

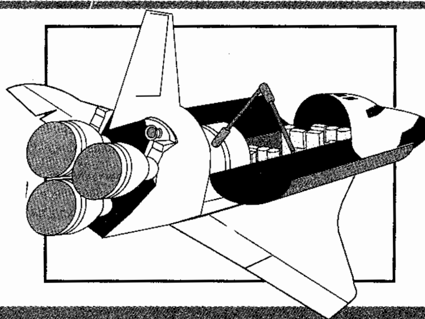
(e) $(z - 1)(z^2 - z + 0.4) + 4 \times 10^{-5}K(z + 1)(z + 0.7) = 0$

Respuestas a Falso y Verdadero de las preguntas de repaso

6. (F) **7.** (V) **8.** (V) **9.** (F) **10.** (F) **11.** (V) **12.** (V)
13. (V) **14.** (V)

9

9 Análisis en el dominio de la frecuencia



PALABRAS CLAVE Y TEMAS

- ▲ Respuestas en frecuencia
- ▲ Especificaciones en el dominio de la frecuencia
- ▲ Pico de resonancia
- ▲ Frecuencia de resonancia
- ▲ Ancho de banda
- ▲ Criterio de Nyquist
- ▲ Margen de ganancia
- ▲ Margen de fase
- ▲ Trazas de Bode
- ▲ Carta de Nichols
- ▲ Sensibilidad
- ▲ Respuestas en frecuencia de sistemas en tiempo discreto

9-1 Introducción

En la práctica el desempeño de un sistema de control se mide más realísticamente por sus características en el dominio del tiempo. La razón es que el desempeño de la mayoría de los sistemas de control se juzga con base en la respuesta del tiempo debido a ciertas señales de prueba. Esto contrasta con el análisis y diseño de sistemas de comunicación para los cuales la respuesta en frecuencia es de mayor importancia, ya que la mayoría de las señales a ser

procesadas son de tipo senoidal o están compuestas por componentes senoidales. En el Cap. 7 se aprendió que la respuesta en el tiempo de un sistema de control es normalmente más difícil de determinar analíticamente, especialmente para sistemas de orden superior. En problemas de diseño no hay un método unificado para llegar a un sistema diseñado que cumpla con las especificaciones de desempeño en el dominio del tiempo, tales como sobrepaso máximo, tiempo de levantamiento, tiempo de retardo, tiempo de asentamiento, etc. Por otro lado, en el dominio de la frecuencia se tiene un conjunto de métodos gráficos que no está limitado a sistemas de bajo orden. Es importante darse cuenta que hay una correlación entre el desempeño del dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia de un sistema lineal, de tal forma que las propiedades en el dominio del tiempo de un sistema se pueden predecir con base en las características en el dominio de la frecuencia. El dominio de la frecuencia es también más conveniente para mediciones de la sensibilidad al ruido del sistema así como de variaciones en los parámetros. Con esto en mente, se puede considerar como la motivación principal del diseño y análisis de sistemas de control en el dominio de la frecuencia a la conveniencia y a la disponibilidad de herramientas analíticas. Otra razón es que presenta un punto de vista alterno para problemas de sistemas de control, lo cual, a menudo, proporciona información valiosa o crucial para el análisis y diseño complicados de sistemas de control. Aún más, el conducir un análisis en el dominio de la frecuencia de un sistema de control lineal, no implica que el sistema esté sujeto solamente a entradas senoidales. Esto puede nunca ser. En lugar de esto, los estudios de respuesta en frecuencia nos permitirán proyectar el desempeño del dominio del tiempo de un sistema.

El punto de comienzo para el análisis en el dominio de la frecuencia de un sistema lineal es su función de transferencia. Es bien sabido por la teoría de sistemas lineales, que cuando la entrada de un sistema lineal e invariante con el tiempo es senoidal con amplitud R y frecuencia ω_0:

$$r(t) = R \operatorname{sen} \omega_0 t \tag{9-1}$$

la salida en estado estable o permanente del sistema, $y(t)$, será senoidal con la misma frecuencia ω_0, pero posiblemente con diferente amplitud y fase; esto es:

$$y(t) = Y \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi) \tag{9-2}$$

en donde Y es la amplitud de la onda senoidal de salida y ϕ es el corrimiento de fase en grados o radianes.

Considere la función de transferencia de un sistema lineal SISO como $M(s)$; entonces la transformada de Laplace de la entrada y la salida se relacionan a través de:

$$Y(s) = M(s)R(s) \tag{9-3}$$

Para análisis en estado senoidal permanente, se remplaza s por $j\omega$, y la ecuación (9-3) se convierte en:

$$Y(j\omega) = M(j\omega)R(j\omega) \tag{9-4}$$

Al escribir la función $Y(j\omega)$ como:

$$Y(j\omega) = |Y(j\omega)| \angle Y(j\omega) \tag{9-5}$$

con definiciones similares para $M(j\omega)$ y $R(j\omega)$, la ecuación (9-4) nos lleva a la relación de magnitud entre la entrada y la salida:

$$|Y(j\omega)| = |M(j\omega)||R(j\omega)| \tag{9-6}$$

y la relación de fase:

$$\angle Y(j\omega) = \angle M(j\omega) + \angle R(j\omega) \tag{9-7}$$

Por tanto, para las señales de entrada y salida descritas por las ecuaciones (9-1) y (9-2), respectivamente, la amplitud de la senoidal de salida es:

$$Y = R|M(j\omega_0)| \tag{9-8}$$

y la fase de la salida es:

$$\phi = \angle M(j\omega_0) \tag{9-10}$$

Por tanto, al conocer la función de transferencia $M(s)$ de un sistema lineal, la característica de magnitud, $|M(j\omega)|$, y la característica de fase $\angle M(j\omega)$, describen completamente el desempeño en estado estable cuando la entrada es senoidal. La parte crucial del análisis en el dominio de la frecuencia es que las características de amplitud y fase de un sistema en lazo cerrado se pueden emplear para predecir tanto el desempeño del sistema en estado estable, como en el transitorio en el dominio del tiempo.

9-1-1 Respuesta en frecuencia de sistemas en lazo cerrado

Para la configuración de sistemas de control de lazo sencillo estudiada en los capítulos anteriores, la función de transferencia en lazo cerrado es:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{9-11}$$

Bajo el estado senoidal permanente $s = j\omega$, la ecuación (9-11) se convierte en:

$$M(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} \tag{9-12}$$

La función de transferencia en estado senoidal permanente $M(j\omega)$ se puede expresar en términos de su magnitud y fase; esto es:

$$M(j\omega) = |M(j\omega)|\angle M(j\omega) \tag{9-13}$$

O $M(j\omega)$ puede expresarse en términos de sus partes real e imaginaria:

$$M(j\omega) = \text{Re}[M(j\omega)] + j\text{Im}[M(j\omega)] \tag{9-14}$$

La magnitud de $M(j\omega)$ es:

$$|M(j\omega)| = \left|\frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)}\right| = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega)H(j\omega)|} \tag{9-15}$$

y la fase de $M(j\omega)$ es:

$$\angle M(j\omega) = \phi_M(j\omega) = \angle G(j\omega) - \angle[1 + G(j\omega)H(j\omega)] \tag{9-16}$$

Si $M(s)$ representa la función de transferencia de entrada-salida de un filtro eléctrico, la magnitud y fase de $M(j\omega)$ indica la característica del filtro sobre la señal de entrada. La Fig. 9-1 muestra las características de ganancia y fase de un filtro de paso bajas ideales que tiene una frecuencia de corte en ω_c. Es bien sabido que la característica de un filtro ideal es físicamente irrealizable. En muchas formas el diseño de sistemas de control es muy similar al diseño de filtros, y el sistema de control se puede ver como un procesador de señales. De hecho, si la característica del filtro de paso bajas ideal que se muestra en la Fig. 9-1 fuera físicamente realizable, eso sería altamente deseable para un sistema de control, ya que las señales podrían pasar sin distorsión por debajo de la frecuencia ω_c, y eliminar completamente frecuencias arriba de ω_c.

Si ω_c se incrementa en forma indefinida, la salida $Y(j\omega)$ podría ser idéntica a la entrada $R(j\omega)$ para todas las frecuencias. Por tanto, un sistema podría seguir una entrada función

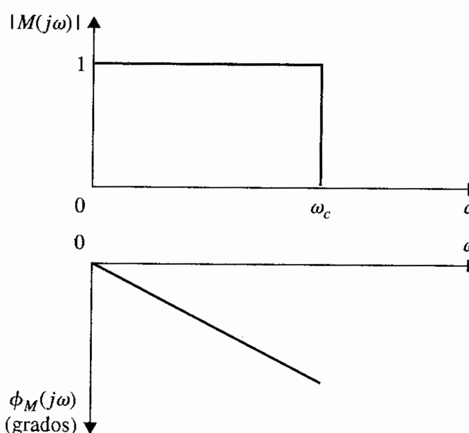


Figura 9-1 Características de ganancia y fase de un filtro de paso bajas ideal.

escalón en el dominio del tiempo en forma exacta. De la ecuación (9-15) se ve que para que $|M(j\omega)|$ sea unitaria para todas las frecuencias, la magnitud de $G(j\omega)$ debe ser infinita. Una magnitud infinita de $G(j\omega)$ es, por supuesto, imposible de alcanzar en la práctica, además de ser indeseable, ya que la mayoría de los sistemas de control se vuelven inestables cuando su ganancia de lazo se vuelve muy alta. Aún más, todos los sistemas de control están sujetos a ruido durante la operación. Por tanto, además de responder a la señal de entrada, el sistema debe ser capaz de rechazar y suprimir el ruido y las señales no deseadas. Para sistemas de control con ruido de alta frecuencia, tales como la vibración del fuselaje debido al aire en un aeronave, la respuesta en frecuencia debe tener una frecuencia de corte finita ω_c. Las características de la fase de la respuesta en frecuencia de un sistema de control son también de importancia, como se verá afectan la estabilidad del sistema.

La Fig. 9-2 ilustra las características de ganancia y fase típicas de un sistema de control. Como se muestra en las ecuaciones (9-15) y (9-16), la ganancia y la fase de un sistema en lazo cerrado se puede determinar de las funciones de transferencia de la trayectoria directa y de lazo. En la práctica, las respuestas en frecuencia de $G(s)$ y $H(s)$ a menudo se pueden determinar al aplicar entradas senoidales al sistema y barrer la frecuencia desde 0 hasta un valor más alla del intervalo de frecuencia del sistema.

9-1-2 Especificaciones en el dominio de la frecuencia

En el diseño de sistemas de control lineales se emplean los métodos en el dominio de la frecuencia, es necesario definir un conjunto de especificaciones para que el desempeño del sistema se pueda identificar. Las especificaciones tales como el sobrepaso máximo, el factor de amortiguamiento relativo, etc., se emplean en el dominio del tiempo, ya que no se pueden emplear directamente en el dominio de la frecuencia. Las siguientes especificaciones en el dominio de la frecuencia se emplean a menudo en la práctica.

Pico de resonancia M_r

El pico de resonancia M_r es el valor máximo de $|M(j\omega)|$.

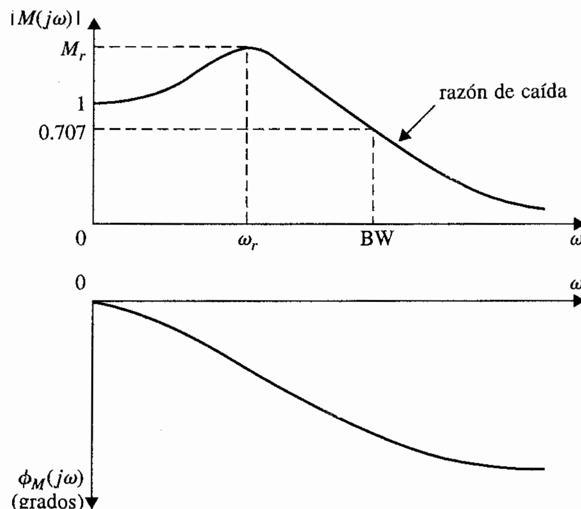


Figura 9-2 Características típicas de ganancia y fase de un sistema de control realimentado.

▲ M_r indica la estabilidad relativa de un sistema en lazo cerrado estable.

En general, la magnitud de M_r da indicación de una estabilidad relativa de un sistema estable en lazo cerrado. Normalmente, un valor grande de M_r corresponde a un sobrepaso máximo grande de la respuesta escalón. Para la mayoría de los sistemas de control se acepta generalmente, en la práctica, que el valor deseado de M_r debe estar entre 1.1 y 1.5.

Frecuencia de resonancia ω_r

La frecuencia de resonancia ω_r es la frecuencia en la cual el pico de resonancia M_r ocurre.

Ancho de banda (BW)

El ancho de banda (BW) es la frecuencia en la cual $|M(j\omega)|$ cae al 70.7% de, o 3 dB abajo de su valor en la frecuencia cero.

▲ BW da una indicación de las propiedades de la respuesta transitoria de un sistema de control.

▲ BW da una indicación de las características al filtrado de ruido y robustez del sistema.

En general, el ancho de banda de un sistema de control da una indicación de las propiedades de respuesta transitoria en el dominio del tiempo. Un ancho de banda grande corresponde a un tiempo de levantamiento corto, ya que las señales de la más alta frecuencia pasan más fácilmente a través del sistema. Por el contrario, si el ancho de banda es pequeño, solamente señales de frecuencias relativamente bajas pueden pasar y la respuesta en el tiempo será lenta. El ancho de banda también indica las características de filtrado de ruido y la robustez del sistema. La robustez representa una medida de la senbilidad de un sistema a la variación de parámetros. Un sistema robusto es uno que es insensible a la variación de parámetros.

Razón de corte. A menudo, el ancho de banda por sí solo no es adecuado para indicar la capacidad de un sistema en distinguir señales de ruido. Algunas veces es necesario observar la pendiente de $|M(j\omega)|$, que se denomina la razón de corte de la respuesta en frecuencia, de frecuencias altas. Aparentemente, dos sistemas pueden tener el mismo ancho de banda, pero diferentes razones de corte. Los criterios de desempeño en el dominio de la frecuencia del sistema definidos anteriormente se ilustran en la Fig. 9-2. Otro criterio importante para el dominio de la frecuencia se define en las siguientes secciones de este capítulo.

9-2 M_r, ω_r y ancho de banda de un sistema prototipo de segundo orden

9-2-1 Pico de resonancia y frecuencia de resonancia

Para el sistema prototipo de segundo orden definido en la Sec. 7-5, el pico de resonancia M_r, la frecuencia de resonancia ω_r, y el ancho de banda BW están relacionados en forma única con el factor de amortiguamiento relativo ζ y con la frecuencia natural no amortiguada ω_n del sistema.

Considere la función de transferencia en lazo cerrado del sistema prototipo de segundo orden:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{9-17}$$

En estado senoidal permanente, $s = j\omega$, la ecuación (9-17) se convierte en:

$$M(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + j2(\omega/\omega_n)\zeta - (\omega/\omega_n)^2} \qquad (9\text{-}18)$$

Se puede simplificar la ecuación (9-18) al hacer que $u = \omega/\omega_n$. Entonces la ecuación (9-18) se convierte en:

$$M(ju) = \frac{1}{1 + j2u\zeta - u^2} \qquad (9\text{-}19)$$

La magnitud y fase de $M(ju)$ son:

$$|M(ju)| = \frac{1}{[(1 - u^2)^2 + (2\zeta u)^2]^{1/2}} \qquad (9\text{-}20)$$

y

$$\angle M(ju) = \phi_M(ju) = -\tan^{-1}\frac{2\zeta u}{1 - u^2} \qquad (9\text{-}21)$$

respectivamente. La frecuencia de resonancia se determina al hacer que la derivada de $|M(ju)|$ con respecto a u sea cero. Por tanto:

$$\frac{d|M(ju)|}{du} = -\frac{1}{2}[(1 - u^2)^2 + (2\zeta u)^2]^{-3/2}(4u^3 - 4u + 8u\zeta^2) = 0 \qquad (9\text{-}22)$$

de donde se obtiene:

$$4u^3 - 4u + 8u\zeta^2 = 4u(u^2 - 1 + 2\zeta^2) = 0 \qquad (9\text{-}23)$$

En frecuencia normalizada, las raíces de la ecuación (9-23) son $u_r = 0$, y

$$u_r = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \qquad (9\text{-}24)$$

La solución de $u_r = 0$ indica meramente que la pendiente de la curva de $|M(ju)|$ contra ω es cero en $\omega = 0$; no es un máximo verdadero si ζ es menor que 0.707. La ecuación (9-24) da la frecuencia de resonancia:

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2} \qquad (9\text{-}25)$$

Ya que la frecuencia es una cantidad real, la ecuación (9-25) es significativa sólo para $2\zeta^2 \leq 1$, o $\zeta \leq 0.707$. Esto significa simplemente que para todos los valores de ζ mayores que 0.707, la frecuencia de resonancia es $\omega_r = 0$, y $M_r = 1$.

Al sustituir la ecuación (9-24) en la ecuación (9-20) para u y simplificando, se obtiene:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \zeta \leq 0.707 \tag{9-26}$$

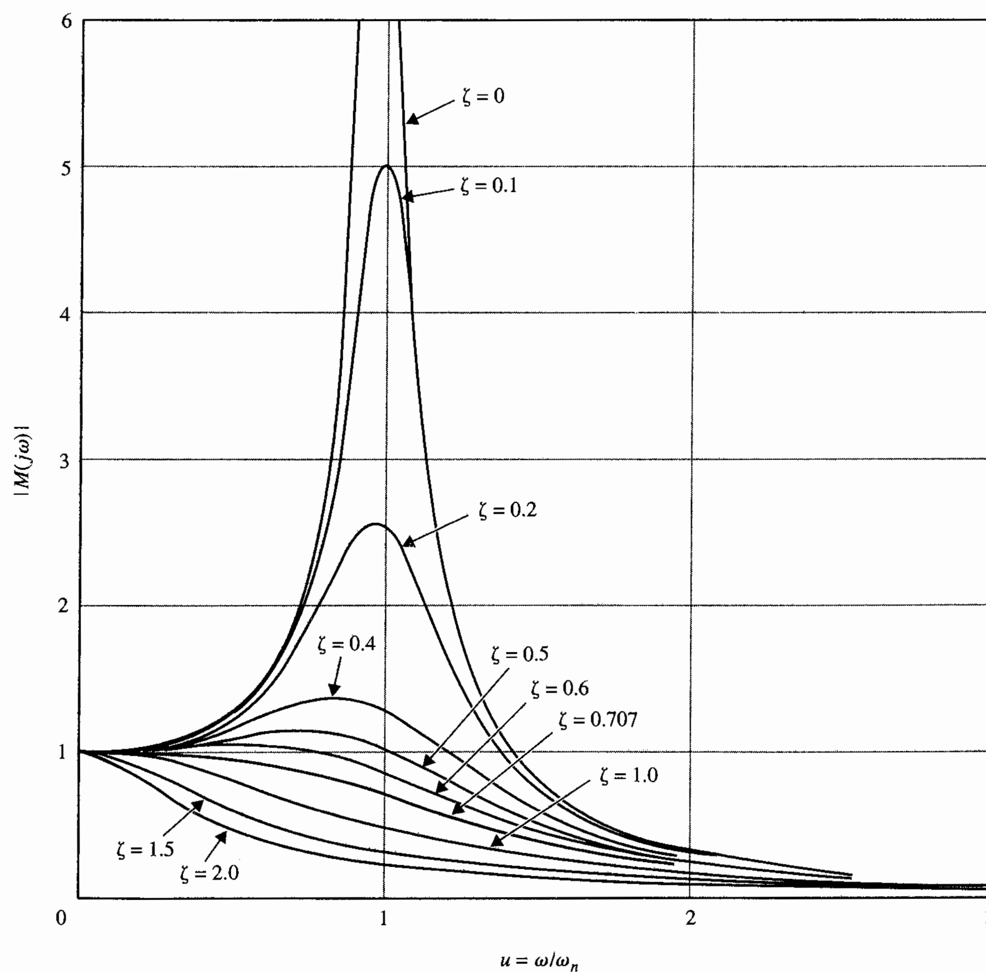


Figura 9-3 Magnitud en función de la frecuencia normalizada de un sistema de control en lazo cerrado de segundo orden.

▲ Para un sistema prototipo de segundo orden, $M_r = 1$ y $\omega_r = 0$ cuando $\zeta \geq 0.707$

Es importante observar que para el sistema prototipo de segundo orden, M_r es sólo una función del factor de amortiguamiento relativo ζ, y ω_r es una función tanto de ζ como de ω_n. Además, el tomar la derivada de $|M(ju)|$ con respecto a u es un método válido para determinar M_r y ω_r para sistemas de orden superior, este método analítico es bastante tedioso y no recomendable. Los métodos gráficos que serán discutidos y los métodos por computadora son mucho más eficientes para sistemas en general.

▲ Para el sistema prototipo de segundo orden, M_r es una función de ζ solamente.

La Fig. 9-3 ilustra las gráficas de $|M(ju)|$ de la ecuación (9-20) contra u para varios valores de ζ. Observe que si la escala de frecuencia no fuese normalizada, el valor de $\omega_r = u_r \omega_n$ se incrementaría cuando ζ disminuye, como lo indica la ecuación (9-25). Cuando $\zeta = 0$, $\omega_r = \omega_n$. Las Figs. 9-4 y 9-5 ilustran las relaciones entre M_r y ζ, y u_r $(= \omega_r/\omega_n)$ y ζ, respectivamente.

9-2-2 Ancho de banda

De acuerdo con la definición del ancho de banda, se hace que el valor de $|M(ju)|$ sea igual a $1/\sqrt{2} \cong 0.707$.

$$|M(ju)| = \frac{1}{[(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2]^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{9-27}$$

Por tanto:

$$[(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2]^{1/2} = \sqrt{2} \tag{9-28}$$

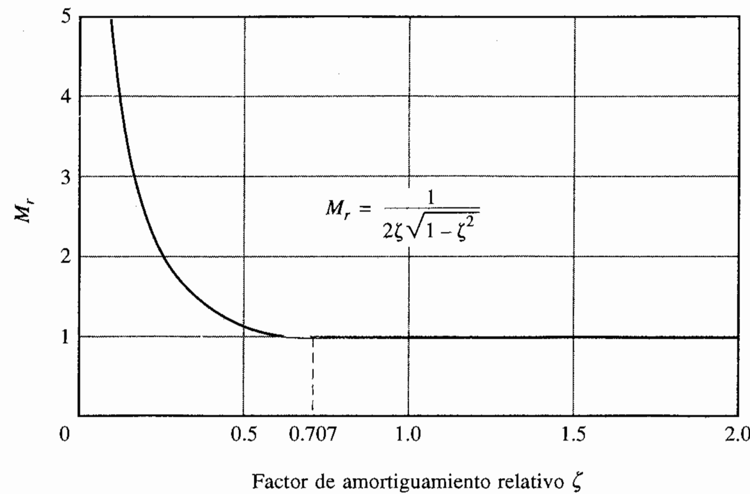


Figura 9-4 M_r en función del factor de amortiguamiento relativo para un sistema de segundo orden.

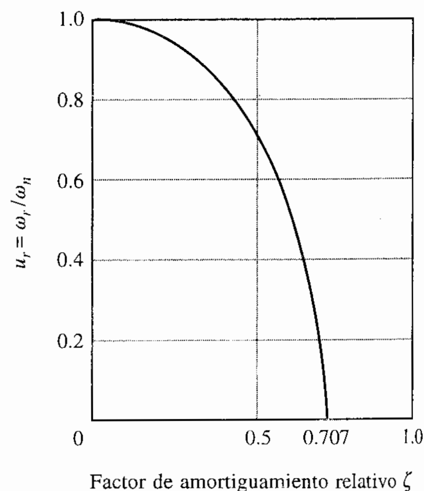


Figura 9-5 Frecuencia de resonancia normalizada en función del factor de amortiguamiento relativo para un sistema de segundo orden, $u_r = \sqrt{1-2\zeta^2}$.

que lleva a:

$$u^2 = (1 - 2\zeta^2) \pm \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \tag{9-29}$$

▲ BW/ω_n disminuye monotónicamente al disminuir el factor de amortiguamiento relativo ζ.

El signo + (más) se debe escoger en la ecuación (9-29), ya que u debe ser una cantidad real positiva para cualquier ζ. Por tanto, el ancho de banda del sistema prototipo de segundo orden se determina de la ecuación (9-29) como:

$$\boxed{BW = \omega_n \left[(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}\right]^{1/2}} \tag{9-30}$$

▲ BW es directamente proporcional a ω_n.

La Fig. 9-6 muestra una gráfica de BW/ω_n como una función de ζ. Observe que cuando ζ se incrementa, BW/ω_n disminuye en forma monotónica. Aún más importante, la ecuación (9-30) muestra que BW es directamente proporcional a ω_n.

Se ha establecido alguna relación simple entre la respuesta en el dominio del tiempo y las características en el dominio de la frecuencia del sistema prototipo de segundo orden. El resumen de estas relaciones es el siguiente:

▲ Cuando un sistema es inestable, M_r deja de tener sentido.

1. El pico de resonancia M_r de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado depende de ζ solamente [ecuación (9-26)]. Cuando ζ es cero, M_r es infinita. Cuando ζ es negativa, el sistema es inestable y el valor de M_r ya no tiene sentido. Cuando ζ se

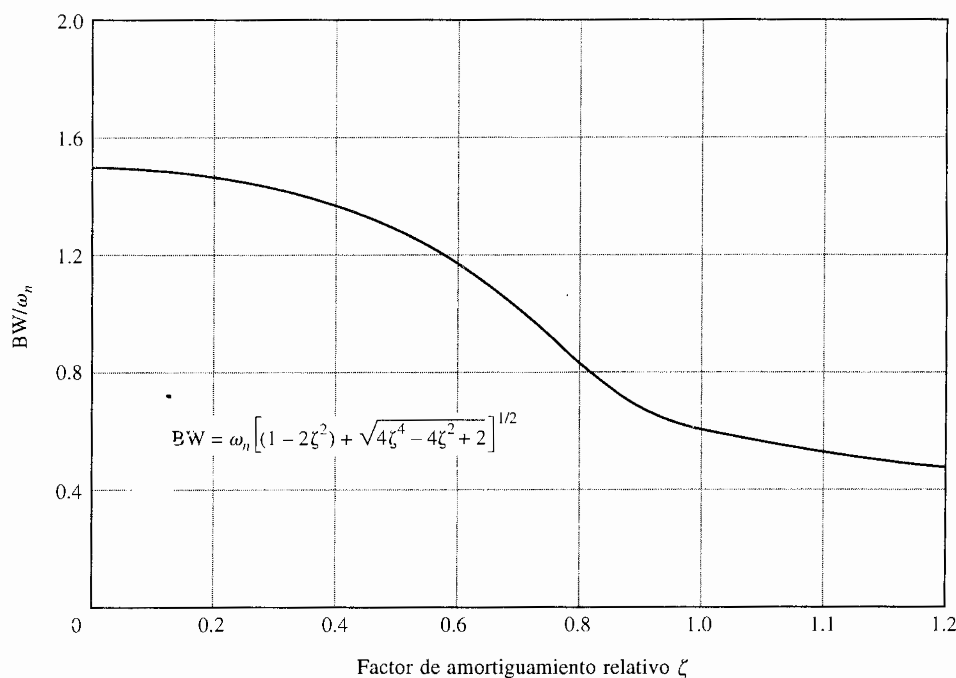


Figura 9-6 Ancho de banda/w_n en función del factor de amortiguamiento relativo para un sistema de segundo orden.

▲ El ancho de banda y el tiempo de levantamiento son inversamente proporcionales entre sí.

incrementa, M_r disminuye. Para $\zeta \geq 0.707$, $M_r = 1$ (*véase* Fig. 9-4) y $\omega_r = 0$ (*véase* Fig. 9-5). Al comparar con la respuesta al escalón unitario, el sobrepaso máximo en la ecuación (7-99) también depende solamente de ζ. Sin embargo, el sobrepaso máximo es igual a 0 cuando $\zeta \geq 1$.

2. El ancho de banda es directamente proporcional a ω_n [ecuación (9-30]; esto es, BW se incrementa y disminuye en forma lineal con respecto a ω_n. BW también disminuye con el incremento en ζ para una ω_n fija (*véase* Fig. 9-6). Para la respuesta al escalón unitario, el tiempo de levantamiento aumenta cuando ω_n disminuye [ecuación (7-104) y Fig. 7-21]. Por tanto, el BW y el tiempo de levantamiento son inversamente proporcionales entre sí.
3. El ancho de banda y M_r son proporcionales entre sí para $0 \leq \zeta \leq 0.707$.

La correlación entre la ubicación de los polos, la respuesta al escalón unitario, y la magnitud de la respuesta en frecuencia para el sistema prototipo de segundo orden se resumen en la Fig. 9-7.

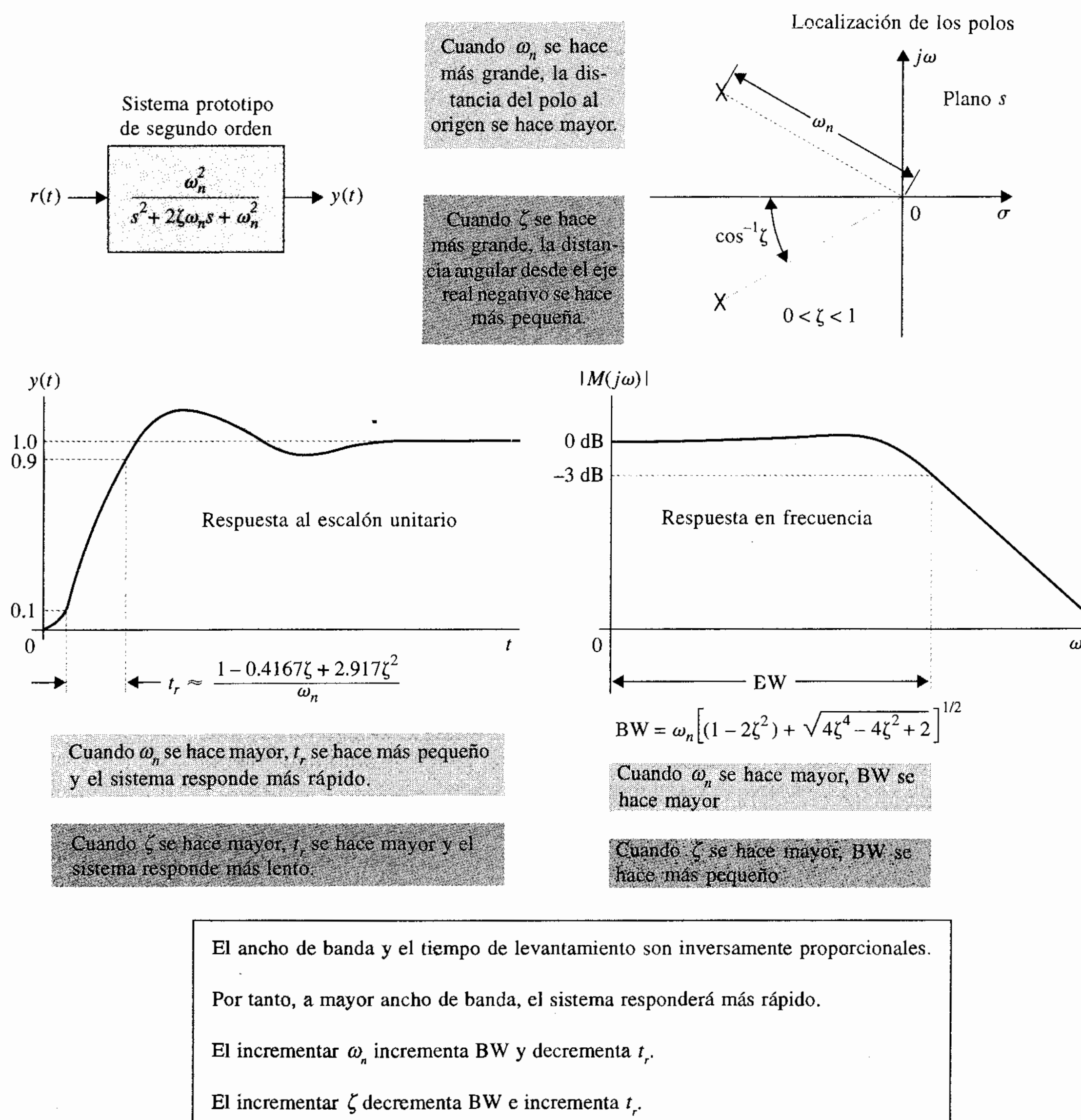


Figura 9-7 Correlación entre la localización de polos, la respuesta al escalón unitario, y la magnitud de la respuesta en frecuencia del sistema prototipo de segundo orden.

9-3 Efectos de la adición de un cero en la función de transferencia de la trayectoria directa

La relación entre la respuesta en el dominio del tiempo y la del dominio de la frecuencia en la Sec. 9-2 se aplica solamente al sistema prototipo de segundo orden descrito por la ecuación (9-17). Cuando otros sistemas de segundo orden o de orden superior están involucrados, las relaciones son diferentes y pueden ser más complicadas. Es de interés considerar los efectos sobre la respuesta en el dominio de la frecuencia cuando se añaden polos y ceros a la función de transferencia prototipo de segundo orden. Es simple estudiar los efectos de añadir polos y ceros a la función de transferencia en lazo cerrado; sin embargo, es más realista desde el punto de vista de diseño modificar la función de transferencia de la trayectoria directa.

La función de transferencia en lazo cerrado en la ecuación (9-17) se puede considerar como la de un sistema de control con realimentación unitaria con la función de transferencia de la trayectoria directa del sistema prototipo de segundo orden:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \tag{9-31}$$

Si se añade un cero en $s = -1/T$ a la función de transferencia para que la ecuación (9-31) se convierta en:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2(1 + Ts)}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \tag{9-32}$$

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$M(s) = \frac{\omega_n^2(1 + Ts)}{s^2 + (2\zeta\omega_n + T\omega_n^2)s + \omega_n^2} \tag{9-33}$$

▲ El efecto general de añadir un cero a la función de transferencia de la trayectoria directa es incrementar el BW del sistema en lazo cerrado.

En principio M_r, ω_r y BW del sistema se pueden obtener utilizando los mismos pasos empleados en la sección. 9-2. Sin embargo, ya que ahora son tres parámetros ζ, ω_n, y T, las expresiones exactas para M_r, ω_r y el BW son difíciles de obtener en forma analítica, aunque el sistema aún es de segundo orden. Después de una obtención larga, el ancho de banda del sistema se encuentra como:

$$\text{BW} = \left(-b + \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4\omega_n^4}\right)^{1/2} \tag{9-34}$$

en donde:

$$b = 4\zeta^2\omega_n^2 + 4\zeta\omega_n^3 T - 2\omega_n^2 - \omega_n^4 T^2 \tag{9-35}$$

Aun cuando es difícil ver cómo cada uno de los parámetros en la ecuación (9-34) afecta el ancho de banda, la Fig. 9-8 muestra la relación entre BW y T para $\zeta = 0.707$ y $\omega_n = 1$. Observe que:

> ***el efecto general de añadir un cero a la función de transferencia de la trayectoria directa es incrementar el ancho de banda del sistema en lazo cerrado.***

Sin embargo, como se muestra en la Fig. 9-8, sobre un intervalo de valores pequeños de T, el ancho de banda disminuye. Las Figs. 9-9(a) y (b) dan las gráficas del módulo de $|M(j\omega)|$ del sistema en lazo cerrado que tiene la $G(s)$ de la ecuación (9-32) y es la función de transferencia de la trayectoria directa; $\omega_n = 1$, $\zeta = 0.707$ y 0.2, respectivamente, y T toma varios valores. Estas curvas verifican que el ancho de banda generalmente aumente con el incremento de T al añadir un cero a $G(s)$, pero para un intervalo de valores pequeños de T para los cuales el ancho de banda BW disminuye realmente. Las Figs. 9-10 y 9-11 muestran las respuestas al escalón unitario correspondientes del sistema en lazo cerrado. Estas curvas muestran que un ancho de banda grande corresponde a un tiempo de levantamiento más rápido. Sin embargo, cuando T se hace más grande, el cero de la función de transferencia en lazo cerrado, que es $s = -1/T$, se mueve muy cerca del origen, causando que el sistema tenga constantes de tiempo muy grandes. Por tanto, la Fig. 9-10 ilustra la situación en que el tiempo de levantamiento es rápido, pero la constante de tiempo larga del cero cercano al origen del plano s causa que la respuesta en el tiempo se arrastre para alcanzar el valor en estado estable final (es decir, el tiempo de asentamiento será más largo).

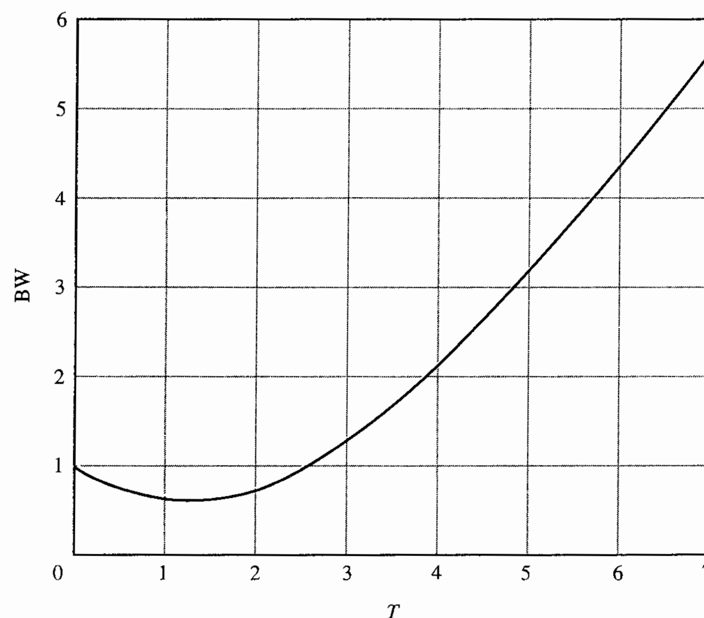


Figura 9-8 Ancho de banda de un sistema de segundo orden con la función de transferencia en lazo abierto.

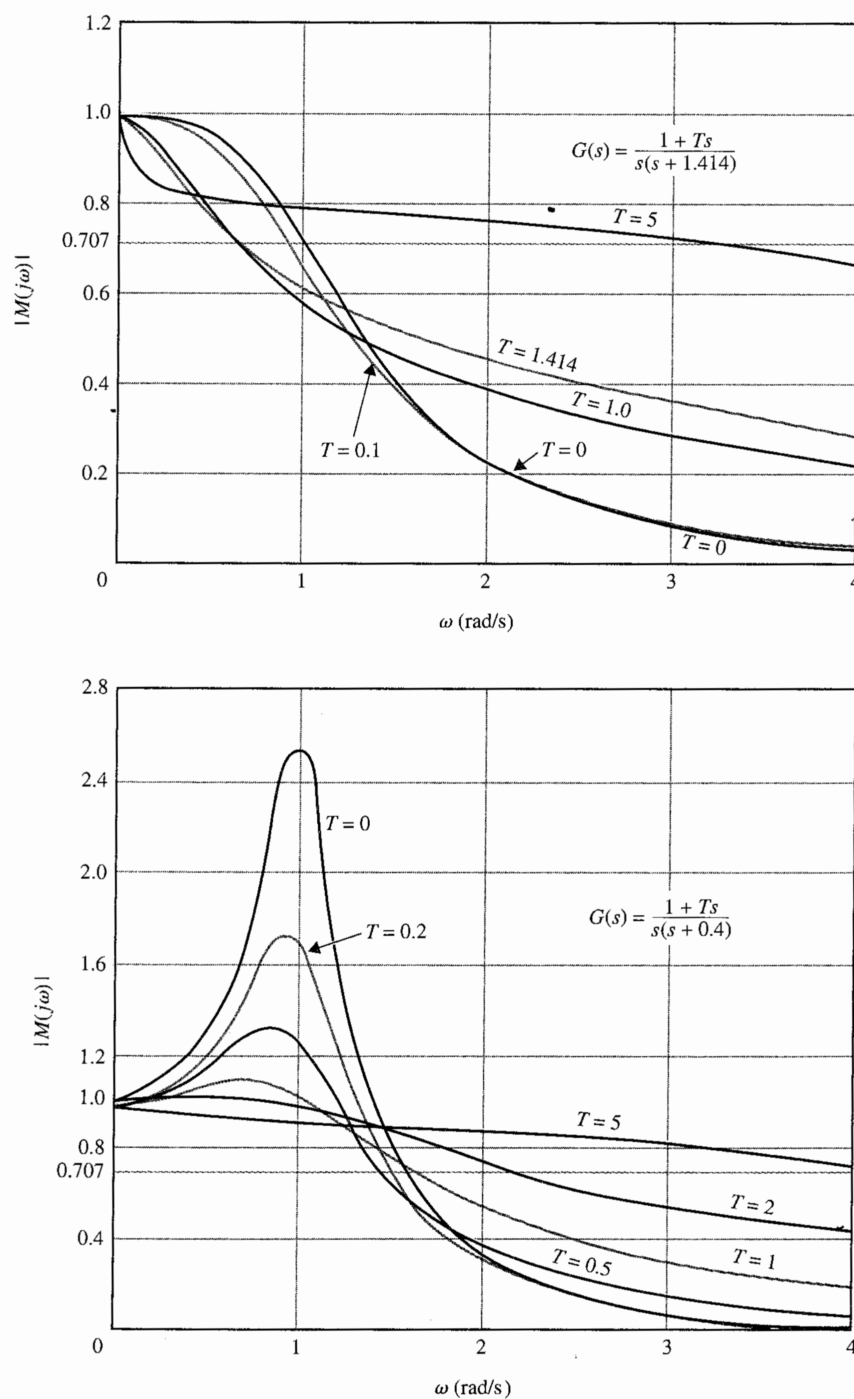


Figura 9-9 Curvas ampliadas del sistema de segundo orden con la función de transferencia $G(s)$.

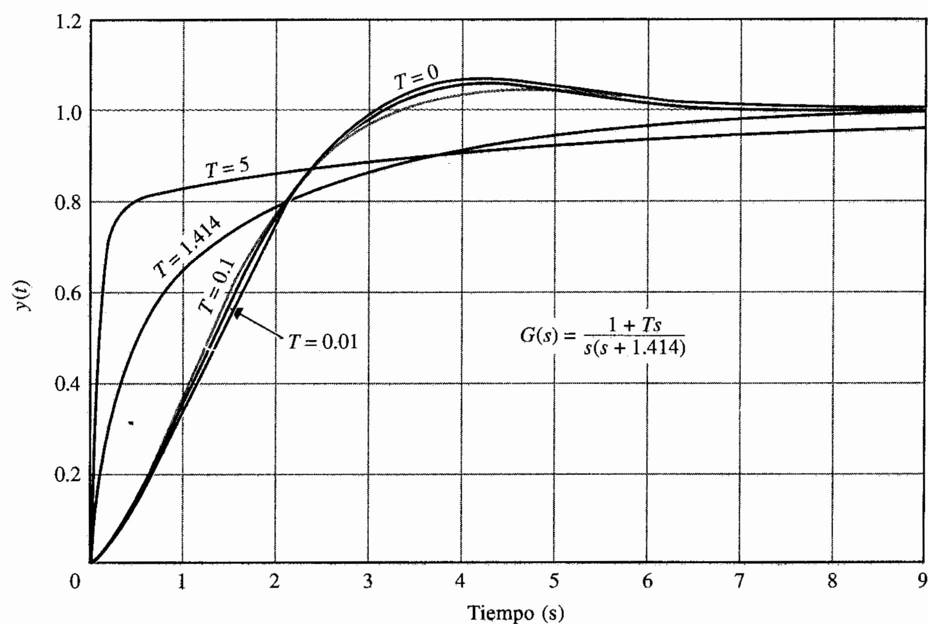


Figura 9-10 Respuesta al escalón unitario de un sistema de tercer orden con la función de transferencia de la trayectoria directa $G(s)$.

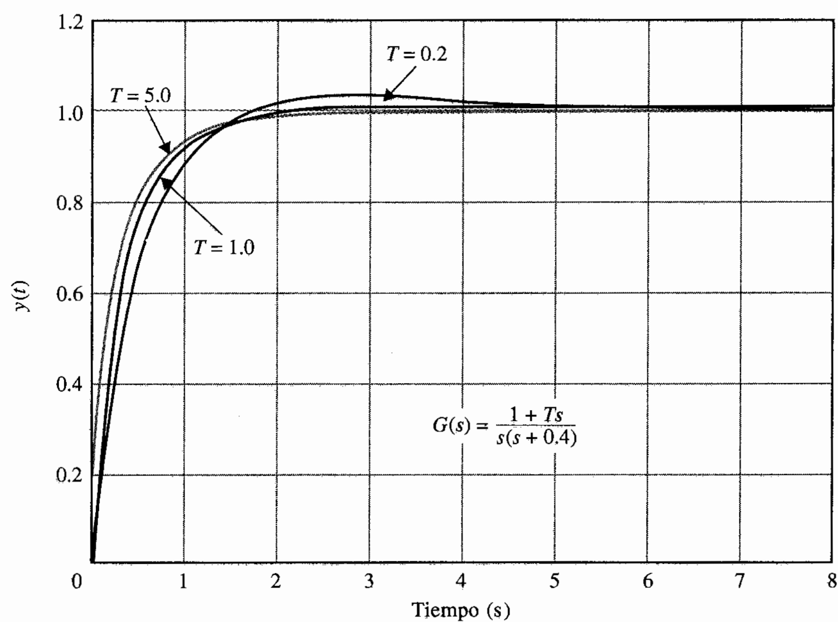


Figura 9-11 Respuesta al escalón unitario de un sistema de segundo orden con la función de transferencia de la trayectoria directa $G(s)$.

9-4 Efectos de la adición de un polo en la función de transferencia de la trayectoria directa

Añadir un polo en $s = -1/T$ a la función de transferencia de la trayectoria directa de la ecuación (9-31) lleva a:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)(1 + Ts)} \qquad (9\text{-}36)$$

▲ El añadir un polo a la función de transferencia de la trayectoria directa hace que el sistema en lazo cerrado sea menos estable y el ancho de banda disminuya.

La obtención del ancho de banda del sistema en lazo cerrado con $G(s)$ dada por la ecuación (9-36) es muy tediosa. Se puede obtener una indicación cualitativa de las propiedades del ancho de banda con referencia a la Fig. 9-12, que muestra las gráficas del módulo de $|M(j\omega)|$ en función de ω para $\omega_n = 1$, $\zeta = 0.707$ y varios valores de T. Ya que el sistema es ahora de tercer orden, se puede hacer inestable para un cierto conjunto de parámetros del sistema. Se puede mostrar que para $\omega_n = 1$ y $\zeta = 0.707$, el sistema es estable para todos los valores positivos de T. Las curvas del módulo de $|M(j\omega)|$ en función de ω en la Fig. 9-12 muestran que para valores pequeños de T, el ancho de banda del sistema se incrementa ligeramente por la adición del polo, pero M_r también se incrementa. Cuando T se vuelve más grande, el polo añadido a $G(s)$ tiene el

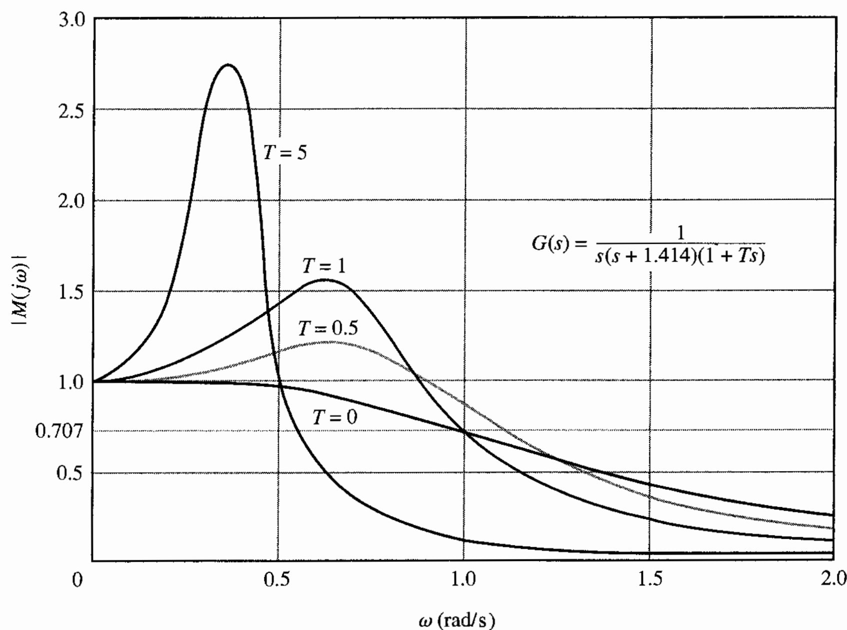


Figura 9-12 Ampliación de las curvas del sistema de tercer orden con la función de transferencia de la trayectoria directa $G(s)$.

efecto de disminuir el ancho de banda pero incrementa M_r. Por tanto, se puede concluir que, en general:

el efecto de añadir un polo a la función de transferencia de la trayectoria directa hace que el sistema en lazo cerrado sea menos estable, mientras disminuye el ancho de banda.

Las respuestas al escalón unitario de la Fig. 9-13 muestran que para valores grandes de T, $T = 1$ y $T = 5$, se observan las siguientes relaciones:

1. El tiempo de levantamiento se incrementa con la disminución del ancho de banda.
2. Los valores grandes de M_r también corresponden a un sobrepaso máximo grande en las respuestas al escalón unitario.

▲ Cuando $M_r = \infty$, el sistema en el sistema en lazo cerrado es marginalmente estable. Cuando el sistema es inestable, M_r ya no tiene sentido.

La correlación entre M_r y el sobrepaso máximo de la respuesta al escalón tiene sentido solamente cuando el sistema es estable. Cuando $G(j\omega) = -1$, el módulo de $|M(j\omega)|$ es infinito, y el sistema en lazo cerrado es marginalmente estable. Por otro lado, cuando el sistema es inestable, el módulo de $|M(j\omega)|$ es analíticamente finito, pero ya no tiene sentido.

El objetivo de estas dos últimas secciones es demostrar las relaciones simples entre BW, M_r y la respuesta en el dominio del tiempo. Se investigaron los efectos típicos sobre el ancho de banda BW al añadir un polo y un cero a la función de transferencia de la trayectoria directa. No se intentó incluir todos los casos generales.

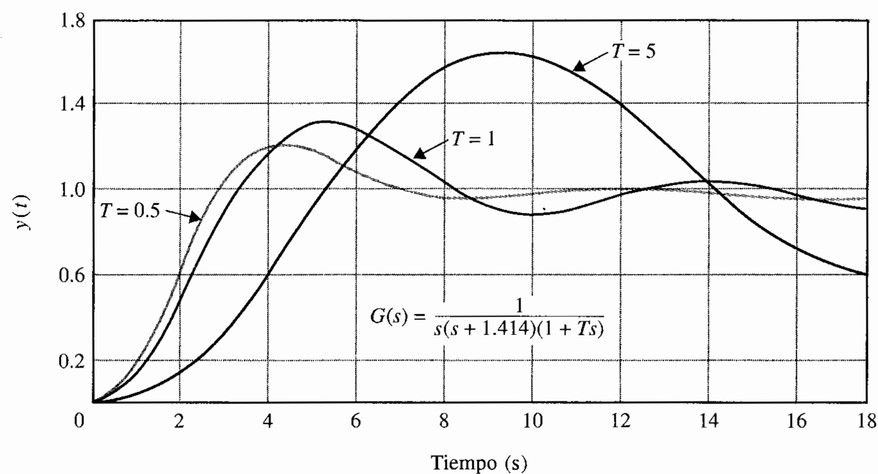


Figura 9-13 Respuesta al escalón unitario de un sistema de tercer orden con la función de transferencia de la trayectoria directa $G(s)$.

9-5 Criterio de estabilidad de Nyquist: Fundamentos

▲ La traza de Nyquist de $L(j\omega)$ está en coordenadas polares cuando ω varía desde 0 hasta ∞.

Hasta ahora se han presentado dos métodos para determinar la estabilidad de sistemas lineales SISO: el criterio de Routh-Hurwitz y el método del lugar geométrico de las raíces para determinar la estabilidad al localizar las raíces de la ecuación característica en el plano s. Por supuesto, si los coeficientes de la ecuación característica son todos conocidos, se pueden resolver para las raíces de la ecuación mediante un programa de computadora.

El criterio de Nyquist es un método semigráfico que determina la estabilidad de un sistema en lazo cerrado al investigar las propiedades de la traza en el dominio de la frecuencia, la **traza de Nyquist,** de la función de transferencia de $G(s)H(s)$ o $L(s)$. Específicamente, la traza de Nyquist de $L(s)$ es una gráfica de $L(j\omega)$ en coordenadas polares de $\text{Im}[L(j\omega)]$ contra $\text{Re}[L(j\omega)]$ cuando ω varía desde 0 hasta ∞. Éste es otro ejemplo de la utilización de las propiedades de la función de transferencia en lazo para encontrar el desempeño del sistema en lazo cerrado. El criterio de Nyquist tiene las siguientes características que lo hacen un método alternativo atractivo para el análisis y diseño de sistemas de control.

▲ El criterio de Nyquist también da indicaciones sobre la estabilidad relativa.

1. Además de proveer la estabilidad absoluta, como el criterio de Routh-Hurwitz, el criterio de Nyquist también da información sobre la estabilidad relativa de un sistema estable y el grado de inestabilidad de un sistema inestable. También da indicación de cómo se puede mejorar la estabilidad del sistema, si es necesario.
2. La traza de Nyquist de $G(s)H(s)$ o de $L(s)$ es muy fácil de obtener, especialmente con la ayuda de una computadora.
3. La traza de Nyquist de $G(s)H(s)$ da información sobre las características en el dominio de la frecuencia, tales como M_r, ω_r, BW y otras, con facilidad.
4. La traza de Nyquist es útil para sistemas con retardos puros que no se pueden tratar con el criterio de Routh-Hurwitz, y que son difíciles de analizar con el método del lugar de las raíces.

9-5-1 Problema de estabilidad

El criterio de Nyquist representa un método para determinar la localización de las raíces de la ecuación característica con respecto a los semiplanos izquierdo y derecho del plano s. A diferencia del método del lugar geométrico de las raíces, el criterio de Nyquist no da la localización exacta de las raíces de la ecuación característica.

Considere que la función de transferencia en lazo cerrado de un sistema SISO es:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{9-37}$$

en donde $G(s)H(s)$ puede tomar la siguiente forma:

$$G(s)H(s) = \frac{K(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots (1 + T_m s)}{s^p(1 + T_a s)(1 + T_b s) \cdots (1 + T_n s)} e^{-T_d s} \qquad (9\text{-}38)$$

en donde las T's son coeficientes reales o complejos conjugados y T_d es un tiempo de retardo real.

Ya que la ecuación característica se obtiene al hacer que el polinomio denominador de $M(s)$ sea cero, las raíces de la ecuación característica son también los ceros de $1 + G(s)H(s)$. O, las raíces de la ecuación característica deben satisfacer:

$$\Delta(s) = 1 + G(s)H(s) = 0 \qquad (9\text{-}39)$$

En general, para un sistema con lazos múltiples, el denominador de $M(s)$ se puede escribir como:

$$\Delta(s) = 1 + L(s) = 0 \qquad (9\text{-}40)$$

en donde $L(s)$ es la función de transferencia de lazo y es de la forma de la ecuación (9-38).

Antes de entrar a los detalles del criterio de Nyquist, es útil resumir las relaciones de polos y ceros de las funciones de transferencia de varios sistemas.

Identificación de polos y ceros

ceros de la función de transferencia en lazo: ceros de $L(s)$
polos de la función de transferencia en lazo: polos de $L(s)$
polos de la función de transferencia en lazo cerrado: ceros de $1 + L(s)$
= raíces de la ecuación característica
polos de $1 + L(s)$ = polos de $L(s)$

Condiciones de estabilidad. Se definen dos tipos de estabilidad con respecto a la configuración del sistema.

1. **Estabilidad en lazo abierto.** Un sistema se dice ser estable en lazo abierto si los polos de la función de transferencia de lazo $L(s)$ están todos en el semiplano izquierdo del plano s. Para un sistema de un lazo sencillo, esto es equivalente a que el sistema sea estable cuando el lazo se abre en cualquier punto.
2. **Estabilidad en lazo cerrado.** Un sistema se dice ser **estable en lazo cerrado,** o simplemente estable, si los polos de la función de transferencia en lazo cerrado o los ceros de $1 + L(s)$ están en el semiplano izquierdo del plano s. Las excepciones a las definiciones anteriores son los sistemas con polos o ceros intencionalmente localizados en $s = 0$.

9-5-2 Definición de encierro e inclusión

Ya que el criterio de Nyquist es un método gráfico, se necesitan establecer los conceptos de **encierro e inclusión,** los cuales son útiles para la interpretación de las trazas de Nyquist para la estabilidad.

Encierro

Un punto o una región en un plano de una función compleja se dice encerrado por una trayectoria cerrada si está dentro de la trayectoria.

Por ejemplo, el punto A en la Fig. 9-14 está rodeado por la trayectoria cerrada Γ, ya que A está *dentro* de la trayectoria cerrada. El punto B no está rodeado por la trayectoria cerrada Γ, ya que está *fuera* de la trayectoria. Además, cuando la trayectoria cerrada Γ tiene una dirección asignada a ella, el encierro, si se hace, puede hacerse en el sentido de las manecillas del reloj (SMR) o en sentido contrario (SCMR). Como se muestra en la Fig. 9-14, el punto A está encerrado por Γ en dirección SCMR. Se puede decir que la región *dentro* de la trayectoria está encerrada en la dirección prescrita, y la región *fuera* de la trayectoria no está encerrada.

Inclusión

Un punto o región se dice incluido por una trayectoria cerrada si está encerrado en la dirección SCMR, o el punto o región está a la izquierda de la trayectoria cuando ésta se recorre en la dirección prescrita.

El concepto de inclusión es particularmente útil si sólo una porción de la trayectoria cerrada se muestra. Por ejemplo, las regiones sombreadas en las Figs. 9-15 está considerada como *incluida* por la trayectoria cerrada Γ. En otras palabras, el punto A en la Fig. 9-15(a) está *incluido* por Γ, pero el punto A en la Fig. 9-15(b) no lo está. Sin embargo, el punto B en todos los puntos en la región sombreada fuera de Γ en la Fig. 9-15(b) está *incluido*.

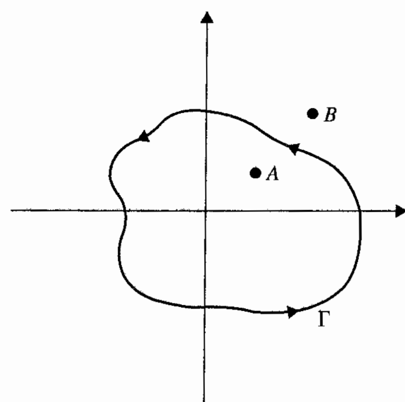


Figura 9-14 Definición de encierro.

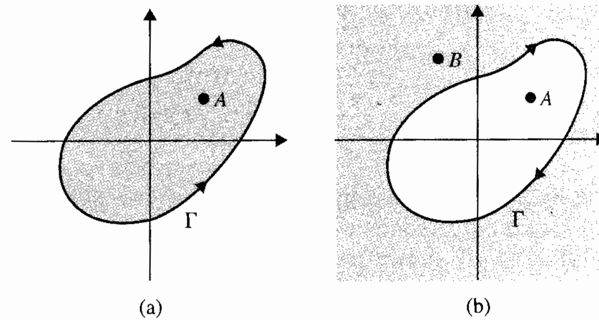


Figura 9-15 Definición de puntos encerrados y regiones. (a) Punto A está incluido por Γ. (b) Punto A no esta incluido, pero B está incluido por el lugar geométrico Γ.

9-5-3 Número de encierros e inclusiones

Cuando un punto está encerrado por una trayectoria cerrada Γ, un número N se puede asignar al número de veces que está encerrado. La magnitud de N se puede determinar al dibujar una flecha desde un punto a cualquier punto arbitrario s_1 sobre la trayectoria cerrada Γ y entonces hacer que s_1 siga la trayectoria en la dirección prescrita hasta que regrese al punto inicial. El número *neto* de vueltas atravesadas por esta flecha es N, o el ángulo neto es $2\pi N$ radianes. Por ejemplo, el punto A en la Fig. 9-16(a) está *encerrado una vez* o 2π radianes por Γ, y el punto B está *encerrado dos veces*, o 4π radianes, todos en la dirección SMR. En la Fig. 9-16(b), el punto A está *encerrado una vez*, y el punto B *dos veces* por Γ. Por definición, N es positivo para encierros en el SCMR y negativo para rodeos en el SMR.

9-5-4 Principio del argumento

El criterio de Nyquist se originó en una aplicación en la ingeniería del bien conocido "principio del argumento" de la teoría de la variable compleja. El principio se establece en la siguiente forma heurística.

Sea $\Delta(s)$ una función univaluada de la forma del lado derecho de la ecuación (9-38), la cual tiene un número finito de polos en el plano s. *Univaluado* significa que para cada punto en el plano s, existe un punto, y sólo uno, correspondiente, incluyendo el infinito, en el plano complejo $\Delta(s)$. Como se definió en el capítulo 8, el infinito en el plano complejo se interpreta como un punto.

Suponga que se escoge arbitrariamente una trayectoria cerrada continua Γ_s en el plano s, como se muestra en la Fig. 9-17(a). Si Γ_s no atraviesa ninguno de los polos de $\Delta(s)$, entonces la trayectoria Γ_Δ mapeada por $\Delta(s)$ en el plano $\Delta(s)$ también es cerrada, como se muestra en la Fig. 9-17(b). Al comenzar desde el punto s_1, el lugar geométrico de Γ_s es recorrido en una dirección arbitrariamente escogida (en el caso ilustrado es SMR), a través de los puntos s_2 y s_3, y posteriormente regresando al punto s_1 después de pasar por todos los puntos de Γ_s, como se muestra en la Fig. 9-17(a). El lugar geométrico correspondiente a Γ_Δ comenzará desde el punto $\Delta(s_1)$ y va por los puntos $\Delta(s_2)$ y $\Delta(s_3)$, que corresponden a los puntos s_1, s_2 y s_3, respectivamente, y finalmente regresa al punto inicial, $\Delta(s_1)$. La dirección del recorrido de Γ_Δ puede ser SMR o SCMR, esto es, en la misma dirección o en dirección opuesta a la de Γ_s, dependien-

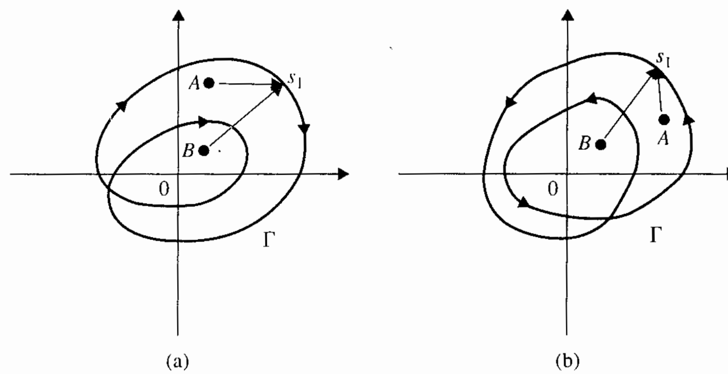


Figura 9-16 Definición del número de encierro e inclusión.

▲ No intente relacionar $\Delta(s)$ con $L(s)$. No son lo mismo.

te de la función $\Delta(s)$. En la Fig. 9-17(b) la dirección de Γ_Δ se asigna arbitrariamente, para propósitos de ilustración, es SCMR.

Aunque el mapeo del plano s al plano $\Delta(s)$ es de valor sencillo, el proceso inverso no es un mapeo único. Por ejemplo, considere la función:

$$\Delta(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \tag{9-41}$$

que tiene polos en $s = 0, -1,$ y -2 en el plano s. Para cada punto en el plano s, hay solamente un punto correspondiente en el plano $\Delta(s)$. Sin embargo, para cada punto en el plano $\Delta(s)$, la

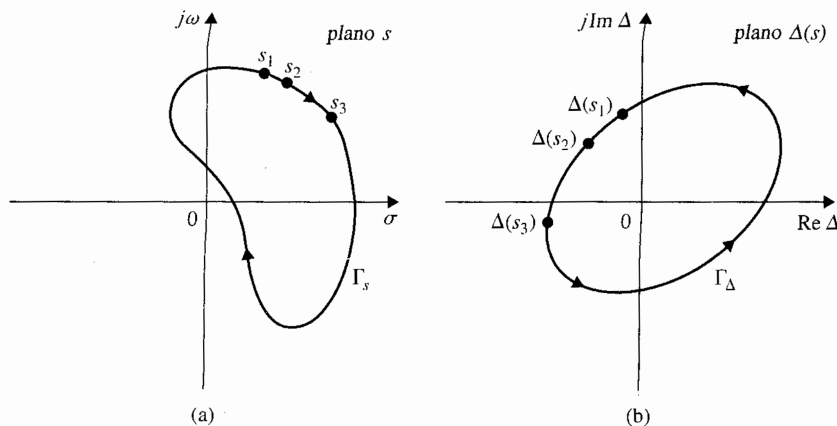


Figura 9-17 (a) Selección arbitraria de la trayectoria cerrada en el plano s. (b) El lugar geométrico correspondiente Γ_Δ en el plano $\Delta(s)$.

función se mapea en tres puntos correspondientes en el plano s. La forma más simple de ilustrar esto es escribir la ecuación (9-41) como:

$$s(s+1)(s+2) - \frac{K}{\Delta(s)} = 0 \tag{9-42}$$

Si $\Delta(s)$ es una constante real, que representa un punto sobre el eje real en el plano $\Delta(s)$, la ecuación de tercer orden de la ecuación (9-42) da tres raíces en el plano s. El lector debe reconocer el paralelo de esta situación a la del diagrama del lugar geométrico de las raíces que en esencia representa el mapeo de $\Delta(s) = -1 + j0$ en el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica en el plano s, para un valor dado de K. Por tanto, el lugar geométrico de las raíces de la ecuación (9-41) tiene tres ramas individuales en el plano s.

El principio del argumento puede enunciarse como sigue:

Sea $\Delta(s)$ tenga una función univaluada que tiene un número finito de polos en el plano s. Suponga que una trayectoria arbitraria cerrada Γ_s, se escoge en el plano s, de tal forma que la trayectoria no atraviese ninguno de los polos o ceros de $\Delta(s)$; el lugar geométrico correspondiente de Γ_Δ mapeado en el plano $\Delta(s)$ encerrará al origen tantas veces como la diferencia entre el número de ceros y polos de $\Delta(s)$ que están rodeados por el lugar geométrico Γ_s en el plano s.

En formato de ecuación, el principio del argumento se enuncia como:

$$N = Z - P \tag{9-43}$$

donde:

N = número de encierros del origen hechos por el lugar geométrico Γ_Δ en el plano $\Delta(s)$.
Z = número de ceros de $\Delta(s)$ encerrados por el lugar geométrico Γ_s en el plano s.
P = número de polos de $\Delta(s)$ encerrados por el lugar geométrico Γ_s en el plano s.

En general, N puede ser positivo ($Z > P$), cero ($Z = P$), o negativo ($Z < P$). Estas tres situaciones se describen a continuación con más detalles.

1. $N > 0$ ($Z > P$). Si el lugar geométrico en el plano s encierra más ceros que polos de $\Delta(s)$ en cierta dirección prescrita, (SMR o SCMR), N es un entero positivo. En este caso el lugar Γ_Δ en el plano $\Delta(s)$ encerrará al origen del plano $\Delta(s)$ N veces en la misma dirección que Γ_s.

2. $N = 0$ ($Z = P$). Si el lugar geométrico en el plano s encierra tantos polos como ceros, o ningún polo o cero de $\Delta(s)$, el lugar geométrico Γ_Δ en el plano $\Delta(s)$ no rodeará al origen del plano $\Delta(s)$.
3. $N < 0$ ($Z < P$). Si el lugar geométrico en el plano s encierra más polos que ceros de $\Delta(s)$ en cierta dirección. N es un entero negativo. En este caso, el lugar geométrico Γ_Δ en el plano $\Delta(s)$ encerrará al origen N veces en dirección opuesta a la de Γ_s.

Una forma conveniente de determinar N con respecto al origen (o con cualquier punto) del plano Δ, es dibujar una línea desde un punto en cualquier dirección a un punto tan lejos como sea necesario; el número neto de intersecciones de esta línea con el lugar geométrico $\Delta(s)$ da la magnitud de N. La Fig. 9-18 da varios ejemplos de este método para determinar N. En estos casos que se ilustran se supone que el lugar geométrico Γ_s, tiene un sentido SCMR.

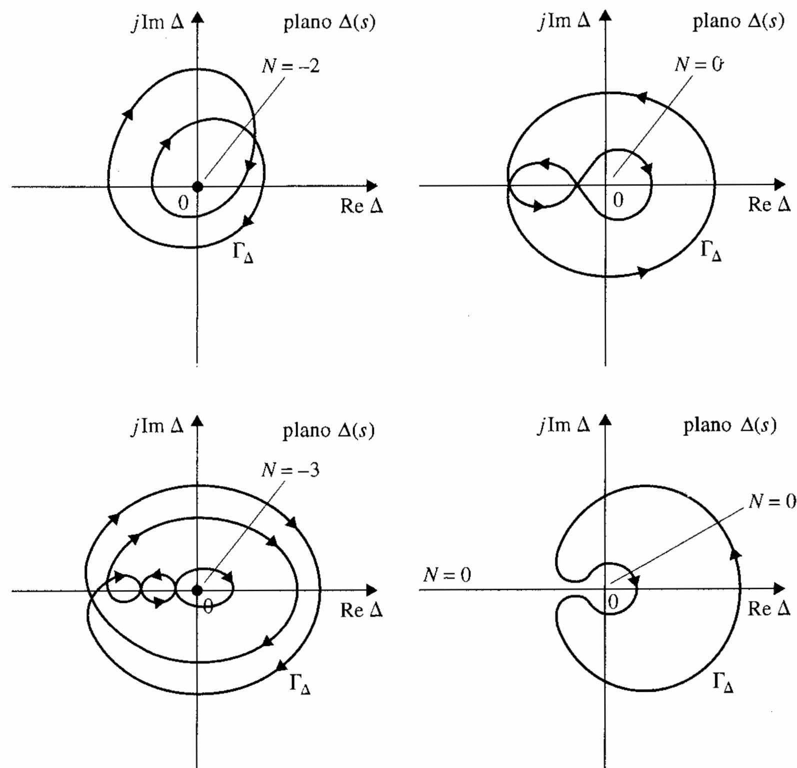


Figura 9-18 Ejemplos de la determinación de N en el plano $\Delta(s)$.

Punto crítico

Por conveniencia, se designará el origen del plano Δ como el **punto crítico** para determinar el valor de N. Posteriormente se designarán otros puntos en el plano de la función compleja como puntos críticos, dependiendo de la forma de como se aplique el criterio de Nyquist.

Una prueba rigurosa del principio del argumento no se da aquí. El siguiente ejemplo ilustrativo se puede considerar como explicación heurística de dicho principio. Se considera que la función $\Delta(s)$ es de la forma de:

$$\Delta(s) = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)} \tag{9-44}$$

donde K es un número real positivo. Los polos y ceros de $\Delta(s)$ se suponen como se muestra en la Fig. 9-19(a). La función $\Delta(s)$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= |\Delta(s)|\angle\Delta(s) \\ &= \frac{K|s + z_1|}{|s + p_1||s + p_2|}[\angle(s + z_1) - \angle(s + p_1) - \angle(s + p_2)] \end{aligned} \tag{9-45}$$

La Fig. 9-19(a) muestra una trayectoria seleccionada de forma arbitraria Γ_s en el plano s, con el punto arbitrario s_1 sobre la trayectoria, y Γ_s, no pasa por ninguno de los polos y ceros de $\Delta(s)$.

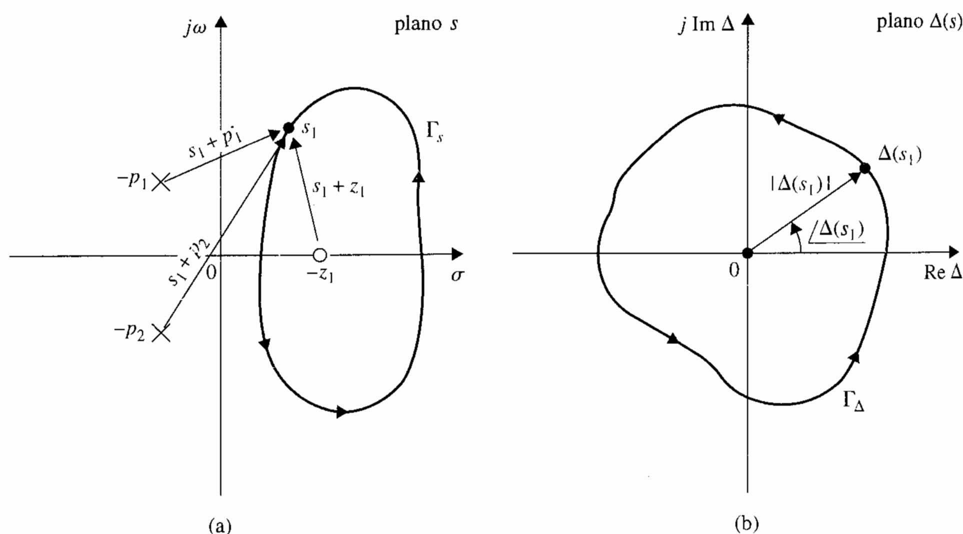


Figura 9-19 (a) Configuración de polos y ceros de $\Delta(s)$ en la ecuación (9-45) y la trayectoria Γ_s del plano s. (b) Lugar geométrico de Γ_Δ en el plano $\Delta(s)$ que corresponde al lugar geométrico de Γ_s de (a) a través del mapeo de la ecuación (9-45).

La función $\Delta(s)$ evaluada en $s = s_1$ es:

$$\Delta(s_1) = \frac{K(s_1 + z_1)}{(s_1 + p_1)(s_1 + p_2)} \tag{9-46}$$

El término $(s_1 + z_1)$ se puede representar de forma gráfica por el vector dibujado desde $-z_1$ a s_1. Vectores similares se pueden dibujar para $(s_1 + p_1)$ y $(s_1 + p_2)$. Por tanto $\Delta(s_1)$ está representado por los vectores dibujados desde los polos y ceros finitos de $\Delta(s)$ al punto s_1, como se muestra en la Fig. 9-19(a). Ahora, si el punto s_1 se mueve a lo largo del lugar geométrico Γ_s en la dirección prescrita SCMR hasta que regrese al punto de inicio, los ángulos generados por los vectores dibujados desde los dos polos que no están encerrados por Γ_s cuando s_1 completa un viaje de vuelta son cero, mientras que los vectores $(s_1 + z_1)$ dibujados desde los ceros en $-z_1$, que están rodeados por Γ_s, generan un ángulo positivo (SCMR) de 2π radianes, lo que significa que la gráfica correspondiente $\Delta(s)$ debe encerrar al origen 2π radianes, o una vuelta, en la dirección SCMR como se muestra en la Fig. 9-19(b). Esto es por qué sólo los polos y ceros de $\Delta(s)$ que están dentro de la trayectoria Γ_s en el plano s contribuirán al valor de N de la ecuación (9-43). Ya que los polos de $\Delta(s)$ contribuyen con fase negativa, y los ceros contribuyen con fase positiva, el valor de N depende sólo de la diferencia entre Z y P. Para este caso ilustrado en la Fig. 9-19(a), $Z = 1$ y $P = 0$. Por tanto:

▲ Z y P se refieren solamente a los ceros y polos, respectivamente, de $\Delta(s)$ que están encerrados por Γ_s.

$$N = Z - P = 1 \tag{9-47}$$

lo que significa que el lugar geométrico Γ_Δ en el plano $\Delta(s)$ debe encerrar al origen una vez en la misma dirección que el lugar geométrico Γ_s en el plano s. Se debe mantener en mente que Z y P se refieren solamente a polos y ceros, respectivamente, de $\Delta(s)$ que están encerrados por Γ_s, y no es el número total de ceros y polos de $\Delta(s)$.

En general, el ángulo neto recorrido por el lugar geométrico del plano $\Delta(s)$, cuando el lugar geométrico del plano s se recorre una vez en cualquier dirección, es igual a:

$$2\pi(Z - P) = 2\pi N \qquad \text{radianes} \tag{9-48}$$

Esta ecuación implica que si hay N ceros más que polos de $\Delta(s)$, que están encerrados por el lugar geométrico Γ_s en el plano s, en una dirección prescrita, el lugar geométrico del plano $\Delta(s)$ encerrará al origen N veces *en la misma dirección* que Γ_s. Por el contrario, si hay N polos más que ceros encerrados por Γ_s en cualquier dirección, N en la ecuación (9-48) será negativa, y el lugar geométrico del plano $\Delta(s)$ debe encerrar al origen N veces en la dirección opuesta a la de Γ_s.

Un resumen de todas las posibles combinaciones del principio del argumento se da en la tabla 9-1.

9-5-5 Trayectoria de Nyquist

Hace años cuando Nyquist se enfrentó al problema de resolver la estabilidad, que involucra determinar si la función $\Delta(s) = 1 + L(s)$ tiene ceros en el semiplano derecho del plano s, él descubrió aparentemente que el principio del argumento se podía aplicar para resolver el problema de esta-

Tabla 9-1 Resumen de todas las posibles combinaciones del principio del argumento

		Lugar geométrico del plano Δ(s)	
$N = Z - P$	Sentido del lugar geométrico en el plano s	Número de encierros del origen	Dirección de los encierros
$N > 0$	SMR	N	SMR
	SCMR	N	SMR
$N < 0$	SMR	N	SCMR
	SCMR	N	SMR
$N = 0$	SMR	0	No encerrado
	SCMR	0	No encerrado

▲ La trayectoria de Nyquist está definida para rodear al semiplano derecho del plano s por completo.

bilidad si el lugar geométrico Γ_s en el plano s se tomaba como uno que encerrara al semiplano derecho entero del plano s. Por supuesto como una alternativa Γ_s se puede escoger para encerrar al semiplano izquierdo completo del plano s. La Fig. 9-20 ilustra el lugar geométrico Γ_s con el sentido SCMR que encierra el semiplano derecho del plano s por completo. Esta trayectoria se selecciona para ser la trayectoria Γ_s en el plano s para el criterio de Nyquist, ya que en matemáticas SCMR es tradicionalmente definido para el sentido positivo. La trayectoria Γ_s mostrada en la Fig. 9-20, se define como la **trayectoria de Nyquist.** Ya que la trayectoria de Nyquist no debe pasar por ningún polo o cero de $\Delta(s)$, los pequeños semicírculos se muestran a lo largo del eje $j\omega$ en la Fig. 9-20 se emplean para indicar que la trayectoria debe

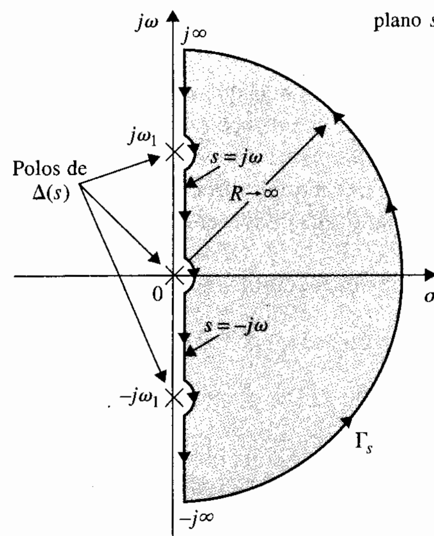


Figura 9-20 Trayectoria de Nyquist.

encerrar estos polos y ceros si caen sobre el eje $j\omega$. Es claro que si cualquier polo $\Delta(s)$ cae dentro del semiplano derecho del plano s, será encerrado por la trayectoria de Nyquist Γ_s.

9-5-6 Criterio de Nyquist y la traza de $L(s)$ o de $G(s)H(s)$

El criterio de Nyquist es una aplicación directa del principio del argumento cuando el lugar geométrico en el plano s es la trayectoria de Nyquist de la Fig. 9-20. En principio, una vez que la trayectoria de Nyquist se especifica, la estabilidad del sistema en lazo cerrado se puede determinar al graficar el lugar geométrico $\Delta(s) = 1 + L(s)$ cuando s toma valores a lo largo de la trayectoria de Nyquist, e investigar el comportamiento de la traza de $\Delta(s)$ con respecto al **punto crítico,** que en·este caso es el origen del plano $\Delta(s)$.

Ya que la función $L(s)$ generalmente se conoce.

puede ser simple construir la traza de $L(s)$ que corresponda a la trayectoria de Nyquist, y la misma conclusión sobre la estabilidad del sistema en lazo cerrado se puede obtener al observar el comportamiento en la traza de $L(s)$ con respecto al punto $(-1, j0)$en el plano $L(s)$.

Esto es porque el origen del plano $\Delta(s) = 1 + L(s)$ corresponde al punto $(-1, j0)$ en el plano $L(s)$. Por tanto el punto $(-1, j0)$ en el plano $L(s)$ se vuelve el punto crítico para determinar la estabilidad en lazo cerrado.

Para sistemas de un solo lazo, $L(s) = G(s)H(s)$, el desarrollo previo determina la estabilidad en lazo cerrado al investigar el comportamiento de la traza de $G(s)H(s)$ con respecto al punto $(-1, j0)$ del plano $G(s)H(s)$. Por tanto, la estabilidad de Nyquist es otro ejemplo de utilizar las propiedades de la función de transferencia en lazo para encontrar el comportamiento de sistemas en lazo cerrado.

Por tanto, dado un sistema de control que tiene la ecuación característica que se obtiene al igualar el polinomio numerador de $1 + L(s)$ a cero, donde $L(s)$ es la función de transferencia en lazo, la aplicación del criterio de Nyquist al problema de estabilidad involucra los siguientes pasos.

1. La trayectoria de Nyquist Γ_s se define en el plano s como se muestra en la Fig. 9-20.
2. La traza de $L(s)$ correspondiente a la trayectoria de Nyquist se construye en el plano $L(s)$.
3. El valor de N, el número de encierros del punto $(-1, j0)$ hechos por la traza de $L(s)$, se observa.
4. El criterio de Nyquist se obtiene de la ecuación (9-43).

$$N = Z - P \qquad (9\text{-}49)$$

donde:

N = número de encierros del punto $(-1, j0)$ hechos por la traza de $L(s)$.
Z = número de ceros de $1 + L(s)$ que están dentro de la trayectoria de Nyquist (es decir, el semiplano derecho del plano s).
P = número de polos de $1 + L(s)$ que están dentro de la trayectoria de Nyquist (es decir, el semiplano derecho del plano s); observe que los polos de $1 + L(s)$ son los mismos que los de $L(s)$.

Los requisitos para la estabilidad para los dos tipos de la misma definidos anteriormente se interpretan en términos de Z y P.

Para la estabilidad en lazo cerrado, Z debe ser igual a cero.
Para la estabilidad en lazo abierto, P debe ser igual a cero.

Por tanto, la condición de estabilidad de acuerdo al criterio de Nyquist se establece como:

$$N = -P \tag{9-50}$$

Esto es:

para que un sistema en lazo cerrado sea estable, la traza de L(s) debe encerrar al punto (−1, j0) un número de veces igual al número de polos de L(s) que están en el semiplano derecho del plano s, y los encierros, si los hay, deben ser hechos en dirección SMR (si Γ_s está definido en sentido SCMR).

9-6 Criterio de Nyquist para sistemas con función de transferencia de fase mínima

Primero se aplicará el criterio de Nyquist a sistemas con $L(s)$ que tienen **funciones de transferencia de fase mínima.** Las propiedades de la función de transferencia de fase mínima se escriben en el Apéndice A, y se resumen a continuación:

1. Una función de transferencia de fase mínima no tiene polos o ceros en el semiplano derecho del plano s o sobre el eje $j\omega$, incluyendo el origen.
2. Para una función de transferencia de fase mínima $L(s)$ con m ceros y n polos, excluyendo los polos en $s = 0$, cuando $s = j\omega$, y ω varía desde ∞ a 0, la variación total de fase de $L(j\omega)$ es $(n - m)\pi/2$ radianes.

3. El valor de la función de transferencia de fase mínima no puede ser cero o infinito ni en cualquier frecuencia finita distinta de cero.
4. Una función de transferencia de fase no mínima siempre tendrá un corrimiento de fase más positivo cuando ω varía desde ∞ a 0. O igualmente cierto siempre tendrá una fase más negativa cuando ω varía desde 0 hasta ∞.

▲ Una función de transferencia de fase mínima no tiene polos o ceros en el semiplano derecho del plano s o sobre el eje $j\omega$, excepto en $s = 0$.

Ya que la mayoría de las funciones de transferencia de lazo encontradas en el mundo real satisfacen la condición 1 y son de fase mínima, sería prudente investigar la aplicación del criterio de Nyquist a esta clase de sistemas. Como se verá más adelante, esto es muy simple.

Ya que $L(s)$ de fase mínima no tiene ningún polo o cero en el semiplano derecho del plano s o sobre el eje $j\omega$, excepto en $s = 0$, $P = 0$, los polos de $\Delta(s) = 1 + L(s)$ también tienen algunas propiedades. Por tanto, el criterio de Nyquist para un sistema con $L(s)$ siendo una función de transferencia de fase mínima se simplifica a:

$$N = 0 \tag{9-51}$$

Por tanto, el criterio de Nyquist se puede establecer como:

Para un sistema en lazo cerrado con función de transferencia de lazo L(s), que es de tipo de fase mínima, el sistema es estable en lazo cerrado si la traza de L(s) que corresponde a la trayectoria de Nyquist no encierra al punto crítico (−1, j0) en el plano L(s).

Más aún, si el sistema es inestable, $Z \neq 0$; N en la ecuación (9-51) podría ser un entero positivo, lo que significa que el punto crítico $(-1, j0)$ está **encerrado** N veces (correspondiente a la dirección de la trayectoria de Nyquist aquí definida). Por tanto, el criterio de Nyquist de estabilidad para sistemas con función de transferencia en lazo de fase mínima se puede simplificar a:

Para un sistema en lazo cerrado con función de transferencia de lazo L(s), que es de tipo de fase mínima, el sistema es estable en lazo cerrado si la gráfica de L(s) que corresponde a la trayectoria de Nyquist no encierra al punto (−1, j0), si el punto (−1, j0) está encerrado por la traza de Nyquist, el sistema es inestable.

▲ Para $L(s)$ que es del tipo de fase mínima, el criterio de Nyquist puede verificarse por medio de la traza del segmento de $L(j\omega)$ desde $\omega = \infty$ hasta 0.

Ya que la región que está encerrada por la trayectoria de Nyquist está definida por la región que cae a la izquierda cuando la trayectoria está recorrida en la dirección prescrita, *el criterio de Nyquist se puede simplemente verificar al graficar el segmento de $L(j\omega)$ desde $\omega = \infty$ a 0, o los puntos sobre el eje $j\omega$ positivo.* Esto simplifica el procedimiento de forma considerable, ya que la traza se puede hacer fácilmente con la computadora. El único inconveniente de este método es que la traza que corresponde al eje $j\omega$ dice sólo si el punto crítico está encerrado o no; y si lo está no dice cuantas veces. Por tanto, si el sistema se encuentra inestable, el procedimiento

de los encierros no dará información de cuántas raíces de la ecuación característica están en el semiplano derecho del plano s. Sin embargo, en la práctica esta información no es vital. Desde este punto se definirá la traza de $L(j\omega)$ *que corresponde al eje* $j\omega$ *positivo en el plano* s *como la traza de Nyquist de* $L(s)$.

9-6-1 Aplicación del criterio de Nyquist a funciones de transferencia de fase mínima que no son estrictamente propias

Tal como en el caso del lugar geométrico de las raíces, a menudo es necesario en el diseño crear una función de transferencia de lazo equivalente $L_{eq}(s)$ para que el parámetro K aparezca como factor multiplicativo en $L_{eq}(s)$ [es decir, $L(s) = KL_{eq}(s)$]. Ya que la función de transferencia de lazo equivalente a ninguna entidad física no puede tener más polos que ceros, y la función de transferencia no es estrictamente propia como se define en el Cap. 3. En principio, no hay dificultad en construir la traza de Nyquist de una función que no es estrictamente propia, y el criterio de Nyquist se puede aplicar para estudios de estabilidad sin ninguna complicación. Sin embargo, algunos programas de computadora no están preparados para manejar funciones impropias y puede ser necesario reformular la ecuación para hacerla compatible con el programa de computadora. Para considerar este caso, considere que la ecuación característica de un sistema con un parámetro variable K está dada por:

$$1 + KL_{eq}(s) = 0 \tag{9-52}$$

Si $L_{eq}(s)$ no tiene más polos que ceros, se puede escribir esta última ecuación como:

$$1 + \frac{1}{KL_{eq}(s)} = 0 \tag{9-53}$$

al dividir ambos miembros de la ecuación entra $KL_{eq}(s)$. Ahora se puede graficar la traza de Nyquist de $1/L_{eq}(s)$, y el punto crítico aún es $(-1, j0)$ para $K > 0$. El parámetro variable sobre la traza de Nyquist ahora es $1/K$. Por tanto, con ajustes menores el criterio de Nyquist se puede aún aplicar.

9-7 Relación entre el lugar geométrico de las raíces y la traza de Nyquist

Ya que tanto el análisis del lugar geométrico de las raíces y el criterio de Nyquist tratan con la ubicación de las raíces de la ecuación característica de un sistema lineal SISO, los dos análisis están muy relacionados. El explorar la relación entre los dos métodos enriquecerá el entendi-

miento de ambos métodos. Dada la ecuación característica:

$$1 + L(s) = 1 + KG_1(s)H_1(s) = 0 \tag{9-54}$$

La traza de Nyquist de $L(s)$ en el plano $L(s)$ es el mapeo de la trayectoria de Nyquist en el plano s. Ya que el lugar geométrico de las raíces de la ecuación (9-54) debe satisfacer las condiciones:

$$\angle KG_1(s)H_1(s) = (2i + 1)\pi \qquad K \geq 0 \tag{9-55}$$

$$\angle KG_1(s)H_1(s) = 2i\pi \qquad K \leq 0 \tag{9-56}$$

para $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, el lugar geométrico de las raíces sólo representa un mapeo del eje real del plano $L(s)$ o el plano $G(s)H(s)$ sobre el plano s. De hecho, para el RL, $K \geq 0$, los puntos mapeados están sobre el eje real negativo del plano $L(s)$ y para CRL, $K \leq 0$, los puntos mapeados están sobre el eje real positivo del plano $L(s)$. Anteriormente se mencionó que el mapeo desde el plano s al plano de la función para una función racional es univaluado, pero el proceso inverso es multivaluado. Como ilustración simple, la traza de Nyquist de una función de transferencia de tercer orden de tipo 1 $G(s)H(s)$ que corresponde a los puntos sobre el eje $j\omega$ del plano s se muestra en la Fig. 9-21. El lugar geométrico de las raíces para el mismo sistema se muestra en la Fig. 9-22, como mapeo del eje real del plano $G(s)H(s)$ en el plano s. Observe que en este caso cada punto del plano $G(s)H(s)$ corresponde a tres puntos en el plano s. El punto $(-1, j0)$ del plano $G(s)H(s)$ corresponde a dos puntos donde el lugar geométrico de las raíces intersecta con el eje $j\omega$ y un punto sobre el eje real.

La traza de Nyquist y el lugar geométrico de las raíces representan el mapeo de una porción limitada de un dominio al otro. En general, sería útil considerar el mapeo de otros

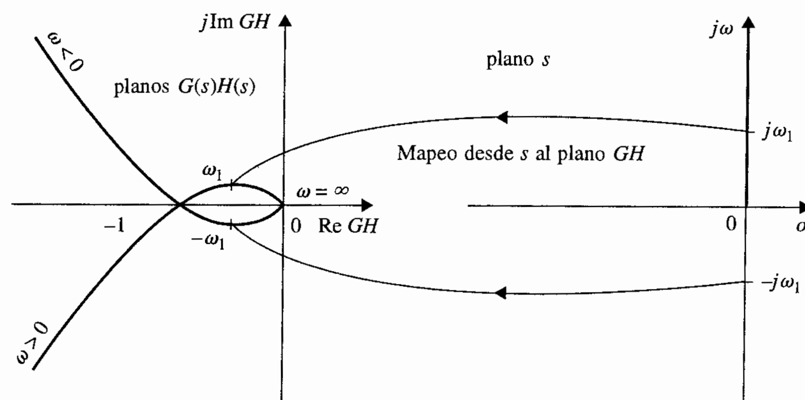


Figura 9-21 Traza polar de $G(s)H(s) = K/[s(s + a)(s + b)]$ interpretado como un mapeo del eje $j\omega$ del plano s al plano $G(s)H(s)$.

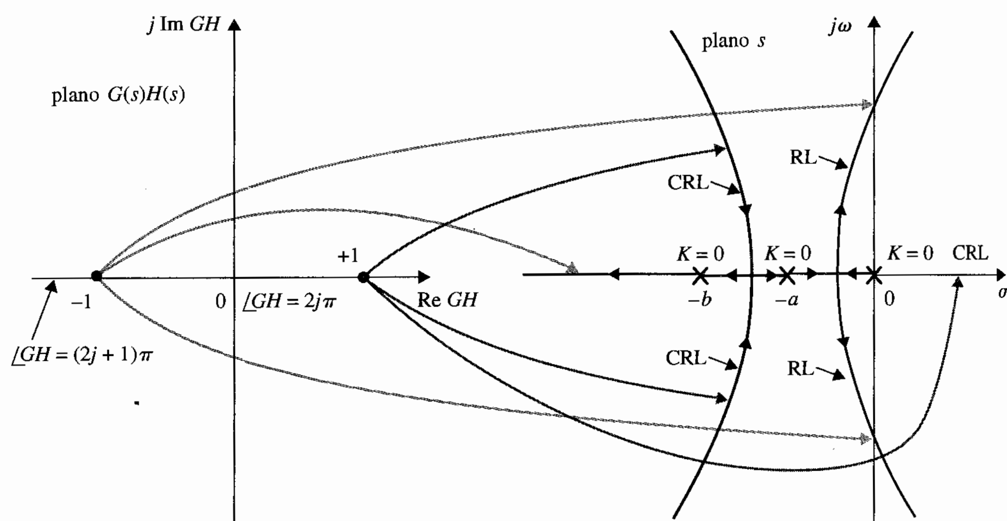


Figura 9-22 Diagrama del lugar geométrico de las raíces de $G(s)H(s) = K/[s(s + a)(s + b)]$ interpretado como un mapeo del eje real del plano $G(s)H(s)$ al plano s.

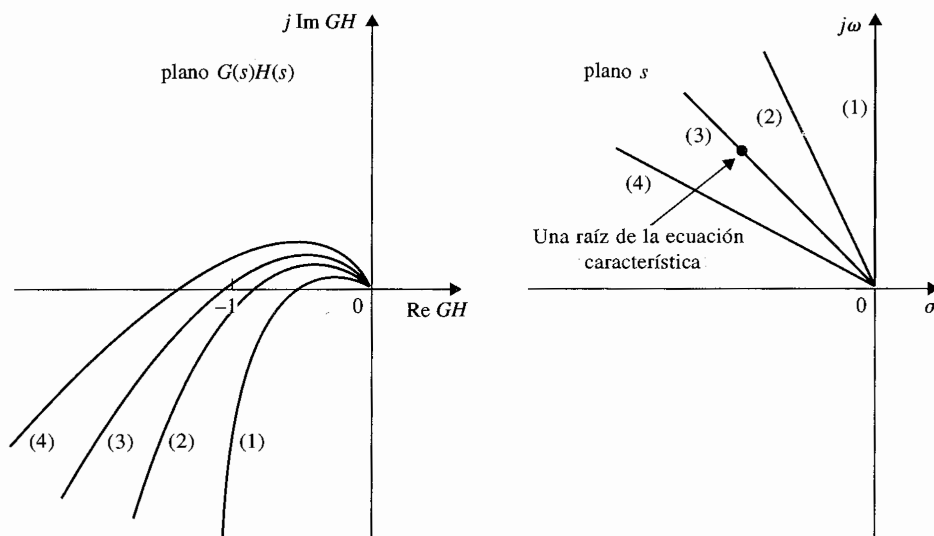


Figura 9-23 Trazas de $G(s)H(s)$ que corresponden a las líneas de la relación de amortiguamiento constante en el plano s.

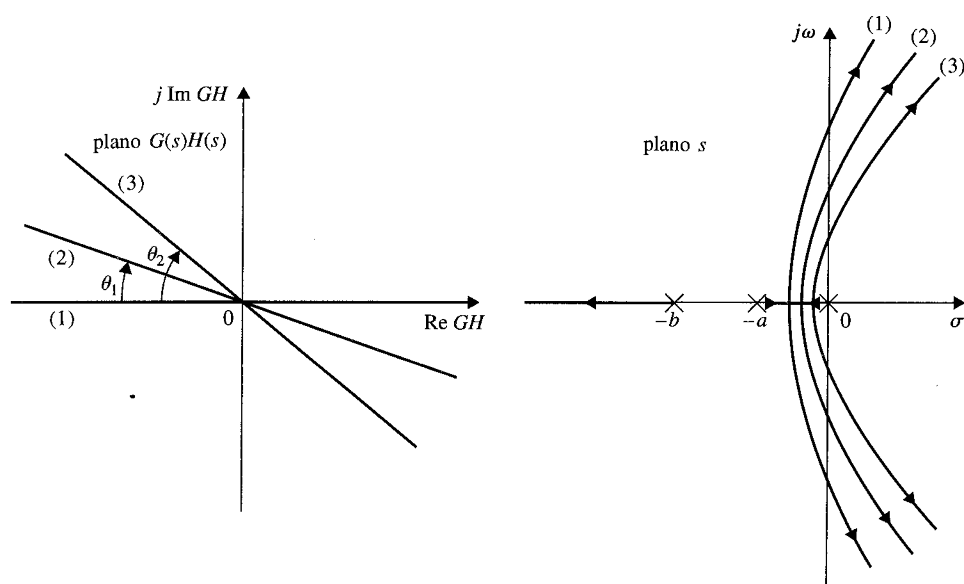


Figura 9-24 Lugar geométrico de las raíces que corresponde a los lugares geométricos de ángulos de fase diferentes en el plano $G(s)H(s)$. (El CRL no se muestra.)

puntos que aquellos sobre el eje $j\omega$ del plano s y sobre el eje real del plano $G(s)H(s)$. Por ejemplo, se puede usar el mapeo de líneas de factor de amortiguamiento relativo constante en el plano s sobre el plano $G(s)H(s)$ para propósitos de determinar la estabilidad relativa del sistema en lazo cerrado. La Fig. 9-23 ilustra las trazas de $G(s)H(s)$ que corresponden a diferentes líneas de factor de amortiguamiento relativo constante en el plano s. Como se muestra por la curva (3) en la Fig. 9-23, cuando la curva de $G(s)H(s)$ pasa a través del punto $(-1, j0)$, esto significa que la ecuación (9-54) se satisface y la trayectoria correspondiente al plano s pasa a través de la raíz de la ecuación característica. En forma similar, se puede construir el lugar geométrico de las raíces que corresponde a líneas rectas rotadas en varios ángulos desde el eje real en el plano $G(s)H(s)$ como se muestra en la Fig. 9-24. Observe que este lugar geométrico de las raíces ahora satisface la condición de:

$$\angle KG_1(s)H_1(s) = (2j + i)\pi - \theta \qquad K \geq 0 \tag{9-57}$$

o el lugar geométrico de las raíces de la Fig. 9-24 debe satisfacer la ecuación:

$$1 + G(s)H(s)e^{j\theta} = 0 \tag{9-58}$$

para varios valores de θ indicados.

9-8 Ejemplo ilustrativo: Criterio de Nyquist para funciones de transferencia de fase mínima

Los siguientes ejemplos sirven para ilustrar la aplicación del criterio de Nyquist a sistemas con función de transferencia de lazo de fase mínima.

Ejemplo 9-1

Considere que un sistema de control con realimentación de un solo lazo tiene la función de transferencia de lazo:

$$L(s) = G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+10)} \tag{9-59}$$

que es del tipo de fase mínima. La estabilidad del sistema en lazo cerrado se puede determinar al investigar si la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ desde $\omega = \infty$ hasta 0 encierra al punto $(-1, j0)$. La traza de Nyquist de $L(j\omega)$ se puede dibujar usando un programa de computadora tal como **plrplot** de **CSAD, freqrp** de **ACSP,** o **Nyquist** del **Program CC.** La Fig. 9-25 muestra la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ desde $\omega = \infty$ hasta 0. Sin embargo, si sólo se está interesado en ver si el punto crítico está encerrado o no, en general no es necesario producir una traza de Nyquist exacta, ya que el área que está encerrada por la traza de Nyquist está a la izquierda de la curva recorrida en la dirección que corresponda desde $\omega = \infty$ hasta 0 sobre la trayectoria de Nyquist, todo lo que se necesita para determinar la estabilidad sin contar el punto o puntos en el cual la traza de Nyquist cruza el eje real en el plano $L(j\omega)$. En muchos casos, la información de la intersección con el eje real y las propiedades de $L(j\omega)$ en $\omega = \infty$ y $\omega = 0$ permiten bosquejar el diagrama de Nyquist sin en realidad dibujarlo. Se pueden utilizar los pasos siguientes para tener un bosquejo de la traza de Nyquist de $L(j\omega)$.

1. Sustituya $s = j\omega$ en $L(s)$. Al hacer $s = j\omega$ en la ecuación (9-59), se tiene:

$$L(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+2)(j\omega+10)} \tag{9-60}$$

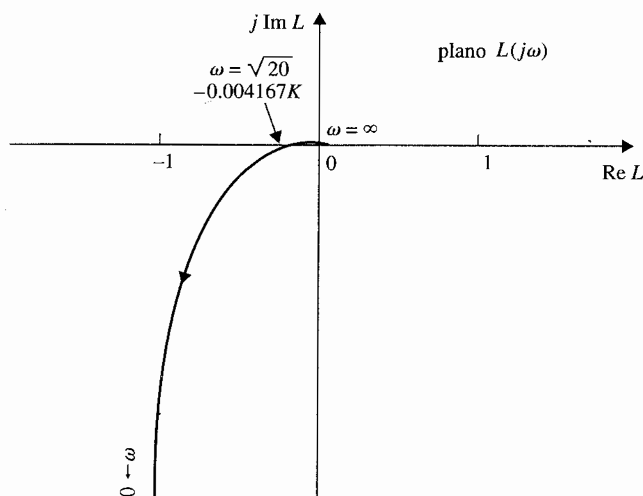


Figura 9-25 Traza de Nyquist de $L(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+10)}$ para $\omega = \infty$ hasta $\omega = 0$.

2. Sustituya $\omega = 0$ en la ecuación (9-60), se tiene la propiedad de frecuencia cero de $L(j\omega)$.

$$L(j0) = \infty\angle -90^\circ \tag{9-61}$$

3. Sustituya $\omega = \infty$ en la ecuación (9-60), la propiedad de la traza de Nyquist de frecuencia infinita se establece.

$$L(j\infty) = 0\angle -270^\circ \tag{9-62}$$

Aparentemente estos resultados se verifican por la traza mostrada en la Fig. 9-25.

4. Para encontrar la intersección o intersecciones de la traza de Nyquist con el eje real, si existen, se racionaliza $L(j\omega)$al multiplicar el numerador y el denominador de la ecuación por el complejo conjugado del denominador. Por tanto, la ecuación (9-60) se convierte:

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= \frac{K[-12\omega^2 - j\omega(20-\omega^2)]}{[-12\omega^2 + j\omega(20-\omega^2)][-12\omega^2 - j\omega(20-\omega^2)]} \\ &= \frac{K[-12\omega^2 - j\omega(20-\omega^2)]}{144\omega^4 + \omega^2(20-\omega^2)^2} \\ &= \frac{K[-12\omega - j(20-\omega^2)]}{\omega[144\omega^2 + (20-\omega^2)]} \end{aligned} \tag{9-63}$$

5. Para encontrar las intersecciones posibles sobre el eje real, se hace que la parte imaginaria de $L(j\omega)$ sea igual a cero. El resultado es:

$$\mathrm{Im}[L(j\omega)] = \frac{-K(20-\omega^2)}{\omega[144\omega^2 + (20-\omega^2)]} = 0 \tag{9-64}$$

Las soluciones en esta última ecuación son $\omega = \infty$, que se sabe que es una solución de $L(j\omega) = 0$, y:

$$\omega = \pm\sqrt{20} \qquad \text{rad/s} \tag{9-65}$$

Ya que ω es positiva, la respuesta correcta es $\omega = \sqrt{20}$ rad/s. Al sustituir esta frecuencia en la ecuación (9-63), se tiene la intersección del eje real del plano $L(j\omega)$ en:

$$L(j\sqrt{20}) = -\frac{12K}{2880} = -0.004167K \tag{9-66}$$

Los últimos cinco pasos llevan a un bosquejo adecuado de la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ casi para trazarla. Por tanto se observa que si K es menor que 240, la intersección del lugar geométrico de $L(j\omega)$ con el eje real, estaría a la derecha del punto crítico $(-1, j0)$; éste último no estaría encerrado y el sistema es estable. Si $K = 240$, la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ interceptaría al eje real en el punto -1 y el sistema sería marginalmente estable. En este caso la ecuación característica tendría dos raíces sobre el eje $j\omega$ en el plano s en $s = \pm j\sqrt{20}$. Si la ganancia se incrementa a un valor más allá de 240, la intersección estaría a la izquierda del punto -1 sobre el eje real y el sistema sería inestable. Cuando K es negativo se puede utilizar el punto $(+1, j0)$ en el plano $L(j\omega)$ como el punto crítico. La Fig. 9-25 muestra que bajo esta condición

el punto +1 sobre el eje real estaría encerrado para todo valor negativo de K, y el sistema siempre sería inestable. Por tanto, el criterio de Nyquist lleva a la conclusión de que el sistema es estable en el rango de $0 < K < 240$. Observe que la aplicación del criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz lleva al mismo resultado. La Fig. 9-26 muestra el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica del sistema descrito por la función de transferencia de la ecuación (9-59). La correlación entre el criterio de Nyquist y el lugar geométrico de las raíces fácilmente se observa. ▲

Ejemplo 9-2

Considere la ecuación característica:

$$Ks^3 + (2K + 1)s^2 + (2K + 5)s + 1 = 0 \tag{9-67}$$

Al dividir ambos miembros de la ecuación (9-67) entre los términos que no contienen a K se tiene:

$$1 + KL_{eq}(s) = 1 + \frac{Ks(s^2 + 2s + 2)}{s^2 + 5s + 1} = 0 \tag{9-68}$$

Por tanto:

$$L_{eq}(s) = \frac{s(s^2 + 2s + 2)}{s^2 + 5s + 1} \tag{9-69}$$

que es una función impropia. Se puede tener la información al bosquejar manualmente la traza de Nyquist de $L_{eq}(s)$para determinar la estabilidad del sistema. Al hacer que $s = j\omega$ en la ecuación (9-69), se tiene:

$$L_{eq}(j\omega) = \frac{K\omega[-2\omega + j(2 - \omega^2)]}{(1 - \omega^2) + 5j\omega} \tag{9-70}$$

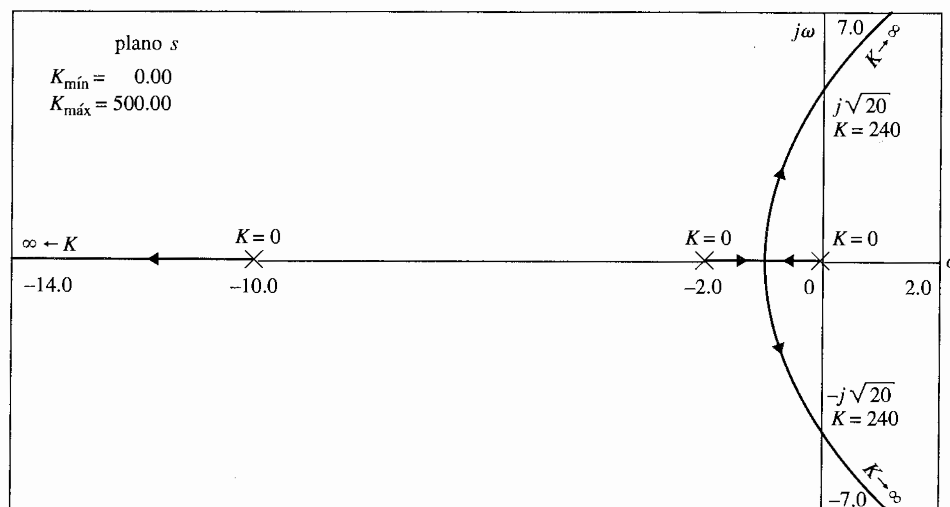


Figura 9-26 RL de $L(s) = \dfrac{K}{s(s+2)(s+10)}$.

De la ecuación (9-70) se obtienen los puntos finales de la traza de Nyquist:

$$L_{eq}(j0) = 0\angle 90° \quad \text{y} \quad L_{eq}(j\infty) = \infty\angle 90° \tag{9-71}$$

Al racionalizar la ecuación (9-70) mediante la multiplicación del numerador y denominador por el complejo conjugado del denominador, se tiene:

$$L_{eq}(j\omega) = K\frac{\omega^2[5(2-\omega^2) - 2(1-\omega^2)] + j\omega[10\omega^2 + (2-\omega^2)(1-\omega^2)]}{(1-\omega^2)^2 + 25\omega^2} \tag{9-72}$$

Para encontrar las intersecciones posibles de la traza de $L_{eq}(j\omega)$ sobre el eje real, se hace la parte imaginaria de la ecuación (9-72) igual a cero. Se obtiene $\omega = 0$, y

$$\omega^4 + 7\omega^2 + 2 = 0 \tag{9-73}$$

Se puede mostrar que todas las cuatro raíces de la ecuación (9-73) son imaginarias, lo que indica que el lugar geométrico de $L_{eq}(j\omega)$ intercepta al eje real sólo en $\omega = 0$. Al emplear la información dada en la ecuación (9-71) y el hecho de que no hay intersección con el eje real mas que en $\omega = 0$, la traza de Nyquist de $L_{eq}(j\omega)$ se bosqueja como se muestra en la Fig. 9-27. Observe que esta traza está bosquejada sin ningún detalle calculado sobre $L_{eq}(j\omega)$, y de hecho puede ser inexacto. Sin embargo, este bosquejo es adecuado para determinar la estabilidad del sistema, ya que la traza de Nyquist de la Fig. 9-27 no encierra al punto $(-1, j0)$ cuando ω varía desde ∞ a 0, el sistema es estable para todo valor positivo de K.

La Fig. 9-28 muestra el diagrama de Nyquist de $1/L_{eq}(s)$, donde:

$$\frac{1}{L_{eq}(j\omega)} = \frac{(1-\omega^2) + 5j\omega}{K[-2\omega^2 + j\omega(2-\omega^2)]} \tag{9-74}$$

para $\omega = \infty$ hasta 0. La traza otra vez no encierra al punto $(-1, j0)$, y el sistema es de nuevo estable para todo valor positivo de K al interpretar la traza de Nyquist de $1/L_{eq}(j\omega)$.

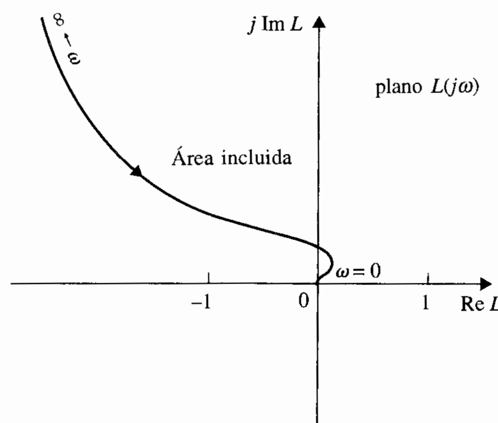


Figura 9-27 Traza de Nyquist de $L(j\omega)$ para:

$$L(s) = \frac{K(s^3 + 2s^2 + 2s)}{s^2 + 5s + 1} \qquad K = 1$$

desde $\omega = \infty$ hasta $\omega = 0$.

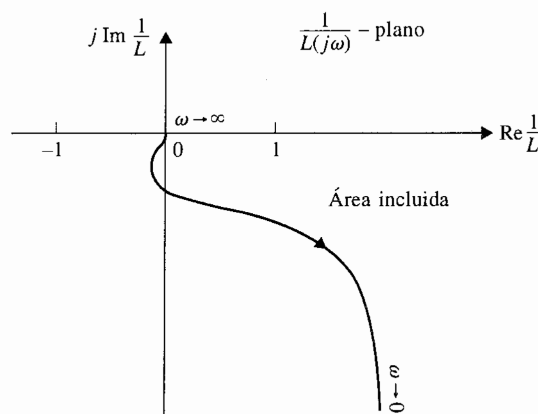


Figura 9-28 Traza de Nyquist de $1/L(j\omega)$ para:

$$L(s) = \frac{K(s^3 + 2s^2 + 2s)}{s^2 + 5s + 1} \qquad K = 1$$

para $\omega = \infty$ hasta $\omega = 0$.

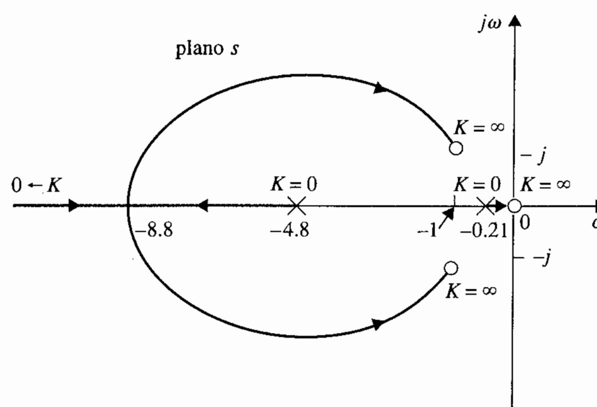


Figura 9-29 RL de $L(s) = \dfrac{Ks(s^2 + 2s + 2)}{s^2 + 5s + 1}$.

La Fig. 9-29 muestra el RL de la ecuación (9-67) para $K > 0$, empleando la configuración de polos y ceros de $L_{eq}(s)$ de la ecuación (9-69). Ya que el RL permanece en el semiplano izquierdo del plano s para todo valor positivo de K, el sistema es estable para $0 < K < \infty$, que concuerda con la conclusión obtenida con el criterio de Nyquist. ▲

9-9 Criterio general de Nyquist para funciones de transferencia de fase no mínima y mínima

El criterio original de Nyquist presentado en la Sec. 9-8 es difícil de aplicar cuando la función de transferencia es del tipo de fase no mínima. Se mostrará que si la función de transferencia de lazo es de tipo de fase no mínima, entonces el dibujar la traza de Nyquist

de $L(s)$ sólo para $s = j\omega$ hasta $s = j0$ y que no encierre el punto $(-1, j0)$ en el plano $L(s)$, es sólo una condición necesaria pero no suficiente para la estabilidad en lazo cerrado. Para un sistema con función de transferencia de lazo de fase no mínima $L(s)$, el criterio original de Nyquist requiere que se haga de la traza de $L(s)$ que corresponda a la trayectoria de Nyquist completa de la Fig. 9-20. Si la función de transferencia de lazo $L(s)$ tiene polos o ceros sobre el eje $j\omega$, la trayectoria de Nyquist de la Fig. 9-20 debe tener pequeños semicírculos alrededor de ellos sobre el eje $j\omega$. Esto añade aún más complejidad a la construcción de la traza de $L(s)$. Los programas de computadora tal como el **freqrp** de **ACSP, plrplot** de **CSAD,** y **Nyquist** del **Programa CC,** se pueden usar para construir las trazas de funciones solamente que correspondan al eje $j\omega$ positivo del plano s. El resto de las trazas de Nyquist que corresponden a los pequeños semicírculos y grandes semicírculos sobre la trayectoria de Nyquist tienen que hacerse en forma manual. Con las facilidades de cómputo modernas y de software, el analista no debe perder su tiempo con gráficas manuales. Aún más, se introdujo *un filtro de Nyquist simplificado que se puede aplicar tanto a funciones de transferencia de fase mínima como no mínima, al emplear sólo la parte positiva del eje* $j\omega$ *de la trayectoria de Nyquist y después observar el comportamiento de la traza de Nyquist con referencia al punto* $(-1, j0)$.

Yeung y Lai [6,7] introdujeron una versión general simplificada del criterio de Nyquist que permite determinar la estabilidad de sistemas en lazo cerrado con funciones de transferencia de fase mínima y no mínima al emplear sólo la parte positiva del eje $j\omega$ de la trayectoria de Nyquist. Sin embargo, si el sistema es de fase mínima, la prueba de si el punto $(-1, j0)$ está encerrado es muy simple de aplicar. Se mostrará que para sistemas de fase no mínima, si el punto $(-1, j0)$ está encerrado, el sistema es inestable. Sin embargo, si el punto $(-1, j0)$ no está encerrado, una condición de ángulo adicional se debe satisfacer por la traza de Nyquist de $L(s)$ para que el sistema sea estable.

Considere las dos trayectorias de Nyquist mostradas en la Fig. 9-30. Es claro que la trayectoria de Nyquist Γ_{s1} en la Fig. 9-30(a) es la original mostrada en la Fig. 9-20, mientras que la trayectoria Γ_{s2} en la Fig. 9-30(b) encierra no sólo el semiplano derecho del plano s, sino también polos y ceros de $L(s)$ sobre el eje $j\omega$, si es que existe. Se definirán las siguientes cantidades.

Z = número de ceros de $1 + L(s)$ que están en el semiplano derecho del plano s.

P = número de polos de $L(s)$ o de $1 + L(s)$ que están en el semiplano derecho del plano s.

P_ω = número de polos de $L(s)$ o de $1 + L(s)$ que están sobre el eje $j\omega$, incluyendo los del origen.

N_1 = número de veces que el punto $(-1, j0)$ del plano $L(s)$ está encerrado por la traza de Nyquist de $L(s)$ correspondiente a Γ_{s1}.

N_2 = número de veces que el punto $(-1, j0)$ del plano $L(s)$ está encerrado por la traza de Nyquist de $L(s)$ que corresponde a Γ_{s2}.

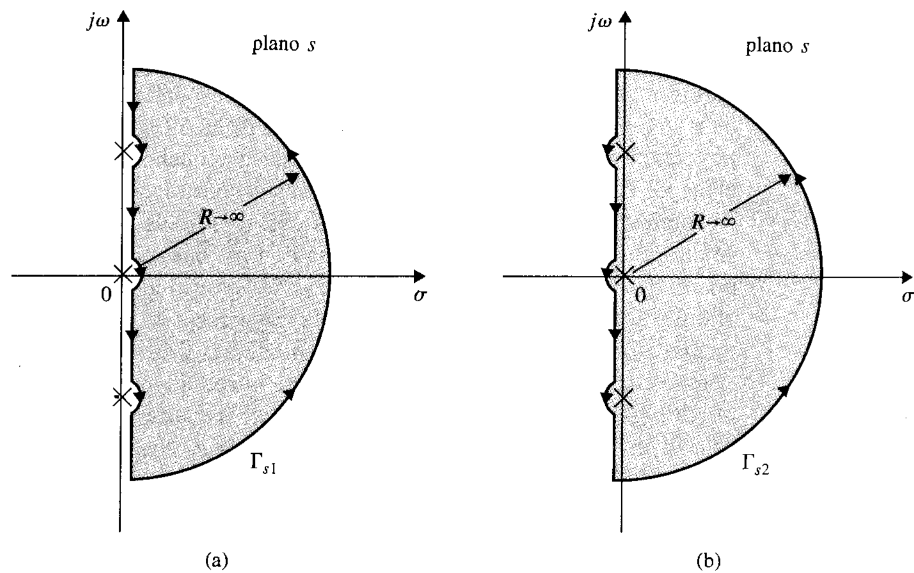


Figura 9-30 (a) Trayectoria de Nyquist. (b) Trayectoria de Nyquist alternativa. (Fuente: K. S. Yeung, "A Reformulation of Nyquist's Criterion," *IEEE Trans, Educ.*, Vol. E-28 (© 1985, IEEE.)

Entonces, con referencia a las dos trayectorias de Nyquist de la Fig. 9-30 y de acuerdo al criterio de Nyquist:

$$N_1 = Z - P \tag{9-75}$$

y:

$$N_2 = Z - P - P_\omega \tag{9-76}$$

Φ_1 y Φ_2 representan los ángulos netos recorridos por la traza de Nyquist de $L(s)$ con respecto al punto $(-1, j0)$, que corresponde a Γ_{s1} y Γ_{s2}, respectivamente. Entonces:

$$\Phi_1 = N_1 \times 360° = (Z - P)360° \tag{9-77}$$

$$\Phi_2 = N_2 \times 360° = (Z - P - P_\omega)360° \tag{9-78}$$

Se considera que cada trayectoria de Nyquist Γ_{s1} y Γ_{s2} está compuesta de tres porciones:

1. La porción desde $s = -j\infty$ hasta $+j\infty$ a lo largo del semicírculo con radio infinito.

2. La porción a lo largo del eje $j\omega$, excluyendo los pequeños semicírculos.
3. Todos los pequeños semicírculos sobre el eje $j\omega$.

Ya que las trayectorias de Nyquist en la Fig. 9-30 son simétricas con respecto al eje real en el plano s, los ángulos recorridos por el diagrama de Nyquist son idénticos para valores positivos y negativos de ω. Por tanto Φ_1 y Φ_2 se escriben como:

$$\Phi_1 = 2\Phi_{11} + \Phi_{12} + \Phi_{13} \tag{9-79}$$
$$\Phi_2 = 2\Phi_{11} - \Phi_{12} + \Phi_{13} \tag{9-80}$$

donde:

Φ_{11} = ángulo recorrido por la traza de Nyquist de $L(s)$ con respecto al punto $(-1, j0)$ correspondiente al eje $j\omega$ positivo o al eje negativo $j\omega$ del plano s, excluyendo los pequeños semicírculos.

Φ_{12} = ángulo recorrido por la traza de Nyquist de $L(s)$ con respecto al punto $(-1, j0)$ correspondiente a los pequeños semicírculos sobre el eje $j\omega$ de Γ_{s1} [ya que las direcciones de Γ_{s2} de los pequeños semicírculos son opuestos a los de Γ_{s1}, el signo de Φ_{12} en la ecuación (9-79) es negativo].

Φ_{13} = ángulo recorrido por la traza de Nyquist de $L(s)$ con respecto al punto $(-1, j0)$ correspondiente al semicírculo con radio infinito sobre las trayectorias de Nyquist.

Para una función de transferencia $L(s)$ que no tiene más ceros que polos, la traza de Nyquist de $L(s)$ que corresponde al semicírculo finito debe ser un punto sobre el eje real o una trayectoria alrededor del origen del plano $L(s)$. Por tanto, el ángulo Φ_{13} recorrido por el fasor dibujado desde el punto $(-1, j0)$ a la traza de Nyquist a lo largo del semicírculo con radio infinito es siempre cero.

Ahora, al adicionar la ecuación (9-79) a la ecuación (9-80) y al emplear las ecuaciones (9-77) y (9-78), se tiene:

$$\begin{aligned}\Phi_1 + \Phi_2 &= 4\Phi_{11} \\ &= (2Z - 2P - P_\omega)360^\circ\end{aligned} \tag{9-81}$$

Al resolver para Φ_{11} se tiene:

$$\Phi_{11} = (Z - P - 0.5P_\omega)180^\circ \tag{9-82}$$

La ecuación establece:

El ángulo total recorrido por el fasor dibujado del punto $(-1, j0)$ a la traza de Nyquist de $L(s)$ que corresponde a la porción del eje $j\omega$ positivo del plano s, excluyendo los pequeños

semicírculos, si existen,
= [el número de ceros de $1 + L(s)$ en el semiplano derecho del plano s.
– el número de polos de $L(s)$ en el semiplano derecho del plano s
– 0.5 (el número de polos de $L(s)$ sobre el eje $j\omega$)]180° (9-83)

▲ En general, el criterio de Nyquist puede llevarse a cabo elaborando la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ que corresponde a $\omega = \infty$ hasta $\omega = 0$.

Por tanto, *el criterio de estabilidad de Nyquist se puede llevar a cabo sólo mediante la construcción de la traza de Nyquist que corresponde a la porción desde $s = j\infty$ hasta $s = 0$ de la trayectoria de Nyquist.* Aún más, si el sistema en lazo cerrado es inestable, al conocer los valores de Φ_{11}, P_ω, y P, la ecuación (9-82) da el número de raíces de la ecuación característica que están en el semiplano derecho del plano s.

Para que el sistema en lazo cerrado sea estable, Z debe ser igual a cero. Por tanto, el criterio de Nyquist para la estabilidad del sistema en lazo cerrado dado es:

▲ En ángulo Φ_{11}, es una **variación de ángulo,** de tal forma que Φ_{11} = –270° no es lo mismo que Φ_{11} = 90°.

$$\Phi_{11} = -(0.5P_\omega + P)180^\circ \qquad (9\text{-}84)$$

Ya que P_ω y P no pueden ser negativas, la ecuación (9-84) indica:

Si la fase recorrida por la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ cuando ω varía desde ∞ hasta 0, Φ_{11} es positiva con respecto al punto $(-1, j0)$, el sistema en lazo cerrado es inestable.

Sin embargo, si Φ_{11} es negativa, aún satisface la ecuación (9-83) para que el sistema sea estable.

Con referencia a la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ y al punto $(-1, j0)$, se observa que cuando la variación de ángulo Φ_{11} es positiva, corresponde a que el punto $(-1, j0)$ esté encerrado -por tanto la condición de que la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ no encierre al punto $(-1, j0)$ es una condición necesaria para la estabilidad del sistema en lazo cerrado para sistemas de fase no mínima. Sin embargo, si el punto $(-1, j0)$ no está encerrado por la traza de Nyquist de $L(j\omega)$, para que el sistema de fase no mínima sea estable en lazo cerrado, la variación de ángulo Φ_{11} aún debe satisfacer la ecuación (9-83).

9-9-1 Sistema con función de transferencia de lazo de fase mínima

Si $L(s)$ es de fase mínima, $P = 0$ y P_ω denota el número de polos de $L(s)$ que están en el origen; la ecuación (9-82) se convierte:

$$\Phi_{11} = (Z - 0.5P_\omega)180^\circ \qquad (9\text{-}85)$$

Para la estabilidad en lazo cerrado, $Z = 0$; la ecuación (9-85) se convierte:

$$\Phi_{11} = -P_\omega \times 90^\circ \qquad (9\text{-}86)$$

Ya que P_ω denota el número de polos $L(s)$ que están en el origen, se puede ver fácilmente que si el punto $(-1, j0)$ no está encerrado por la trayectoria de Nyquist de $L(s)$, Φ_{11} siempre estará dado por la ecuación (9-86). Por tanto, cuando $L(s)$ es de tipo de fase mínima, la condición de que el punto $(-1, j0)$ no esté encerrado por la traza de Nyquist es una condición necesaria y suficiente para la estabilidad en lazo cerrado.

9-9-2 Sistemas con función de transferencia de lazo impropias

La ecuación (9-82) se obtuvo con base en la condición de que $\Phi_{13} = 0$, que es cierta sólo si $L(s)$ es estrictamente propia, esto es, si tiene más polos que ceros. Para funciones de transferencia impropias, se puede emplear otra vez el método discutido en la Sec. 9-6 para graficar la traza de Nyquist de $1/L(s)$.

9-10 Ejemplos Ilustrativos: Criterio general de Nyquist para funciones de transferencia de fase no mínima y mínima

En el siguiente ejemplo se muestra que la traza de Nyquist de una función de transferencia de fase no mínima que no encierra al punto $(-1, j0)$ es inestable.

Ejemplo 9-3

Considere la función de transferencia de lazo de un sistema de control como:

$$L(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s(s^2 - 6s + 5)} \tag{9-87}$$

Ya que $L(s)$ tiene un polo en el origen y dos polos en el semiplano derecho del plano s, $P_\omega = 1$ y $P = 2$. De la ecuación (9-84) el sistema en lazo cerrado es estable si la condición siguiente se satisface:

$$\Phi_{11} = -(0.5P_\omega + P)180° = -450° \tag{9-88}$$

La traza de Nyquist de $L(j\omega)$ para $\omega = \infty$ hasta $\omega = 0$ se grafica con **prlplot** de **CSAD** como se muestra en la Fig. 9-31. Es claro en este caso que el punto $(-1, j0)$ no está encerrado por la traza de Nyquist. Sin embargo, ya que Φ_{11} es –90°, y no –450° el sistema es inestable. Al substituir $\Phi_{11} = 90°$ en la ecuación (9-82) y resolviendo para Z, se tiene $Z = 2$, lo que significa que hay dos polos en lazo cerrado en el semiplano derecho del plano s. ▲

Ejemplo 9-4

Considere el sistema descrito en el ejemplo 9-1. La función de transferencia de lazo del sistema $L(s)$ está dada en la ecuación (9-59). La traza de Nyquist de $L(j\omega)$ se muestra en la Fig. 9-25. Se muestra en el ejemplo 9-1 que para la estabilidad en lazo cerrado, el punto $(-1, j0)$ en el plano $L(j\omega)$ debe estar a la izquierda de la intersección de la traza de Nyquist con el eje real.

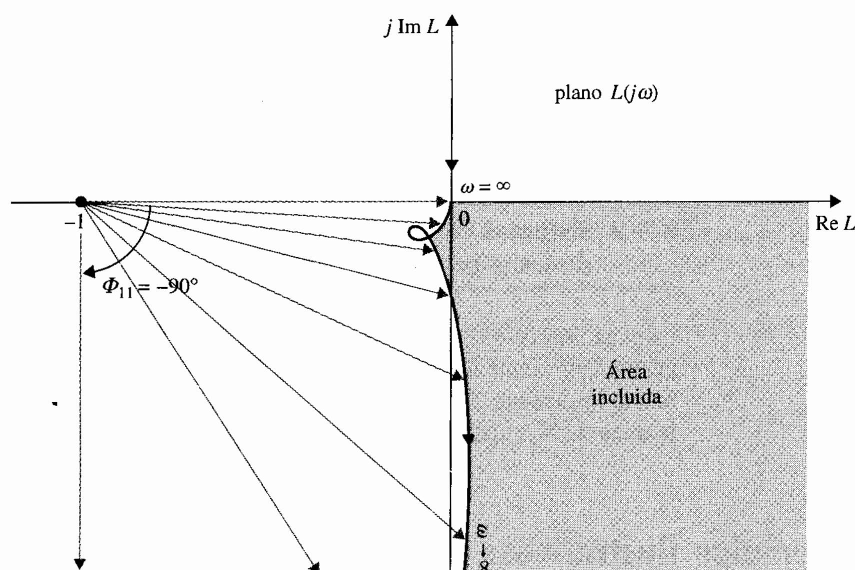


Figura 9-31 Traza de Nyquist de $L(s) = \dfrac{s^2 - s + 1}{s(s^2 - 6s + 5)}$.

Ya que $L(s)$ es del tipo de fase mínima, $P = 0$ y tiene un polo en el origen; por tanto, $P_\omega = 1$. Al sustituir estas cantidades en la ecuación (9-85) se tiene:

$$\Phi_{11} = (Z - 0.5)180° \tag{9-89}$$

Para la estabilidad en lazo cerrado, Z debe ser igual a cero; por tanto, la última ecuación da $\Phi_{11} = -90°$. Esto significa que el fasor dibujado desde $(-1, j0)$ a la traza de Nyquist, desde $\omega = \infty$ hasta $\omega = 0$, debe ser igual a −90° o 90° en la dirección SMR. La Fig. 9-32(a) muestra que si el punto $(-1, j0)$ está a la izquierda de la intersección $L(j\omega)$ con el eje real, Φ_{11} es −90°. Por otro lado si el punto $(-1, j0)$ está a la derecha de la intersección, entonces Φ_{11} es +270°, o, se observa más fácilmente que el punto crítico está encerrado, y el sistema sería inestable. Al sustituir $\Phi_{11} = 270°$ en la ecuación (9-89) se tiene $Z = 2$, lo que significa que la ecuación característica tiene dos raíces en el semiplano derecho del plano s. Por tanto, para sistemas con funciones de transferencia de lazo de fase mínima, aunque el criterio de Nyquist con la prueba de "encierro" es fácil de observar, cuando el sistema es inestable no indica cuántas raíces de la ecuación característica están en el semiplano derecho; el criterio general de Nyquist sí lo indica. ▲

Ejemplo 9-5

Considere el sistema de control que tiene la función de transferencia de lazo:

$$L(s) = \frac{K(s - 1)}{s(s + 1)} \tag{9-90}$$

De la ecuación (9-90) se observa que $P_\omega = 1$, y $P = 0$. La función $L(s)$ es del tipo de fase no mínima, ya que tiene un cero en $s = 1$. Por tanto el criterio de Nyquist sobre los encierros no se puede emplear

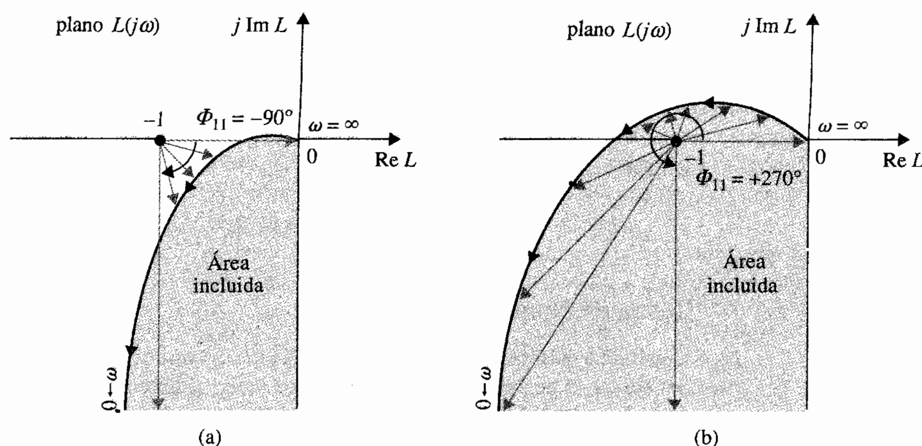


Figura 9-32 Traza de Nyquist de $L(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+10)}$.
(a) $K < 240$ (b) $K > 240$.

por completo en este caso. De la ecuación (9-84), el requerimiento para la estabilidad en lazo cerrado es:

$$\Phi_{11} = -(0.5P_\omega + P)180° = -90° \quad (9\text{-}91)$$

Por tanto, el criterio de estabilidad requiere que el fasor dibujado desde el punto (–1, $j0$) a la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ debe recorrer –90° cuando ω varía desde ∞ a 0.

Para bosquejar la traza de Nyquist de $L(s)$ que corresponda a la porción positiva del eje $j\omega$ en el plano s, se hace $s = j\omega$ en la ecuación (9-90). Se obtiene:

$$L(j\omega) = \frac{K(j\omega - 1)}{j\omega(j\omega + 1)} = \frac{K(j\omega - 1)}{-\omega^2 + j\omega} \quad (9\text{-}92)$$

'Cuando $\omega = \infty$,

$$L(j\infty) = \left.\frac{K}{j\omega}\right|_{\omega=\infty} = 0\angle -90° \quad (9\text{-}93)$$

Cuando $\omega = 0$,

$$L(j0) = \left.\frac{K}{j\omega}\right|_{\omega=0} = \infty\angle 90° \quad (9\text{-}94)$$

Para encontrar la intersección de la traza de $L(j\omega)$ con el eje real, se racionaliza la función al multiplicar el numerador y el denominador de la ecuación (9-92) por $-\omega^2 - j\omega$. Se tiene:

$$L(j\omega) = \frac{K(j\omega - 1)(-\omega^2 - j\omega)}{\omega^4 + \omega^2} = \frac{K[2\omega + j(1 - \omega^2)]}{\omega(\omega^2 + 1)} \quad (9\text{-}95)$$

Haciendo que la parte imaginaria de $L(j\omega)$ sea igual a cero y resolviendo para ω^2, se tiene:

$$\omega^2 = \pm 1 \text{ rad/s} \tag{9-96}$$

Para $\omega = 1$,

$$L(j1) = K \tag{9-97}$$

Traza de Nyquist para $K > 0$

Con base a la información anterior, la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ que corresponde a la porción positiva del eje $j\omega$ se bosqueja como se muestra en la Fig. 9-33 para $K > 0$. La Fig. 9-33 muestra que cuando ω varía desde ∞ a 0 a lo largo de la traza de Nyquist, el ángulo neto Φ_{11} recorrido por el fasor dibujado desde el punto $(-1, j0)$ a la traza de Nyquist es $+90°$. Por tanto, el sistema es inestable ya que Φ_{11} es positivo. También se puede observar que $(-1, j0)$ está encerrado por la traza de Nyquist y la misma conclusión sobre la estabilidad en lazo cerrado se puede obtener.

De la ecuación (9-82):

$$\Phi_{11} = (Z - 0.5P_\omega - P)180° = (Z - 0.5)180° = 90° \tag{9-98}$$

Por tanto $Z = 1$, lo que significa que la ecuación característica del sistema en lazo cerrado tiene una raíz en el semiplano derecho del plano s. La ecuación característica del sistema es:

$$s^2 + (1 + K)s - K = 0 \tag{9-99}$$

Se puede verificar fácilmente que la estabilidad requiere que:

$$0 > K > -1 \tag{9-100}$$

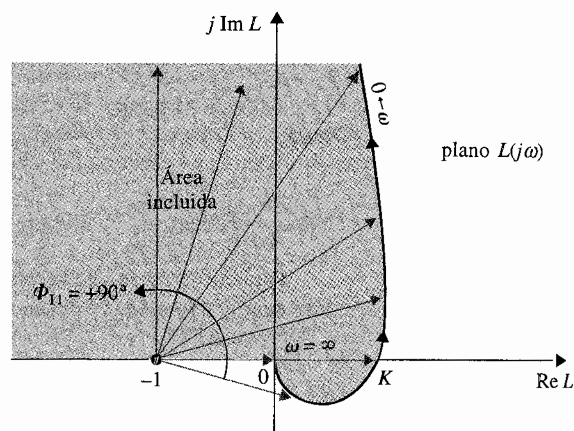


Figura 9-33 Traza de Nyquist del sistema en el ejemplo 9-5 $L(s) = K(s-1)/[s(s+1)]$.

Traza de Nyquist para $K < 0$

La Fig. 9-34(a) muestra la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ cuando K está entre 0 y −1. Observe que la traza se obtiene al *rotar* la traza de $L(j\omega)$ de la Fig. 9-33 en 180° alrededor del origen. Cuando ω varía desde ∞ a 0, el ángulo Φ_{11} en la Fig. 9-34(a) tiene una rotación neta de −90° que concuerda con el requisito de estabilidad en la ecuación (9-91) y el sistema en lazo cerrado es estable. Debe recordarse que ya que $L(j\omega)$ es del tipo de fase no mínima, el hecho de que la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ de la Fig. 9-34(a) no encierre al punto $(-1, j0)$ *no* es la razón de que el sistema sea estable.

La Fig. 9-34(b) muestra la traza de Nyquist cuando $K < -1$. Ahora se puede ver que el punto $(-1, j0)$ está encerrado. Verificando el valor de Φ_{11}, se tiene que $\Phi_{11} = 270°$, lo que difiere de los −90° requeridos, por tanto el sistema es inestable. Utilice la ecuación (9-82) da:

$$\Phi_{11} = (Z - 0.5P_{\omega} - P)180° = (Z - 0.5)180° = 270° \tag{9-101}$$

Por tanto $Z = 2$, lo que significa que la ecuación característica tiene dos raíces en el semiplano derecho del plano s.

En general, cuando K cambia de signo, no es necesario redibujar la traza de Nyquist como se muestra en la Fig. 9-34. La ecuación (9-40) se puede escribir como:

$$1 + L(s) = 1 + KL_1(s) = 0 \tag{9-102}$$

donde K es positiva. Para K negativa, la ecuación (9-102) se puede escribir como:

$$1 - KL_1(s) = 0 \tag{9-103}$$

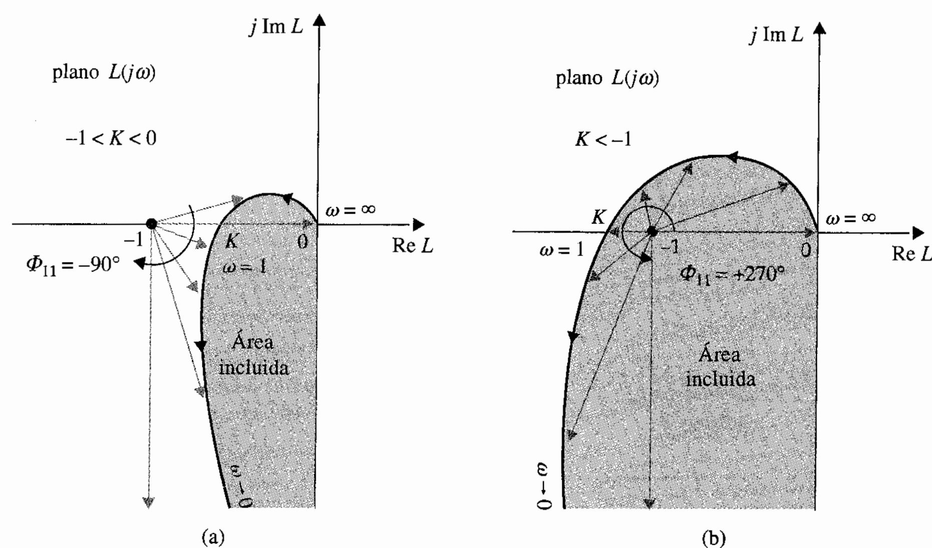


Figura 9-34 Traza de Nyquist del sistema en el ejemplo 9-5 $L(s) = K(s-1)/[s(s+1)]$. (a) $-1 < K < 0$. (b) $K < -1$.

o bien:

$$KL_1(s) = 1 \tag{9-104}$$

donde K es ahora positiva. Por tanto, la ecuación (9-104) muestra que cuando K es negativa, todavía se puede emplear el diagrama de $L(j\omega)$ para K positiva, pero designar el punto $(+1, j0)$ como el punto crítico para el análisis de estabilidad.

La Fig. 9-35 muestra la traza de Nyquist de la ecuación (9-90) para $K > 0$. Cuando K es negativa, el punto $(+1, j0)$ se considera como el punto crítico. Como se muestra en la Fig. 9-35, para $-1 < K < 0$, Φ_{11} es $-90°$, que es el ángulo requerido, y el sistema es estable. Cuando $K < -1$, el punto $(+1, j0)$ está encerrado por la traza de Nyquist, y el sistema es inestable. Estos resultados concuerdan con aquellos obtenidos de la Fig. 9-34 cuando las trazas de Nyquist para $K < 0$ fueron construidas.

Es interesante comparar el análisis de estabilidad de Nyquist con el análisis del lugar geométrico de las raíces. La Fig. 9-36 muestra el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica del sistema con la función de transferencia de lazo dada por la ecuación (9-90). La condición de estabilidad del sistema como función de K está indicada claramente por la gráfica del lugar geométrico de las raíces. El RL entre 0 y +1 sobre el eje real indica que el sistema es inestable para $0 < K < \infty$. El CRL indica que para valores negativos de K, el sistema es inestable para $-\infty < K < -1$, y el sistema es estable en el intervalo de $-1 < K < 0$. El CRL cruza el eje $j\omega$ en $\omega = \pm 1$ rad/s, que son los valores de ω en los cuales la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ intercepta al eje real negativo. ▲

Ejemplo 9-6

Considere el sistema de control que se muestra en la Fig. 9-37. Se desea determinar el intervalo de K para el cual el sistema es estable. La función de transferencia de lazo del sistema es:

$$L(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{10K(s+2)}{s^3 + 3s^2 + 10} \tag{9-105}$$

Los polos de $L(s)$ se encuentran en $s = -3.72$, $0.361 + j1.6$, y $0.361 - j1.6$. O se puede emplear el criterio de Routh-Hurwitz para verificar que $L(s)$ tiene dos polos en el semiplano derecho del plano s. Por tanto, $P = 2$ y $P_\omega = 0$. La función de transferencia de $L(s)$ es del tipo de fase no mínima. De la

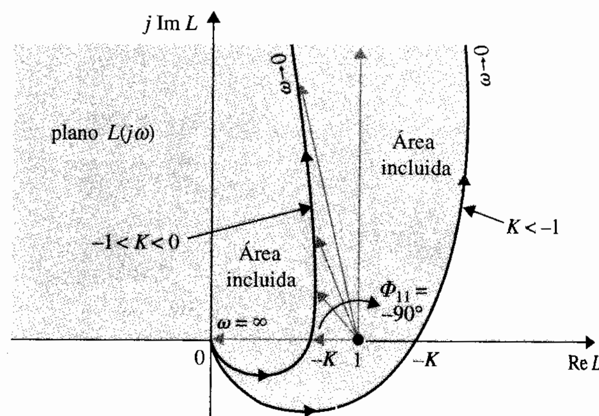


Figura 9-35 Traza de Nyquist de $L(s) = K(s-1)/[s(s+1)]$ con $K < 0$. El punto $(+1, j0)$ es el punto crítico.

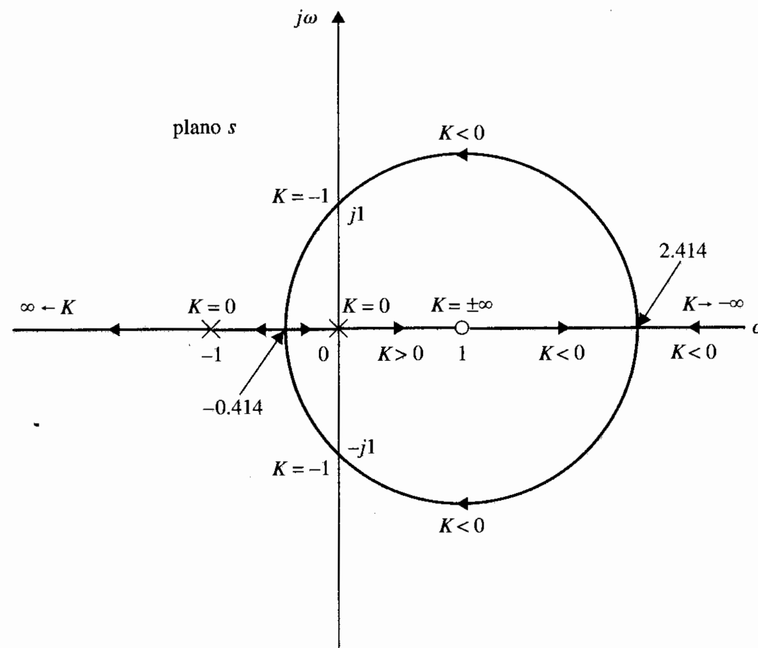


Figura 9-36 Lugar geométrico de las raíces completa del sistema en el ejemplo 9-5.

ecuación (9-84), el requisito para que el sistema en lazo cerrado sea estable es:

$$\Phi_{11} = -(0.5P_{\omega} + P)180° = -360° \tag{9-106}$$

Al hacer $s = j\omega$, la ecuación (9-105) se convierte en:

$$L(j\omega) = \frac{10K(j\omega + 2)}{(10 - 3\omega^2) - j\omega^3} \tag{9-107}$$

En $\omega = \infty$,

$$L(j\infty) = 0\angle 180° \tag{9-108}$$

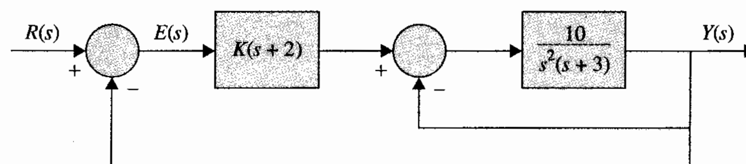


Figura 9-37 Diagrama de bloques del sistema de control del ejemplo 9-6.

En $\omega = 0$,

$$L(j0) = 2K \tag{9-109}$$

Para encontrar la intersección con el eje real del plano $L(j\omega)$, se racionaliza $L(j\omega)$ como:

$$L(j\omega) = \frac{10K\{2(10 - 3\omega^2) - \omega^4 + j[\omega(10 - 3\omega^2) + 2\omega^3]\}}{(10 - 3\omega^2)^2 + \omega^6} \tag{9-110}$$

Al hacer que la parte imaginaria de $L(j\omega)$ sea igual a cero, se tiene:

$$\omega(10 - 3\omega^2) + 2\omega^3 = 0 \tag{9-111}$$

Las soluciones de la ecuación (9-111) son $\omega = 0$ y $\omega = \pm\sqrt{10} = 3.16$ rad/s, que son las frecuencias en las cuales $L(j\omega)$ intercecta al eje real del plano $L(j\omega)$. Cuando $\omega = 0$, se tiene que $L(j0) = 2K$ en la ecuación (9-109). Cuando $\omega = 3.16$ rad/s:

$$L(j3.16) = -K \tag{9-112}$$

La Fig. 9-38(a) muestra la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ para $0 < K < 1$. Ya que el punto $(-1, j0)$ está encerrado por la traza de Nyquist, el sistema en lazo cerrado es inestable. También se puede mostrar

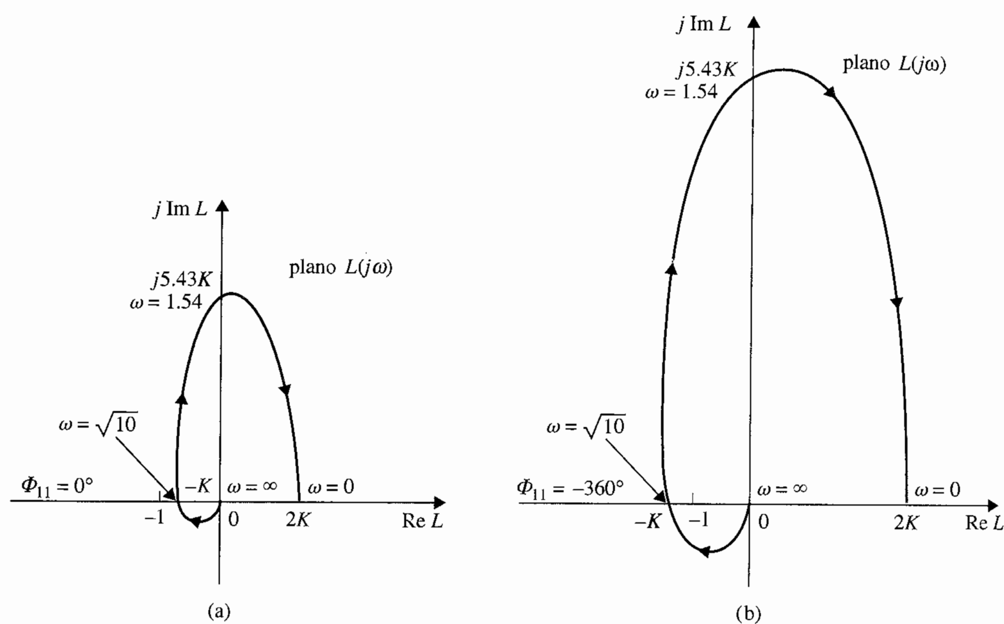


Figura 9-38 Trazas de Nyquist del sistema en el ejemplo 9-6. (a) $1 > K > 0$. (b) $K > 1$.

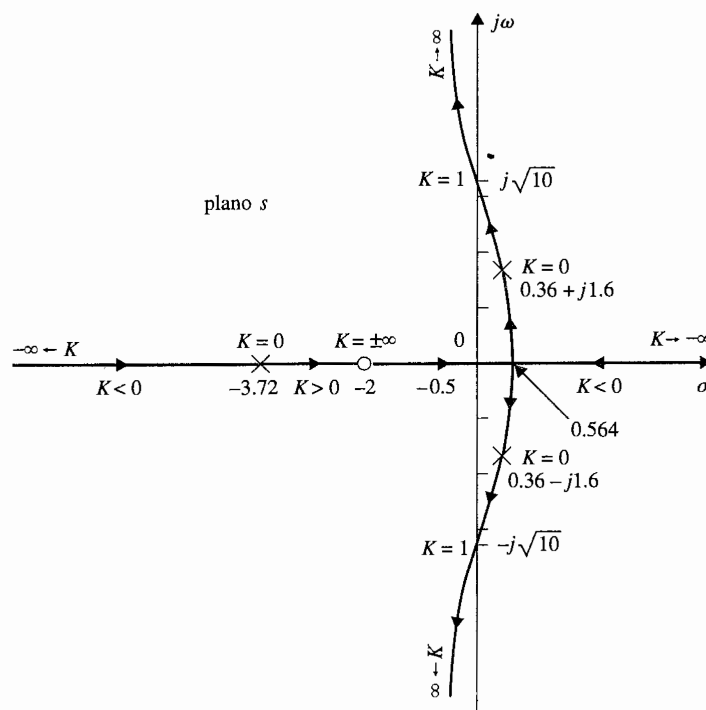


Figura 9-39 Lugar geométrico de las raíces completo del sistema en el ejemplo 9-6.

que el ángulo recorrido por Φ_{11} es 0°, no −360°, como se requiere en la ecuación (9-106). La Fig. 9-38(b) muestra la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ cuando K es mayor que la unidad. En este caso, el ángulo Φ_{11}, gira un total de −360°; por tanto el sistema es estable.

Cuando K es negativo, se puede emplear la gráfica de la Fig. 9-38, y el punto $(+1, j0)$ se considera como el punto crítico. Las siguientes condiciones de estabilidad se observan:

▲ $2K < -1$: El punto $(+1, j0)$ está entre 0 y $2K$, y no está encerrado por $L(j\omega)$, pero Φ_{11} = −180°; el sistema es inestable. Para estabilidad, Φ_{11} debe ser igual a −360°.

▲ $-1 < 2K < 0$: El punto $(+1, j0)$ está a la derecha del punto $2K$, y está encerrado por la traza de Nyquist; el sistema es inestable. En este caso, $\Phi_{11} = 0°$.

La conclusión es que el sistema es estable para $K > 1$. El lugar geométrico de las raíces del sistema se muestra en la Fig. 9-39. Claramente, cuando K es negativo, una rama del CRL siempre estará en el semiplano derecho, y el sistema es inestable. El sistema es estable sólo para $K > 1$, y el RL cruza el eje $j\omega$ en $\omega = \pm 3.16$ rad/s, lo cual corresponde a la frecuencia en la cual la traza de $L(j\omega)$ intersecta el eje real negativo. El valor de K en el punto de cruce sobre el eje $j\omega$ es 1. ▲

Ejemplo 9-7

Considere un sistema de control con la función de transferencia de lazo:

$$L(s) = \frac{K}{(s+2)(s^2+4)} \tag{9-113}$$

que tiene un par de polos imaginarios en $s = j2$ y $-j2$. Por tanto $P_\omega = 2$ y $P = 0$. Para aplicar el criterio de Nyquist en la forma original, se tendría que definir la trayectoria de Nyquist con pequeños círculos alrededor de los polos sobre el eje $j\omega$.

En lugar de construir la traza de Nyquist completa, la porción que corresponde a $s = j\infty$ hasta $j0$ se grafica como se muestra en la Fig. 9-40. Los datos para esta gráfica se obtienen fácilmente empleando cualquiera de los programas en el dominio de la frecuencia mencionados anteriormente.

De la ecuación (9-84), el valor de Φ_{11} requerido para la estabilidad es:

$$\Phi_{11} = -(0.5P_\omega + P)180° = -180° \tag{9-114}$$

Como se ve de la Fig. 9-40, la magnitud de $L(j\omega)$ se va a infinito cuando $\omega = 2$ rad/s. Cuando K es positiva, el punto crítico $(-1, j0)$ no está rodeado por la traza de Nyquist, y el sistema es inestable.

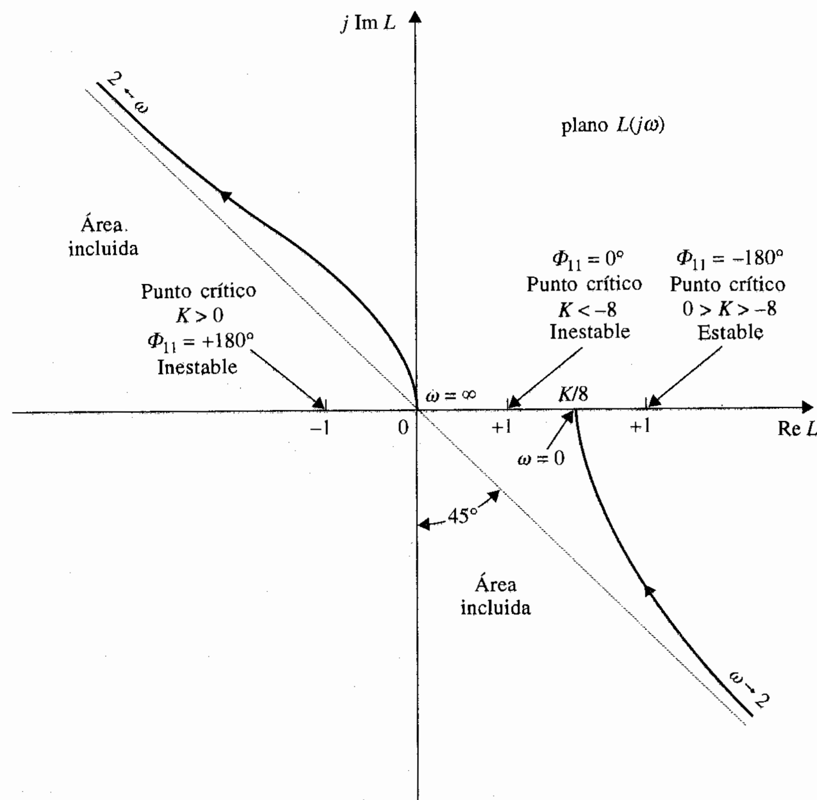


Figura 9-40 Traza de Nyquist del sistema de control en el ejemplo 9-7.

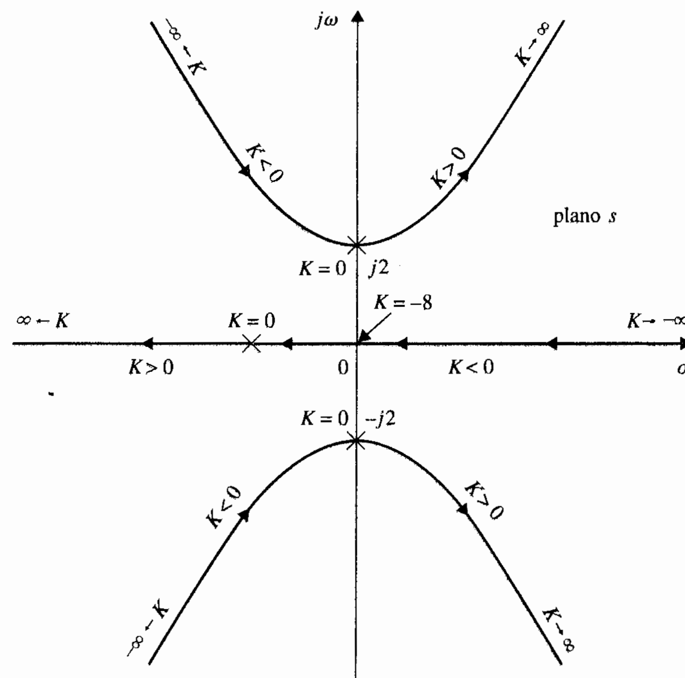


Figura 9-41 Lugar geométrico de las raíces del sistema en el ejemplo 9-7.

Para revisar el ángulo, cuando ω varía desde ∞ hasta 2, el ángulo Φ_{11} es +135°, y para la porción de $\omega = 2$ a 0, Φ_{11} es +45°. Por tanto, el Φ_{11} total es +180°, no −180°. El sistema es inestable para todo valor positivo de K.

Cuando K es negativo, el punto crítico en la Fig. 9-40 está en $(+1, j0)$. La Fig. 9-40 muestra que si el punto $(+1, j0)$ está entre 0 y $K/8$, y está encerrado por la trayectoria de Nyquist, el sistema es inestable. Por tanto, el sistema es inestable para $K < -8$. Cuando el punto $(+1, j0)$ está a la derecha del punto $K/8$, Φ_{11} desde $\omega = \infty$ hasta $\omega = 2$ es −45°, y desde $\omega = 2$ hasta $\omega = 0$ es −135°. Por tanto, Φ_{11} total cuando ω varía desde ∞ hasta 0 es −180°, lo que concuerda con el valor requerido en la ecuación (9-114). El sistema es estable para $0 > K > -8$. El resumen de la aplicación del criterio de Nyquist a este sistema es como sigue:

Rango de K	Φ_{11} (grados) para $\omega = \infty$ a 2	Φ_{11} (grados) para $\omega = 2$ a 0	Φ_{11} total (grados)	Punto crítico	Condición de Estabilidad
$K > 0$	+135	+45	+180	− 1 punto encerrado	Inestable
$K < -8$	−45	+45	0	+ 1 punto encerrado	Inestable
$-8 < K < 0$	−45	−135	−180		Estable

El lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica del sistema está construido en la Fig. 9-41 empleando la configuración de polos y ceros de la ecuación (9-113). La condición de estabilidad de $-8 < K < 0$ se encuentra fácilmente desde el lugar geométrico de las raíces. ▲

9-11 Los efectos de la adición de polos y ceros a $L(s)$ sobre la forma del lugar geométrico de Nyquist

Ya que el desempeño de un sistema de control es a menudo afectado por la adición y movimiento de polos y ceros de la función de transferencia de lazo, es importante investigar como se afecta la traza de Nyquist cuando polos y ceros se añaden a $L(s)$.

Se comienza con la función de transferencia de primer orden:

$$L(s) = \frac{K}{1 + T_1 s} \tag{9-115}$$

donde T_1 es una constante positiva real. La traza de Nyquist de $L(j\omega)$ para $0 \leq \omega \leq \infty$ es un semicírculo, como se muestra en la Fig. 9-42. La figura también muestra la interpretación de la estabilidad en lazo cerrado con respecto al punto crítico para todos los valores de K entre $-\infty$ e ∞.

La adición de polos en $s = 0$

Considere que un polo en $s = 0$ se añade a la función de transferencia de la ecuación (9-115), entonces:

$$L(s) = \frac{K}{s(1 + T_1 s)} \tag{9-116}$$

Ya que añadir un polo en $s = 0$ es equivalente a dividir $L(s)$ entre $j\omega$, la fase de $L(j\omega)$ se reduce en 90° en las frecuencias cero e infinito. Además la magnitud de $L(j\omega)$ en $\omega = 0$ se vuelve infinito. La Fig. 9-43 ilustra la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ en la ecuación (9-116) y la interpretación de la estabilidad en lazo cerrado con respecto a los puntos críticos para $-\infty < K < \infty$.

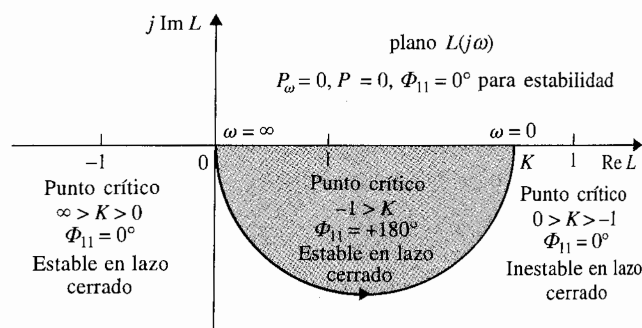


Figura 9-42 Traza de Nyquist de $L(s) = K/(1 + T_1 s)$.

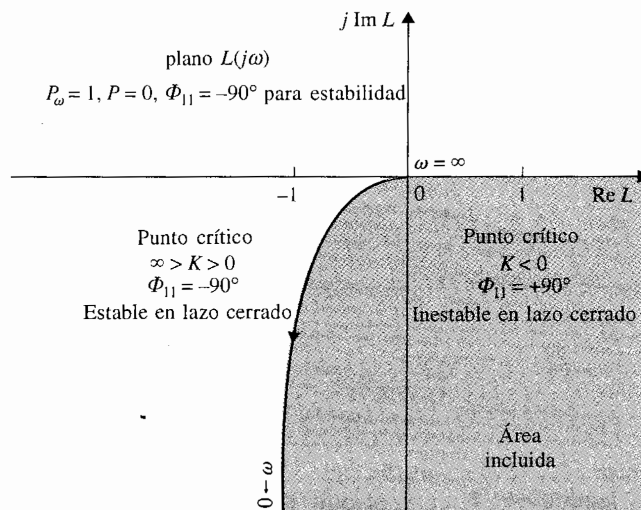


Figura 9-43 Traza de Nyquist de $L(s) = K/[s(1 + T_1 s)]$.

En general, el añadir un polo of multiplicity p en $s = 0$ a la función de transferencia de la ecuación (9-115) dará las siguientes propiedades a la traza de Nyquist de $L(j\omega)$:

$$\lim_{\omega \to \infty} \angle L(j\omega) = -(p + 1)90° \tag{9-117}$$

$$\lim_{\omega \to 0} \angle L(j\omega) = -p \times 90° \tag{9-118}$$

$$\lim_{\omega \to \infty} |L(j\omega)| = 0 \tag{9-119}$$

$$\lim_{\omega \to 0} |L(j\omega)| = \infty \tag{9-120}$$

El siguiente ejemplo ilustra los efectos de añadir polos de orden múltiple a $L(s)$.

Ejemplo 9-8

La Fig. 9-44 muestra la traza de Nyquist de:

$$L(s) = \frac{K}{s^2(1 + T_1 s)} \tag{9-121}$$

y los puntos críticos, con la interpretación de estabilidad. La Fig. 9-45 ilustra lo mismo para:

$$L(s) = \frac{K}{s^3(1 + T_1 s)} \tag{9-122}$$

▲

▲ El añadir polos en $s = 0$ a la función de transferencia reducirá la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

La conclusión de estas ilustraciones es que la adición de polos en $s = 0$ a la función de transferencia de lazo afectará la estabilidad del sistema en lazo cerrado en forma adversa. Un sistema que tiene una función de transferencia con más de un polo en $s = 0$ (tipo 2 o mayor) es igual de inestable o difícil de estabilizar.

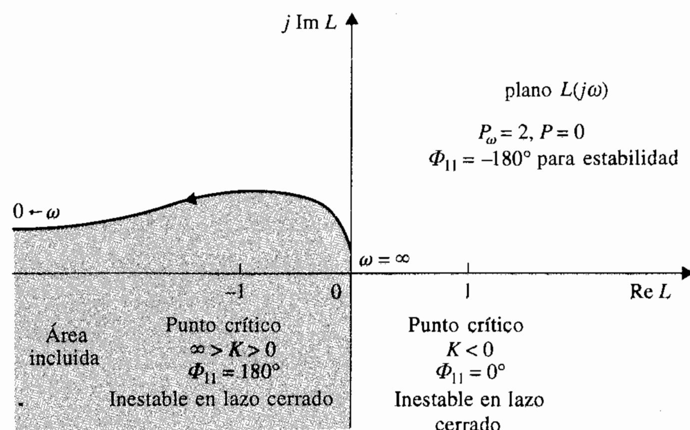


Figura 9-44 Traza de Nyquist de $L(s) = K/[s^2(1 + T_1s)]$.

Adición de polos finitos diferentes de cero

Cuando un polo en $s = -1/T_2$ ($T_2 > 0$) se añade a la función $L(s)$ de la ecuación (9-115), se tiene:

$$L(s) = \frac{K}{(1 + T_1s)(1 + T_2s)} \tag{9-123}$$

La traza de Nyquist de $L(j\omega)$ en $\omega = 0$ no está afectada por la adición del polo, ya que:

$$\lim_{\omega \to 0} L(j\omega) = K \tag{9-124}$$

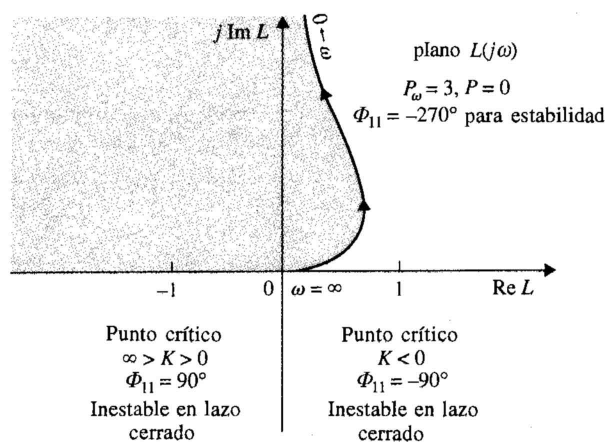


Figura 9-45 Traza de Nyquist de $L(s) = K/[s^3(1 + T_1s)]$.

El valor de $L(j\omega)$ en $\omega = \infty$ es:

$$\lim_{\omega\to\infty} L(j\omega) = \lim_{\omega\to\infty} \frac{-K}{T_1 T_2 \omega^2} = 0 \angle -180^\circ \tag{9-125}$$

Por tanto, el efecto de añadir un polo en $s = -1/T_2$ a la función de transferencia de la ecuación (9-115) es correr la fase de la traza de Nyquist por -90° en $\omega = \infty$, como se muestra en la Fig. 9-46. La figura también muestra la traza de Nyquist de:

$$L(s) = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)} \tag{9-126}$$

▲ Añadir polos no cero a la función de transferencia también reduce la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

donde dos polos no ceros se han añadido a la función de transferencia de la ecuación (9-115) (T_1, T_2, T_3, > 0). En este caso, la traza de Nyquist en $\omega = \infty$ se rota en el sentido de las manecillas del reloj por otros 90° de la ecuación (9-123). *Estos ejemplos muestran el efecto adverso sobre la estabilidad en lazo cerrado cuando se añaden polos a la función de transferencia de lazo.* Los sistemas en lazo cerrado con las funciones de transferencia de lazo de las ecuaciones (9-115) y (9-123) son todos estables mientras K sea positiva. El sistema representado por la ecuación (9-126) es inestable si la intersección de la traza de Nyquist con el eje real negativo está a la izquierda del punto $(-1, j0)$ cuando K es positiva.

Adición de ceros

Se ha demostrado en el Cap. 6 que añadir ceros a la función de transferencia de lazo tiene el efecto de reducir el sobrepaso y el efecto general de estabilización. En términos del criterio de Nyquist, este efecto de estabilización se demuestra fácilmente, ya que la multiplicación del término $(1 + T_d s)$ a la función de transferencia de lazo incrementa la fase de $L(s)$ por 90° en $\omega = \infty$. El ejemplo siguiente ilustra el efecto sobre la estabilidad al añadir un cero en $-1/T_d$ a la función de transferencia de lazo.

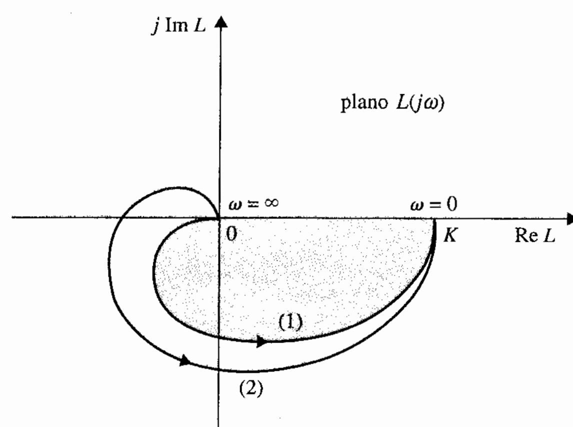


Figura 9-46 Trazas de Nyquist. Curva (1): $L(s) = K/(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)$. Curva (2): $L(s) = K/(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)$.

Ejemplo 9-9

Considere que la función de transferencia de lazo de un sistema de control en lazo cerrado es:

$$L(s) = \frac{K}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \tag{9-127}$$

Se puede mostrar que el sistema en lazo cerrado es estable para:

$$0 < K < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \tag{9-128}$$

Suponga que un cero en $s = -1/T_d$ ($T_d > 0$) se añade a la función de transferencia de la ecuación (9-127); entonces:

$$L(s) = \frac{K(1 + T_d s)}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \tag{9-129}$$

▲ El añadir ceros a la función de transferencia tiene el efecto de estabilizar el sistema en lazo cerrado.

Las trazas de Nyquist de las dos funciones de transferencia de las ecuaciones (9-127) y (9-129) se muestran en la Fig. 9-47. El efecto del cero en la ecuación (9-129) es añadir 90° a la fase de $L(j\omega)$ en la ecuación (9-127) en $\omega = \infty$ mientras que no afecte el valor en $\omega = 0$. La intersección con el eje real negativo del plano $L(j\omega)$ se mueve desde $-KT_1T_2/(T_1 + T_2)$ hasta $-K(T_1T_2 - T_dT_1 - T_dT_2)/(T_1 + T_2)$. Por tanto el sistema con la función de transferencia de lazo en la ecuación (9-129) es estable para:

$$0 < K < \frac{T_1 + T_2}{T_1T_2 - T_d(T_1 + T_2)} \tag{9-130}$$

lo cual para T_d y K positivas tiene un límite superior mayor que aquel de la ecuación (9-128). ▲

9-12 Análisis de estabilidad de sistemas multilazo

Los análisis de estabilidad de Nyquist conducidos en las secciones anteriores están todos dirigidos hacia la función de transferencia de lazo de $L(s)$. No importa si el sistema tiene un

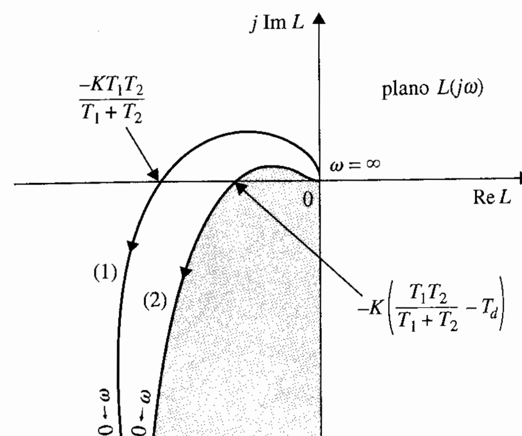


Figura 9-47 Trazas de Nyquist. Curva (1): $L(s) = K/[s(1 + T_1s)(1 + T_2s)]$. Curva (2): $L(s) = K(1 + T_ds)/[s(1 + T_1s)(1 + T_2s)]$; $T_d < T_1, T_2$.

solo lazo o lazos múltiples, ya que una vez que se obtiene la función de transferencia de lazo, el análisis de estabilidad se puede conducir empleando ya sea el criterio de Routh-Hurwitz, el lugar geométrico de las raíces o el criterio de Nyquist.

Para sistemas realimentados de múltilazos, es ventajoso analizar la estabilidad de los sistemas al trabajar desde el lazo interno hacia el lazo externo, uno a la vez. De esta forma, se gana más visión sobre la estabilidad de los lazos individuales del sistema. El ejemplo siguiente ilustrará este enfoque.

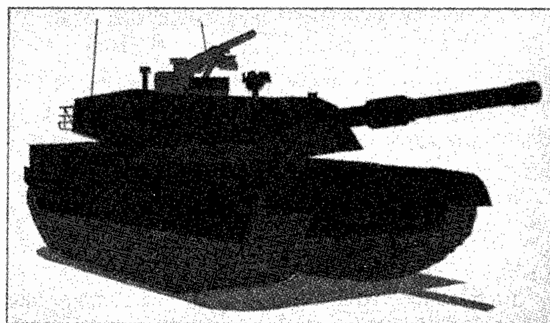
Ejemplo 9-10

La Fig. 9-48 muestra el diagrama de bloques de un sistema que controla la torreta del cañón de un tanque. Durante el servicio al sistema de control de la torreta, el mecánico de forma accidental abrió el lazo externo del sistema. Con la alimentación de energía, la torreta quedó fuera de control, y por último quedó inoperante. El propósito de este ejemplo es mostrar que es inadecuado investigar sólo la estabilidad del sistema global. En general, para un sistema de control de lazos múltiples, uno debe conducir un análisis sistemático de estabilidad de todos los lazos internos del sistema. Es admisible tener lazos internos inestables, siempre y cuando el sistema completo sea estable. Sin embargo, si tal situación existiese, es importante prever y tomar precauciones para prevenir la apertura de los lazos durante la operación.

La función de transferencia del lazo interno es:

$$G(s) = \frac{6}{s(s+1)(s+2)} \tag{9-131}$$

La Fig. 9-49 muestra la traza de Nyquist de $G(s)$. Ya que la gráfica intercepta al eje real en el punto -1 en $\omega = 1.414$ rad/s, el lazo interno es marginalmente estable. Por tanto, si el lazo externo del



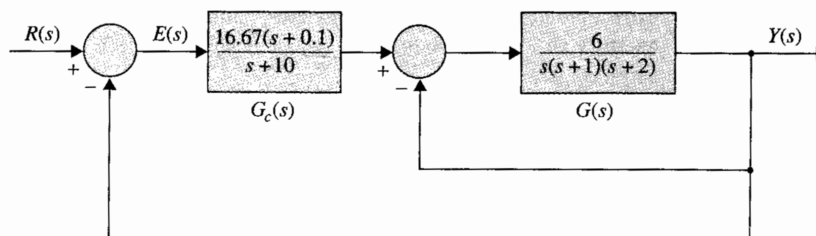


Figura 9-48 Sistema de control multilazo para el control de la torreta del cañón de un tanque.

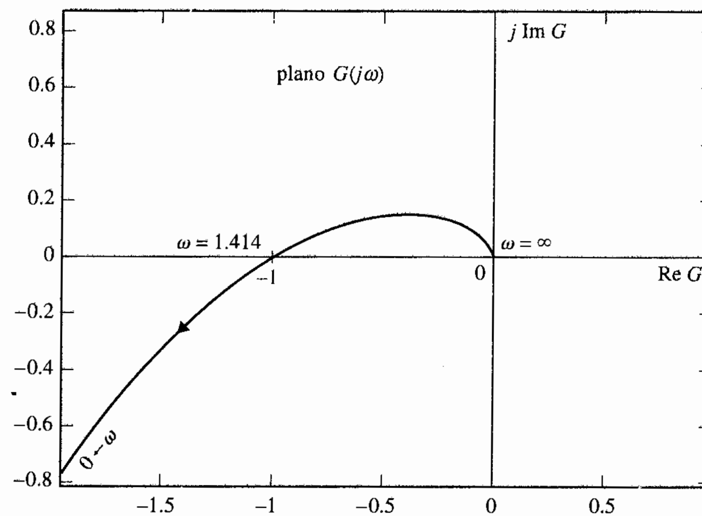


Figura 9-49 Traza de Nyquist de $G(s) = \dfrac{6}{s(s+1)(s+2)}$.

sistema se abre, el sistema oscilará de manera continua con frecuencia de 1.414 rad/s. La función de transferencia de lazo del sistema global es:

$$L(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G(s)} = \frac{100(s + 0.1)}{(s + 10)(s^3 + 3s^2 + 2s + 6)} \quad (9\text{-}132)$$

Ya que $L(s)$ tiene dos polos sobre el eje $j\omega$ y el resto está sobre el semiplano izquierdo del plano s, $P_\omega = 2$ y $P = 0$. La función también es del tipo de fase no mínima, por lo que se emplea la ecuación (9-84) para la prueba de estabilidad del sistema completo. Por tanto:

$$\Phi_{11} = -(0.5P_\omega + P)180° = -180° \quad (9\text{-}133)$$

La traza de Nyquist de $L(s)$ se grafica como se muestra en la Fig. 9-50. En ángulo Φ_{11} para $\omega = \infty$ a $\omega = 1.414$ rad/s es −90°, y desde $\omega = 1.414$ rad/s hasta $\omega = 0$ es −90°. Por lo que el valor total de Φ_{11} para $\omega = \infty$ hasta $\omega = 0$ es −180°, y el sistema completo es estable. En general, cuando más de dos lazos están involucrados, la forma correcta es empezar con la estabilidad del lazo más interno mediante la apertura de los lazos externos y entonces añadir un lazo a la vez hasta que el lazo más externo sea cerrado. ▲

9-13 La estabilidad de sistemas de control lineales con retardos puros

Los sistemas con retardos puros y su modelado se discutieron en la ección. 4-8. Los sistemas en lazo cerrado con retardo en los lazos por lo general estarán sujetos a mayores problemas de

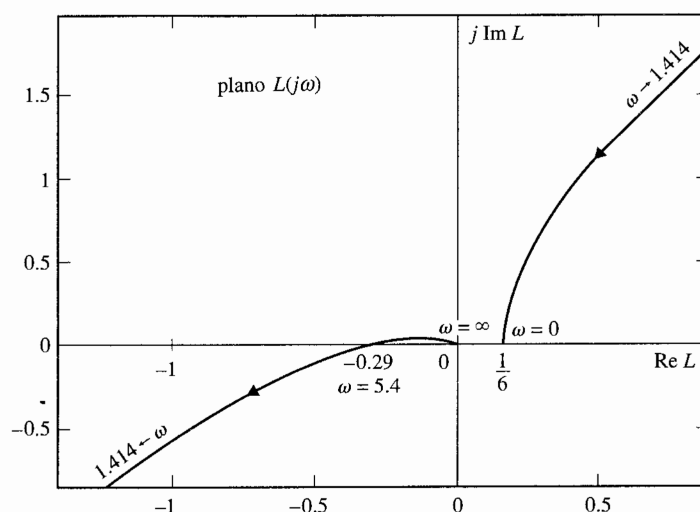


Figura 9-50 Traza de Nyquist de $L(s) = \dfrac{100(s + 0.1)}{(s + 10)(s^3 + 3s^2 + 2s + 6)}$.

▲ El criterio de Routh-Hurwitz no es aplicable a sistemas con tiempos de retardo.

estabilidad que los sistemas sin retardos. Ya que un retardo puro T_d está modelado por la función de transferencia e^{-sT_d}, la ecuación característica del sistema ya no tendrá coeficientes constantes. Por tanto, el criterio de Routh-Hurwitz *no* es aplicable. El método del lugar geométrico de las raíces se puede aplicar a sistemas con retardos puros, pero la construcción del lugar geométrico de las raíces es muy compleja. En esta sección se muestra que el criterio de Nyquist se puede aplicar en forma confiable a un sistema con retardo puro.

Considere que la función de transferencia de un sistema de control con retardo puro está expresada en una forma similar a la de la ecuación (9-38), o

$$L(s) = L_1(s)e^{-T_d s} \tag{9-134}$$

donde $L_1(s)$ es una función racional de s con coeficientes constantes, y T_d es el tiempo de retardo puro en segundos.

La estabilidad del sistema puede ser investigada al construir la traza de Nyquist de $L(s)$ y al observar su comportamiento con respecto al punto $(-1, j0)$. El efecto del término exponencial en la ecuación (9-134) es que rota el fasor $L_1(j\omega)$ en cada ω por un ángulo ωT_d radianes en el sentido de las manecillas del reloj. La amplitud de $L_1(j\omega)$ no se afecta por el retardo, ya que la amplitud de $e^{-j\omega T_d}$ es unitaria para todas las frecuencias.

La mayoría de los sistemas de control son del tipo 1 o mayor, la magnitud de $L(j\omega)$ usualmente se aproxima a cero cuando ω se aproxima a infinito. Por lo que la traza de Nyquist de la función de transferencia de la ecuación (9-134) a menudo es una espiral hacia el origen en el sentido de las manecillas del reloj cuando ω se aproxima a infinito, y existe un número infinito de intersecciones con el eje real del plano $L(j\omega)$. Una vez que se construye la traza de

Nyquist de $L(j\omega)$, la estabilidad del sistema se determina en la forma usual investigando el ángulo Φ_{11}. El siguiente ejemplo ilustra en análisis de estabilidad de un sistema en lazo cerrado con retardo puro empleando el criterio de Nyquist.

Ejemplo 9-11

La Fig. 9-51 muestra las trazas de Nyquist de:

$$L(s) = L_1(s)e^{-T_d s} = \frac{e^{-T_d s}}{s(s+1)(s+2)} \tag{9-135}$$

para varios valores de T_d. Estas trazas de Nyquist muestran que cuanto T_d es cero, el sistema es estable. La condición de estabilidad se deteriora conforme T_d se incrementa, debido a la intersección de $L(j\omega)$ sobre el eje real, al aproximarse al punto $(-1, j0)$. Cuando $T_d = 2.09$ s, el diagrama $L(j\omega)$ pasa a través

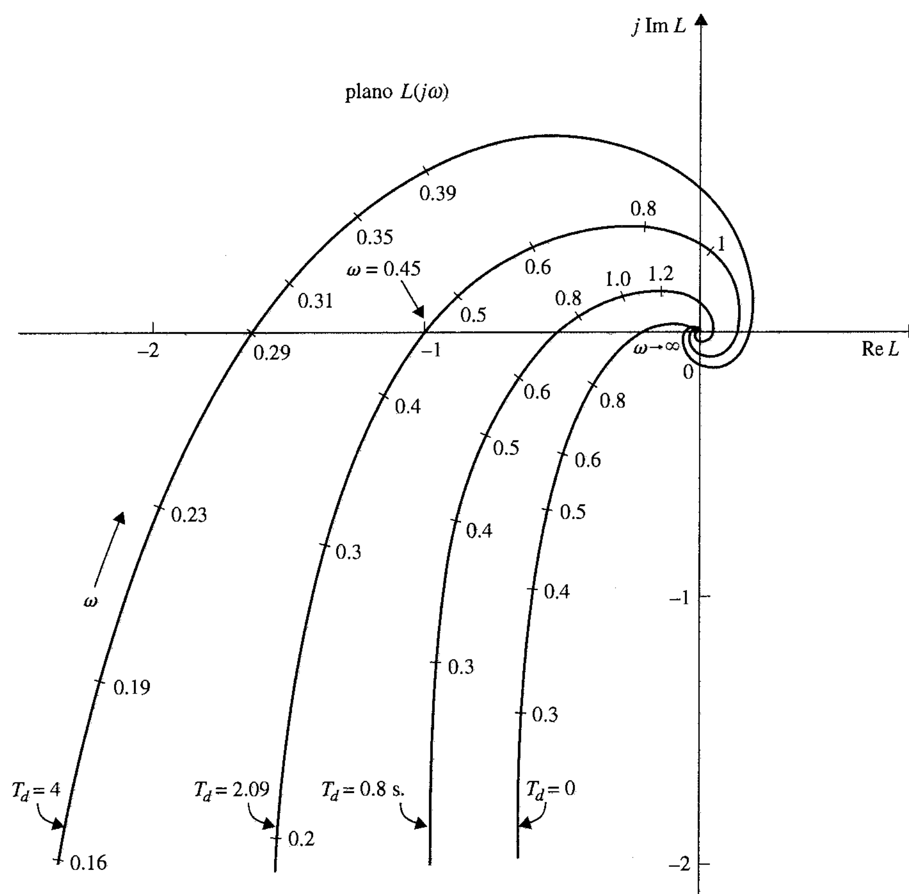


Figura 9-51 Traza de Nyquist de $L(s) = e^{-T_d s}/[s(s+1)(s+2)]$.

▲ El retardo puro usualmente deteriora la estabilidad de sistemas en lazo cerrado.

del punto (–1, $j0$), y el sistema es marginalmente estable. El sistema es inestable cuando T_d es mayor que 2.09, puesto que el punto (–1, $j0$) estaría encerrado o Φ_{11} sería positiva.

Contrario al caso de la función racional, la solución analítica de las intersecciones sobre el eje real del plano $L(j\omega)$ no es trivial, ya que las ecuaciones que gobiernan las intersecciones ya no son algebraicas. Para demostrar esto, la función de transferencia de la ecuación (9-135) se racionaliza en la forma usual mediante la multiplicación de su numerador y denominador por el complejo conjugado del denominador. El resultado es:

$$L(j\omega) = \frac{(\cos \omega T_d - j \operatorname{sen} \omega T_d)[-3\omega^2 - j\omega(2 - \omega^2)]}{9\omega^4 + \omega^2(2 - \omega^2)^2} \tag{9-136}$$

La condición de $L(j\omega)$ al interceptar al eje real se obtiene haciendo que la parte imaginaria de la ecuación (9-136) sea igual a cero.

$$3\omega^2 \operatorname{sen} \omega T_d - \omega(2 - \omega^2) \cos \omega T_d = 0 \tag{9-137}$$

que no se resuelve con facilidad para ω, dado T_d. ▲

9-13-1 Trayectoria crítica

Hasta ahora se ha utilizado ya sea el punto (–1, $j0$) o el punto (+1, $j0$) del plano $L(j\omega)$ como el punto crítico para el análisis de estabilidad cuando la ganancia K es positiva o negativa, respectivamente. Bajo ciertas condiciones, se puede relajar la idea del punto crítico al extenderlo en una trayectoria.

Al referirse a la ecuación (9-134), se reconoce que las raíces de la ecuación característica satisfacen:

$$L_1(s)e^{-T_d s} = -1 \tag{9-138}$$

El segundo miembro de la última ecuación señala el hecho de que (–1, $j0$) es el punto crítico para el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado. La ecuación (9-138) se puede escribir como:

$$L_1(s) = -e^{T_d s} \tag{9-139}$$

Cuando $s = j\omega$, el primer miembro de esta última ecuación da la traza de Nyquist de la función de transferencia de lazo cuando no hay tiempo de retardo. El término exponencial en la ecuación (9-139) tiene magnitud de uno para cualquier valor de ω, y su fase es $-\omega T_d$ radianes. Por lo que el segundo miembro de la ecuación (9-139) describe una **trayectoria crítica,** que es un círculo con radio unitario, y centrado en el origen del plano $L_1(j\omega)$. Cuando $\omega = 0$, la trayectoria comienza en el punto (–1, $j0$), conforme ω se incrementa, el punto crítico traza un círculo unitario en SCMR. El ejemplo siguiente ilustra la aplicación del criterio de Nyquist al estudio de estabilidad de un sistema de lazo cerrado con un retardo puro.

Ejemplo 9-12

Dada la función de transferencia de lazo de un sistema de control en lazo cerrado con un retardo puro:

$$L(s) = L_1(s)e^{-T_d s} = \frac{e^{-T_d s}}{s(s+1)(s+2)} \tag{9-140}$$

El problema es encontrar el valor marginal del tiempo de retardo T_d, para que el sistema sea estable.

La Fig. 9-52 muestra la traza de Nyquist de $L_1(j\omega)$ junto con la trayectoria crítica $-e^{j\omega T_d}$. La frecuencia en la cual la traza de $L_1(j\omega)$ intercepta la trayectoria crítica se encuentra al hacer la magnitud de $L_1(j\omega)$ igual a uno; esto es,

$$|L_1(j\omega)| = \frac{1}{|-3\omega^2 + j\omega(2-\omega^2)|} = 1 \tag{9-141}$$

Al resolver la ecuación (9-141) da la solución positiva para ω en 0.446 rad/s que es la frecuencia en la cual la traza de Nyquist de $L(j\omega)$, tales como aquellos que se muestran en la Fig. 9-51, intercepta el punto $(-1, j0)$ en el plano $L(j\omega)$. Debido a que el ángulo medido en radianes desde el punto $(-1, j0)$ al punto de intersección de la traza de $L_1(j\omega)$ y la trayectoria crítica es ωT_d, en donde $\omega = 0.446$ rad/s, se puede encontrar el valor crítico de T_d para la estabilidad al igualar:

$$\angle L_1(j0.446) = 0.446T_d + \pi \quad \text{rad} \tag{9-142}$$

o:

$$-\tan^{-1}\left(\frac{2-\omega^2}{-3\omega}\right)\Bigg|_{\omega=0.446} = 0.446T_d + \pi \quad \text{rad} \tag{9-143}$$

lo cual da:

$$0.932 \text{ rad} = 0.446T_d \quad \text{rad} \tag{9-144}$$

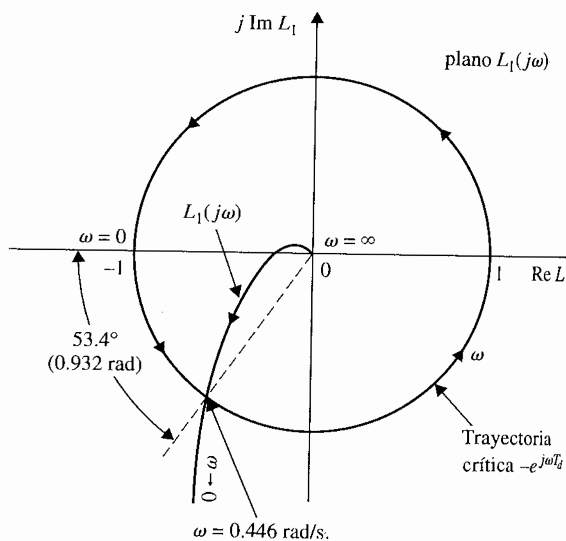


Figura 9-52 Traza de Nyquist de $L_1(s) = 1/[s(s+1)(s+2)]$ y la trayectoria crítica $-e^{j\omega T_d}$.

Al resolver para T_d desde la ecuación (9-144), se obtiene el valor crítico del tiempo de retardo como 2.09 s, que concuerda con el resultado mostrado en la Fig. 9-51 empleando la traza de Nyquist $L(j\omega)$ ▲

Aún cuando el método que se ha presentado hasta ahora involucra todavía el cálculo de las propiedades de la intersección entre la traza de Nyquist de $L_1(j\omega)$ y la trayectoria crítica para el tiempo de retardo, provee otra perspectiva sobre la aplicación del criterio de Nyquist a sistema con retardos puros. La lección valiosa aprendida es que el punto crítico para el análisis de estabilidad se puede generalizar por una trayectoria cuando una situación en particular lo requiera. Los programas de computadora tales como **freqrp** y **plrplot** pueden manejar las gráficas en el dominio de la frecuencia de sistemas con retardos puros con facilidad.

9-13-2 Aproximación de $e^{-T_d s}$

Una de las ventajas del análisis en el dominio de la frecuencia es que los sistemas con retardo puro en el lazo se pueden conducir al graficar la respuesta en frecuencia de la función de transferencia de lazo directamente con la ayuda de una computadora. Sin embargo, para las técnicas de análisis y diseño que requieren una función racional, la aproximación de Padé del tiempo de retardo descritas en la Sec. 4-8 se pueden aplicar. Se puede emplear la gráfica en el dominio de la frecuencia para evaluar la exactitud de estas aproximaciones. Un ejemplo ilustra este caso se da a continuación.

Ejemplo 9-13

Al emplear la aproximación mediante series de $e^{-T_d s}$ dada en la ecuación (4-170), la ecuación (9-135) se convierte en:

$$L(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)(1+T_d s+T_d^2 s^2/2)} \qquad (9\text{-}145)$$

O al utilizar la aproximación de Padé en la ecuación (9-171), la ecuación (9-135) se convierte en:

$$L(s) = \frac{1-T_d s/2}{s(s+1)(s+2)(1+T_d s/2)} \qquad (9\text{-}146)$$

La Fig. 9-53 muestra las trazas polares de las ecuaciones (9-135), (9-145), y (9-146) para $T_d = 0.8$. Las intersecciones de las trazas polares de las ecuaciones (9-135), (9-145), y (9-146) están en –0.5164, –0.525, y –0.5076, respectivamente. ▲

9-14 Estabilidad relativa: Margen de ganancia y margen de fase

▲ La estabilidad relativa se emplea para indicar que tan estable es un sistema.

Se ha demostrado en las Secs. 9-2 a la 9-4 la relación general entre el pico de resonancia M_r de la respuesta en frecuencia y el sobrepaso máximo de la respuesta en el tiempo. La comparación y correlación entre el dominio-frecuencia y los parámetros del dominio en el tiempo, son útiles en la predicción del desempeño de los sistemas de control. En general, se está interesado no sólo en la estabilidad absoluta de un sistema, sino también en qué tan estable es. Esto último se llama **estabilidad relativa.** En el dominio en el tiempo, la estabilidad relativa se mide por parámetros tales como sobrepaso máximo y el factor de

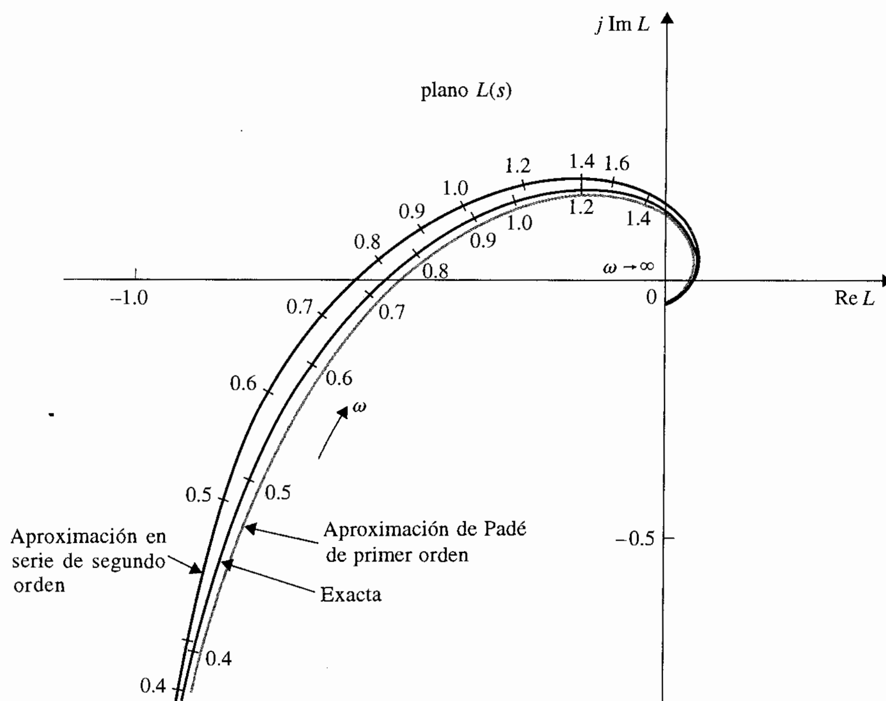


Figura 9-53 Aproximación de la traza de Nyquist de la figura 9-51 por una aproximación de serie de potencias de dos términos; $T_d = 0.8$ s.

amortiguamiento relativo. En el dominio de la frecuencia, el pico de resonancia M_p se puede emplear para indicar la estabilidad relativa. Otra forma de medir la estabilidad relativa en el dominio de la frecuencia es observando qué tan cerca se encuentra la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ del punto $(-1, j0)$.

Para demostrar el concepto de estabilidad relativa en el dominio de la frecuencia, las trazas de Nyquist, la respuesta al escalón correspondiente y las respuestas en frecuencia de un sistema típico de tercer orden se muestran en la Fig. 9-54 para cuatro valores diferentes de la ganancia de lazo K. Se supone que la función $L(j\omega)$ es del tipo de fase mínima, por lo que el encierro del punto $(-1, j0)$ es suficiente para el análisis de estabilidad. Los cuatro casos evaluados son los siguientes:

1. **Figura 9-54(a); la ganancia de lazo K es baja.** La traza de Nyquist de $L(j\omega)$ intersecta al eje real negativo en un punto que está muy lejano a la derecha del punto $(-1, j0)$. La respuesta al escalón correspondiente está bien amortiguada, y el valor de M_r de la respuesta con frecuencia es bajo.
2. **Figura 9-54(b); K se incrementa.** La intersección se mueve cerca del punto $(-1, j0)$; el sistema aún es estable, ya que el punto crítico no está encerrado, pero la respuesta al escalón tiene un sobrepaso máximo grande, y M_r también es grande.

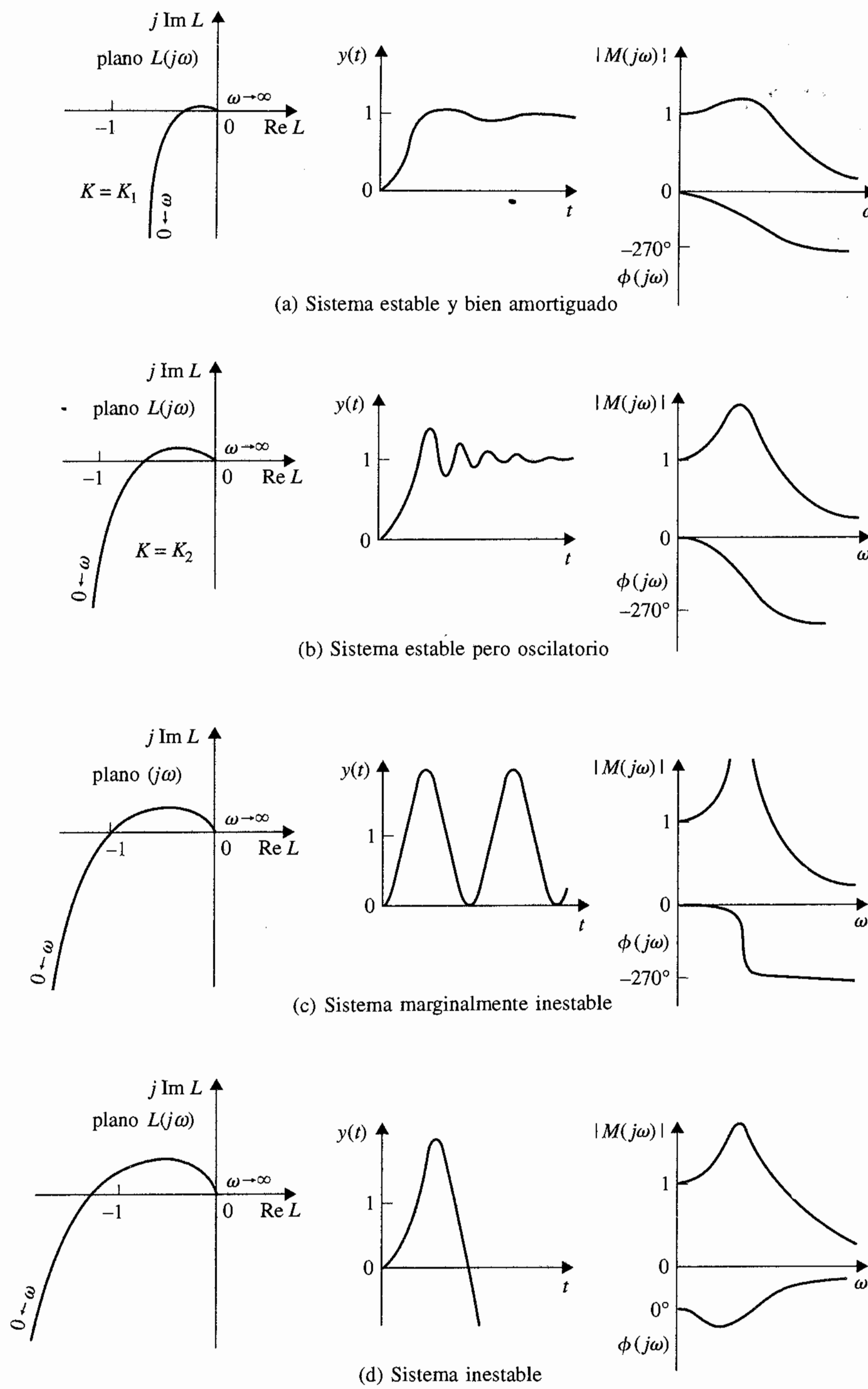


Figura 9-54 Correlación entre las trazas de Nyquist, respuestas al escalón y en frecuencias.

3. **Figura 9-54(c); *K* se incrementa más.** La traza de Nyquist ahora pasa a través del punto (–1, *j*0), y el sistema es marginalmente estable. La respuesta al escalón se vuelve oscilatoria con amplitud constante, y M_r se vuelve infinita.
4. **Figura 9-54(d); *K* es relativamente muy grande.** La traza de Nyquist ahora encierra al punto (–1, *j*0), y el sistema es inestable. La respuesta al escalón se vuelve no acotada. La curva de magnitud del módulo de $|M(j\omega)|$ en función de ω deja de tener significado. De hecho, el sistema es inestable, ¡el valor de M_r es todavía finito!

▲ M_r deja de tener significado cuando el sistema en lazo cerrado es inestable.

En todo el análisis anterior, la curva de fase de $\Phi(j\omega)$ de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado también provee información cualitativa acerca de la estabilidad. Observe que la pendiente negativa de la curva de fase se incrementa conforme la estabilidad relativa se decrementa. Cuando el sistema es inestable, la pendiente más allá de la frecuencia de resonancia se vuelve positiva. En la práctica, las características de fase del sistema en lazo cerrado rara vez se utilizan para fines de análisis y diseño.

9-14-1 Margen de ganancia

El **margen de ganancia** (GM) es uno de los criterios más empleados para medir la estabilidad relativa de sistemas de control. En el dominio de la frecuencia, el margen de ganancia se emplea para indicar la cercanía de la intersección del eje real negativo hecho por la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ al punto (–1, *j*0). Antes de dar el significado de margen de ganancia, primero se define la ganancia de cruce de la traza de Nyquist y la **frecuencia de cruce de fase.**

▲ La definición de margen de ganancia dada aquí es para funciones de transferencia de fase mínima.

▲ El margen de ganancia se mide al cruce de fase.

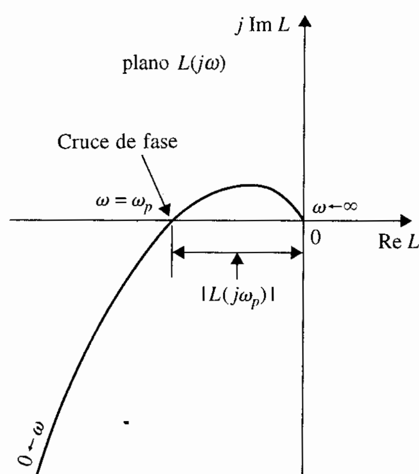
El cruce de fase. Un cruce de fase sobre la traza de $L(j\omega)$ es un punto en el cual la traza se intersecta con el eje real negativo.

Frecuencia de cruce de fase. La frecuencia de cruce de fase ω_p es la frecuencia en el cruce de la fase, o donde:

$$\angle L(j\omega_p) = 180° \qquad (9\text{-}147)$$

La traza de Nyquist de una función de transferencia de lazo de $L(j\omega)$ que es de tipo de fase mínima se muestra en la Fig. 9-55. La frecuencia de cruce de fase se denomina como ω_p, y la magnitud de $L(j\omega)$ en $\omega = \omega_p$ se designa como el valor absoluto de $|L(j\omega_p)|$. Entonces el margen de ganancia del sistema en lazo cerrado que tiene $L(s)$ como su función de transferencia de lazo se define como:

$$\begin{aligned} \text{margen de ganacia} = \text{GM} &= 20\log_{10}\frac{1}{|L(j\omega_p)|} \\ &= -20\log_{10}|L(j\omega_p)| \qquad \text{dB} \end{aligned} \qquad (9\text{-}148)$$





SECRETARIA DE MARINA
ARMADA DE MEXICO
ESCUELA DE INGENIEROS
BIBLIOTECA

Figura 9-55 Definición del margen de ganancia en coordenadas polares.

Con base en esta definición, se pueden obtener las siguientes conclusiones acerca del margen de ganancia del sistema que se muestra en la Fig. 9-55, dependiendo de las propiedades de la traza de Nyquist.

1. La traza $L(j\omega)$ no intersecta al eje real negativo (no hay un cruce de fase no cero finito).

$$|L(j\omega_p)| = 0 \qquad \text{GM} = \infty \text{ dB} \tag{9-149}$$

2. La traza $L(j\omega)$ intersecta al eje real negativo entre (el cruce de fase cae entre) 0 y el punto -1.

$$0 < |L(j\omega_p)| < 0 \qquad \text{GM} > 0 \text{ dB} \tag{9-150}$$

3. La traza $L(j\omega)$ pasa a través del (el cruce de fase está en) punto $(-1, j0)$.

$$|L(j\omega_p)| = 1 \qquad \text{GM} = 0 \text{ dB} \tag{9-151}$$

4. La traza $L(j\omega)$ encierra (el cruce de fase está a la izquierda de) al punto $(-1, j0)$.

$$|L(j\omega_p)| > 1 \qquad \text{GM} < 0 \text{ dB} \tag{9-152}$$

Con base en la discusión anterior, el significado físico de margen de ganancia se puede resumir como:

▲ El margen de ganancia es la cantidad de ganancia en dB que puede ser añadida al lazo antes de que el sistema en lazo cerrado se vuelva inestable.

Margen de ganancia es la cantidad de ganancia en decibeles (dB) que se pueden añadir al lazo antes de que el sistema en lazo cerrado se vuelva inestable.

- ▲ Cuando la traza de Nyquist no intercepta al eje real negativo en una frecuencia no cero finita, el margen de ganancia es infinito en dB; esto significa que, teóricamente, el valor de la ganancia de lazo se puede incrementar al infinito antes de que ocurra la inestabilidad.
- ▲ Cuando la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ pasa a través del punto $(-1, j0)$, el margen de ganancia es 0 dB, lo que implica que la ganancia de lazo no puede crecer más, ya que el sistema está en el margen de inestabilidad.
- ▲ Cuando el cruce de fase está a la izquierda del punto $(-1, j0)$, el margen de fase es negativo en dB, y la ganancia de lazo se debe reducir en el margen de ganancia para alcanzar la estabilidad.

Margen de ganancia de sistemas de fase no mínima.

Se debe tener cuidado al intentar extender el margen de ganancia como medida de la estabilidad relativa para sistemas con funciones de transferencia de lazo de fase no mínima. Para tales sistemas, un sistema puede ser inestable aun cuando el punto de cruce de fase esté a la derecha de $(-1, j0)$, y por tanto, un margen de ganancia positivo puede aún corresponder a un sistema inestable. De todas formas, la cercanía del cruce de fase al punto $(-1, j0)$ todavía da indicación de la estabilidad relativa.

9-14-2 Margen de fase

El margen de ganancia es sólo una representación unidimensional de la estabilidad relativa de un sistema en lazo cerrado. Como el nombre implica, el margen de ganancia indica sólo la estabilidad del sistema con respecto a la variación de la ganancia de lazo. En principio, uno creería que un sistema con margen de ganancia grande debería ser siempre más estable que uno con margen de ganancia pequeño. Desafortunadamente, el margen de ganancia por sí solo es inadecuado para indicar la estabilidad relativa cuando otros parámetros del sistema como la ganancia de lazo están sujetos a variación. Por ejemplo, los dos sistemas representados por las trazas $L(j\omega)$ en la Fig. 9-56 en apariencia tienen el mismo margen de ganancia. Sin embargo, el lugar geométrico de A en realidad corresponde a un sistema más estable que el lugar geométrico de B, ya que cualquier cambio en los parámetros del sistema que afecte la fase de $L(j\omega)$, el lugar geométrico de B se puede alterar fácilmente para encerrar al punto $(-1, j0)$. Aún más, se puede mostrar que el sistema B en realidad tiene un M_r más grande que el sistema A.

Para incluir el efecto de corrimiento de fase sobre la estabilidad, se introduce el **margen de fase (PM)**, que requiere que se den primero las siguientes definiciones:

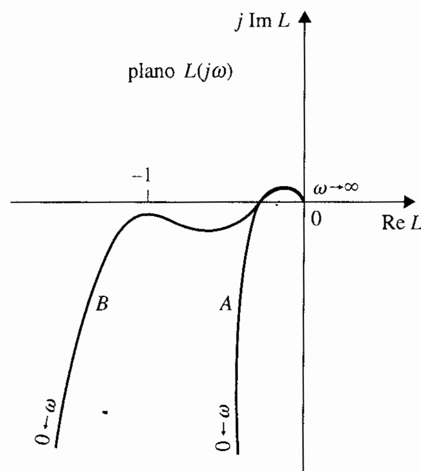


Figura 9-56 Trazas de Nyquist mostrando los sistemas con el mismo margen de ganancia pero diferentes grados de estabilidad relativa.

Cruce de ganancia. El cruce de ganancia es un punto sobre la traza $L(j\omega)$ en el cual la magnitud de $L(j\omega)$ es igual a 1.

Frecuencia del cruce de ganancia. La frecuencia del cruce de ganancia, ω_g es la frecuencia de $L(j\omega)$ en el cruce de ganancia, o donde:

$$|L(j\omega_g)| = 1 \qquad (9\text{-}153)$$

▲ La definición de margen de fase aquí dada es para un sistema con una función de transferencia de fase mínima.

▲ El margen de fase se mide al cruce de ganancia.

La definición del margen de fase se establece como:

El margen de fase (PM) se define como el ángulo en grados que la traza L(jω) se debe rotar alrededor del origen, para que el cruce de ganancia pase por el punto (−1, j0).

La Fig. 9-57 muestra la traza de Nyquist de una traza $L(j\omega)$ de fase mínima típica, y el margen de fase se muestra como el ángulo entre la línea que pasa a través del cruce de ganancia y el origen y el eje real negativo del plano $L(j\omega)$. En contraste al margen de ganancia, que se determina por la ganancia de lazo, el margen de fase indica el efecto sobre la estabilidad del sistema debido a cambios en los parámetros del sistema, que teóricamente alteran la fase de $L(j\omega)$ por una cantidad igual en todas las frecuencias. El margen de fase es la cantidad de retardo puro que se puede añadir al sistema antes de que el sistema en lazo cerrado se vuelva inestable.

Cuando el sistema es del tipo de fase mínima, la expresión analítica del margen de fase, como se observa en la Fig. 9-67, se puede expresar como:

$$\text{Margen de fase (PM)} = \angle L(j\omega_g) - 180° \qquad (9\text{-}154)$$

en donde ω_g es la frecuencia del cruce de ganancia.

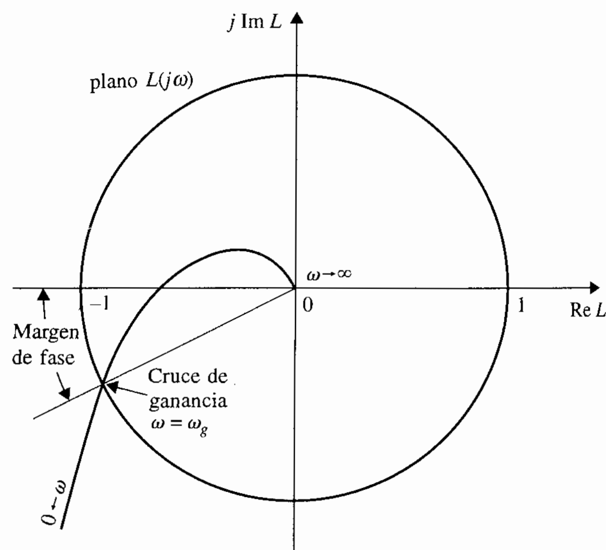


Figura 9-57 Margen de fase definido en el plano $L(j\omega)$

Margen de fase de sistemas de fase no mínima

Se debe tener cuidado cuando se interpreta el margen de fase de la traza de Nyquist de una función de transferencia de fase no mínima. Cuando la función de transferencia de lazo es del tipo de fase no mínima, el cruce de ganancia puede ocurrir en cualquier cuadrante del plano $L(j\omega)$, y la definición del margen de fase dada en la ecuación (9-154) ya no es valida.

Ejemplo 9-14

Como ejemplo ilustrativo sobre los márgenes de ganancia y fase, considere la función de transferencia de lazo de un sistema de control como:

$$L(s) = \frac{2500}{s(s+5)(s+50)} \tag{9-155}$$

La traza de Nyquist de $L(j\omega)$ se muestra en la Fig. 9-58. Los resultados siguientes se obtienen de la traza de Nyquist:

Cruce de ganancia $\omega_g = 6.22$ rad/s
Cruce de fase $\omega_p = 15.88$ rad/s

▲ El margen de fase es la cantidad de fase pura que se puede adicionar antes de que el sistema se vuelva inestable.

El margen de ganancia se mide al cruce de fase. La magnitud de $L(j\omega_p)$ es 0.182. Por tanto el margen de ganancia se obtiene de la ecuación (9-148):

$$\text{GM} = 20\log_{10}\frac{1}{|L(j\omega_p)|} = 20\log_{10}\frac{1}{0.182} = 14.82\text{ dB} \tag{9-156}$$

9-

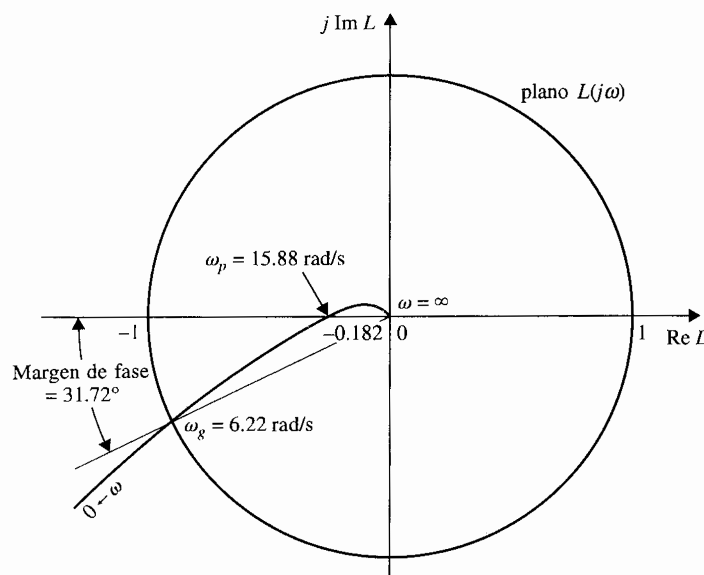


Figura 9-58 Trazas de Nyquist $L(s) = \dfrac{2500}{s(s+5)(s+50)}$.

El margen de fase se mide en el cruce de ganancia. La fase de $L(j\omega_g)$ es 211.72°. Por lo que el margen de fase se obtiene de la ecuación (9-154):

$$PM = \angle L(j\omega_g) - 180° = 211.72° - 180° = 31.72° \quad (9\text{-}157)$$

▲

9-15 Análisis de estabilidad con las trazas de Bode

Las trazas de Bode de una función de transferencia, descritas en el Apéndice A son una herramienta gráfica de suma utilidad para el análisis y diseño de sistemas de control lineales. Antes de la aparición de las computadoras, las trazas de Bode eran a menudo conocidas como "trazas asintóticas" debido a que las curvas de magnitud y fase se podían bosquejar de sus propiedades asintóticas sin detallar las gráficas. Las aplicaciones modernas de las trazas de Bode para sistemas de control se deben identificar con las siguientes ventajas y desventajas.

VENTAJAS DE LAS TRAZAS DE BODE

1. En ausencia de una computadora, las trazas de Bode se pueden bosquejar por la aproximación de magnitud y fase con segmentos de línea recta.

2. El cruce de ganancia, el cruce de fase, el margen de ganancia y el margen de fase se determinan más fácilmente en las trazas de Bode que en la traza de Nyquist.
3. Para propósitos de diseño, los efectos de añadir controladores y sus parámetros se visualizan con mayor facilidad sobre las trazas de Bode que sobre la traza de Nyquist.

DESVENTAJA DE LAS TRAZAS DE BODE

La estabilidad absoluta y relativa de sistemas de fase mínima se pueden determinar desde las trazas de Bode. Por ejemplo, no hay forma de decir qué el ángulo de Φ_{11} para el criterio de Nyquist esté sobre las trazas de Bode.

En referencia a las definiciones de margen de ganancia y margen de fase dadas en las Figs. 9-55 y 9-57, respectivamente, la interpretación de estos parámetros desde las trazas de Bode se ilustra en la Fig. 9-59 para una función de transferencia de lazo de fase mínima típica.

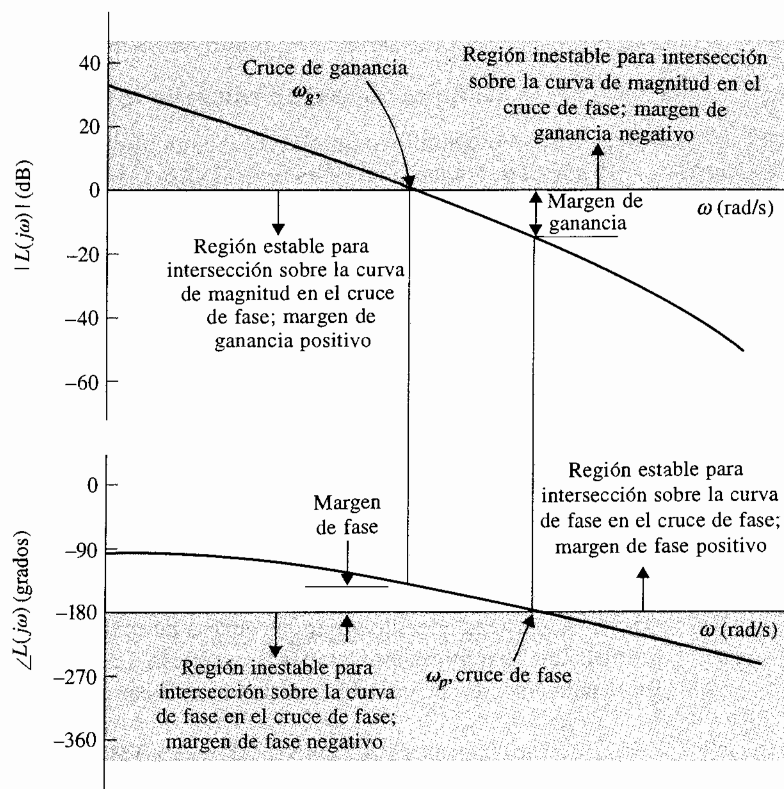


Figura 9-59 Determinación del margen de ganancia y margen de fase sobre las trazas de Bode.

las siguientes observaciones se pueden hacer sobre la estabilidad del sistema con respecto a las propiedades de las trazas de Bode:

▲ Las trazas de Bode son útiles sólo para estudios de estabilidad de sistemas con funciones de transferencia de fase mínima.

1. El margen de ganancia es positivo y el sistema es estable si la magnitud de $L(j\omega)$ al cruce de fase es negativo en dB. Esto es, el margen de ganancia se mide abajo del eje 0-dB. Si el margen se mide arriba del eje 0-dB, el margen de ganancia es negativo y el sistema es inestable.
2. El margen de fase es positivo y el sistema es estable si la fase de $L(j\omega)$ es mayor que $-180°$ en el cruce de ganancia. Esto es, el margen de fase se mide arriba del eje $-180°$. Si el margen de fase se mide abajo del eje $-180°$, el margen de fase es negativo, y el sistema es inestable.

Ejemplo 9-15

Considere la función de transferencia de lazo dada en la ecuación (9-155), las trazas de Bode de la función se dibujan como se muestra en la Fig. 9-60. Los siguientes resultados se observan fácilmente de las trazas de magnitud y fase.

El cruce de ganancia es el punto donde la curva de magnitud intersecta al eje 0-dB. La frecuencia del cruce de ganancia ω_g es 6.22 rad/s. El margen de fase se mide en el cruce de ganancia. El margen de fase se mide desde el eje $-180°$ y es 31.72°. Ya que el margen de fase se mide arriba del eje $-180°$, el margen de fase es positivo y el sistema es estable.

El cruce de fase es el punto donde la curva de fase intersecta al eje $-180°$, La frecuencia del cruce de fase es $\omega_p = 15.88$ rad/s. El margen de ganancia se mide en el cruce de fase y es 14.82 dB. Ya que el margen de ganancia se mide abajo del eje 0-dB, el margen de ganancia es positivo y el sistema es estable. El lector deberá comparar la traza de Nyquist de la Fig. 9-58 con las trazas de Bode de la Fig. 9-60, y la interpretación de ω_g, ω_p, GM, y PM en estas gráficas. ▲

9-15-1 Diagramas de Bode de sistemas con retardos puros

El análisis de estabilidad de sistemas en lazo cerrado con un retardo puro en el lazo se pueden manejar fácilmente con las trazas de Bode. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento estándar.

Ejemplo 9-16

Considere que la función de transferencia de lazo de un sistema en lazo cerrado es:

$$L(s) = \frac{Ke^{T_d s}}{s(s+1)(s+2)} \tag{9-158}$$

La Fig. 9-61 muestra las trazas de Bode de $L(j\omega)$ con $K = 1$ y $T_d = 0$. Se obtienen los siguientes resultados:

Frecuencia de cruce de ganancia = 0.446 rad/s
Margen de fase = 53.4°

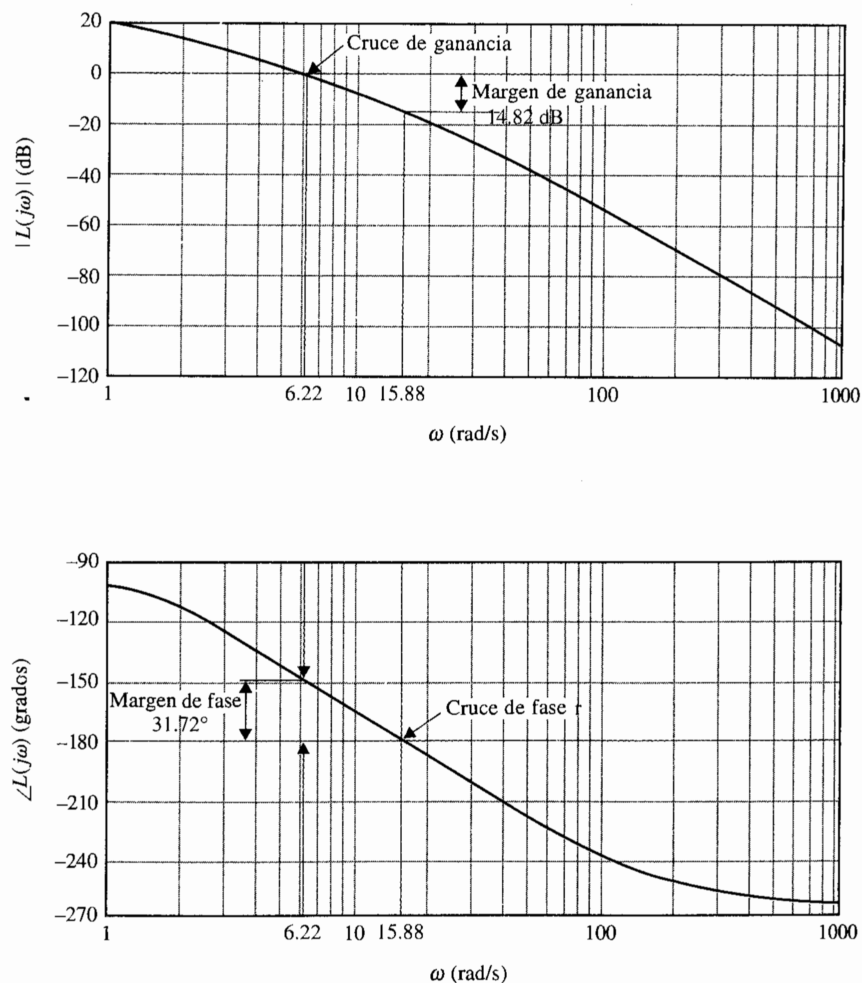


Figura 9-60 Trazas de Bode de $L(s) = \dfrac{2500}{s(s+5)(s+50)}$.

Frecuencia de cruce de fase = 1.416 rad/s.
Margen de ganancia = 15.57 dB

Por lo que el sistema sin el retardo de tiempo es estable.

El efecto del retardo puro es añadir una fase de $-T_d\omega$ radianes en la curva de fase sin que afecte la curva de magnitud. El efecto adverso del retardo sobre la estabilidad es aparente, ya que el corrimiento fase negativa causada por el retardo aumenta rápidamente con el incremento en ω. Para encontrar el valor crítico del tiempo de retardo para la estabilidad se hace que:

$$T_d\omega_g = 53.4^\circ \frac{\pi}{180^\circ} = 0.932 \text{ rad} \tag{9-159}$$

Al resolver para T_d de la ecuación (9-159), se obtiene que el valor crítico de T_d es 2.09 s.

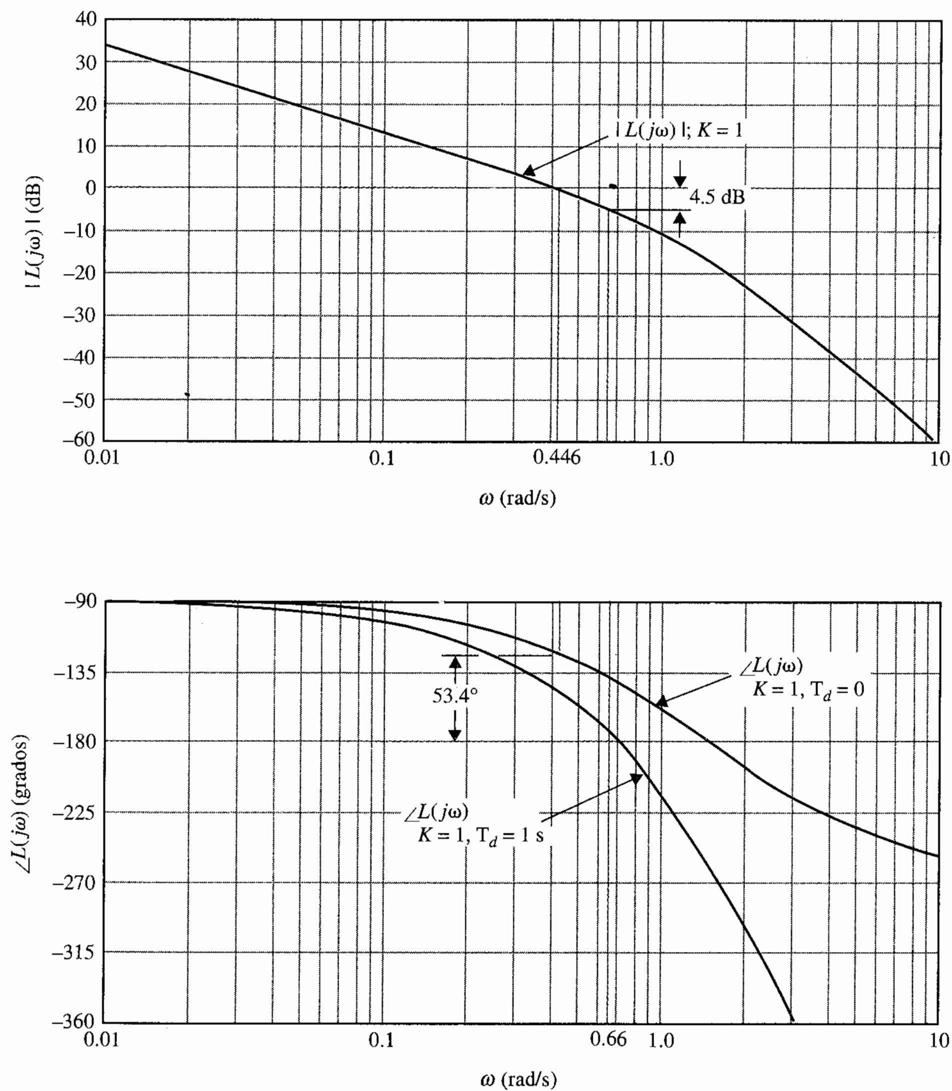


Figura 9-61 Trazas de Bode de $L(s) = Ke^{-T_d s}/[s(s + 1)(s + 2)]$.

Continuando con el ejemplo, se hace que T_d adopte arbitrariamente 1 segundo y se encuentra el valor crítico de K para la estabilidad. La Fig. 9-61 muestra las trazas de Bode de $L(j\omega)$ con este nuevo tiempo de retardo. Con K aún igual a 1, la curva de magnitud no cambia. La curva de fase cae con el incremento en ω, y se obtienen los siguientes resultados:

Frecuencia de cruce de fase = 0.66 rad/s. Margen de ganancia = 4.5 db

Por tanto, empleando la definición de margen de ganancia de la ecuación (9-148), el valor crítico de K para la estabilidad es $10^{4.5/20} = 1.68$. ▲

9-16 Estabilidad relativa relacionada con la pendiente de la curva de magnitud de las trazas de Bode

Además de GM, PM, y M_r como medidas de estabilidad relativa, la pendiente de la curva de las trazas de Bode de la función de transferencia de lazo en la ganancia de cruce que también da una indicación cualitativa sobre la estabilidad relativa del sistema en lazo cerrado. Por ejemplo, en la Fig. 9-60, si la ganancia de lazo del sistema disminuye desde un valor nominal, la curva de magnitud se recorre hacia abajo, mientras que la curva de fase permanece sin cambio. Esto causa que la frecuencia de cruce de ganancia sea menor, y la pendiente de la curva de magnitud en esta frecuencia es menos negativa; el margen de fase correspondiente se incrementa. Por otra parte, si la ganancia de lazo se incrementa, la frecuencia de cruce de ganancia se incrementa y la pendiente de la curva de magnitud es más negativa. Esto corresponde a un margen de fase más pequeño y el sistema es menos estable. La razón de estas evaluaciones de estabilidad es muy simple. Para una función de transferencia de fase mínima, la relación entre la magnitud y fase es única. Ya que la pendiente negativa de la curva de magnitud es un resultado de tener más polos que ceros en la función de transferencia, la fase correspondiente también es negativa. En general, mientras más plana es la pendiente de la curva de magnitud, más negativa es la fase. Por tanto, si el cruce de ganancia está en un punto donde la pendiente de la curva de magnitud es plana, esto corresponde a un margen de fase que será pequeño o negativo.

9-16-1 Sistemas condicionalmente estables

Los ejemplos ilustrativos dados hasta ahora no son complicados en el sentido de que las pendientes de las curvas de magnitud y fase decrecen monotonicamente conforme ω se incrementa. El siguiente ejemplo ilustra un **sistema condicionalmente estable** que pasa de condición de estable a inestable conforme la ganancia de lazo varía.

Ejemplo 9-17

Considere que la función de transferencia de lazo de un sistema en lazo cerrado es:

$$L(s) = \frac{100K(s + 5)(s + 40)}{s^3(s + 100)(s + 200)} \tag{9-160}$$

Las trazas de Bode de $L(j\omega)$ se muestran en la Fig. 9-62 para $K = 1$. Se obtienen los siguientes resultados sobre la estabilidad del sistema:

Frecuencia de cruce de ganancia = 1 rad/s. Margen de fase = −78°

Hay dos cruces de fase: uno en 25.8 rad/s. y el otro en 77.7 rad/s. Las características de fase entre estas dos frecuencias indican que si el cruce de ganancia está en este rango, el sistema sería estable. De la curva de magnitud, el rango para la operación estable se encuentra entre 69 y 85.5 dB. Para los valores de K arriba y abajo de este intervalo; la fase de $L(j\omega)$ es menor que −180°, y el sistema es inestable. Este

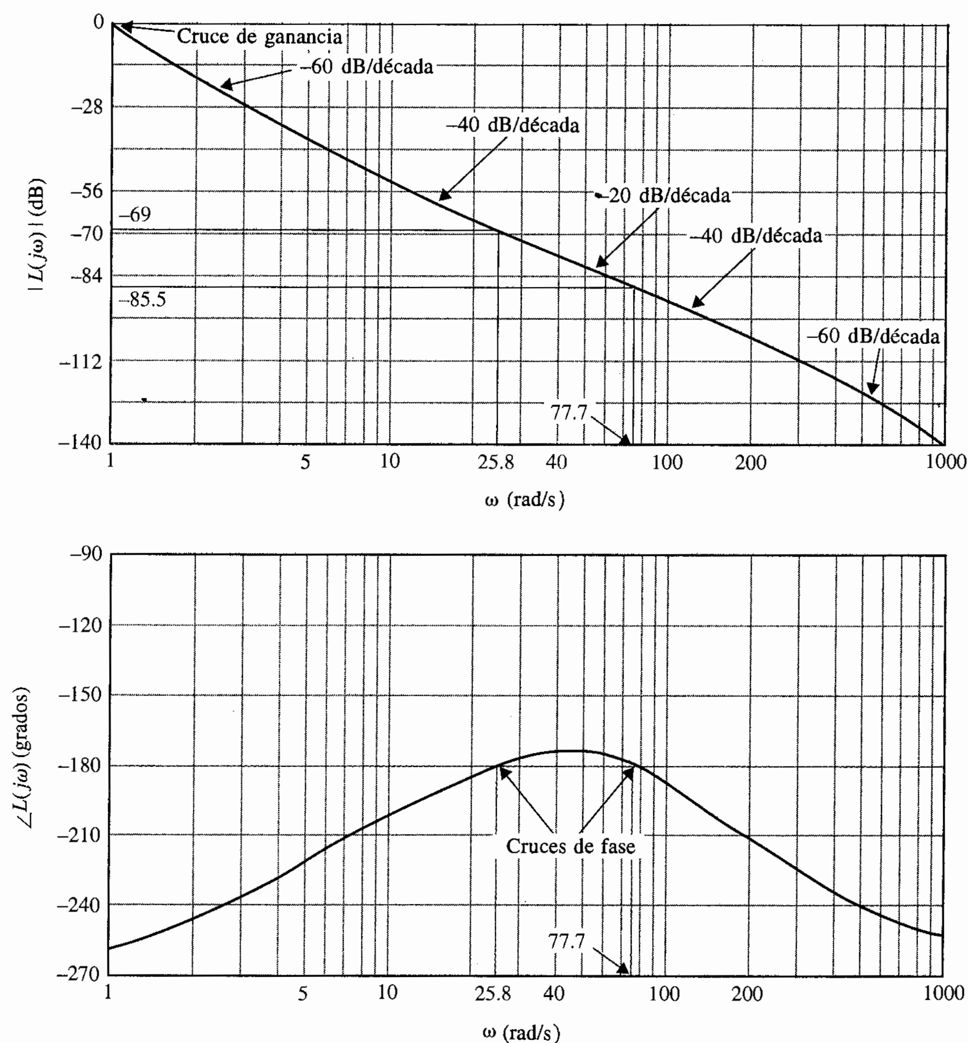


Figura 9-62 Trazas de Bode de:

$$L(s) = \frac{100K(s+5)(s+40)}{s^3(s+100)(s+200)} \qquad K = 1$$

ejemplo sirve como un buen ejemplo de la relación entre la estabilidad relativa y la pendiente de la curva de magnitud en la ganancia de cruce. Como se observa de la Fig. 9-62, tanto en las frecuencias altas como en las bajas, la pendiente de la curva de magnitud es –60 dB/década; si el cruce de ganancia cae en cualquiera de estas dos regiones, el margen de fase es negativo y el sistema es inestable. Si las dos secciones de la curva de magnitud tienen una pendiente de –40 dB/década, el sistema es estable

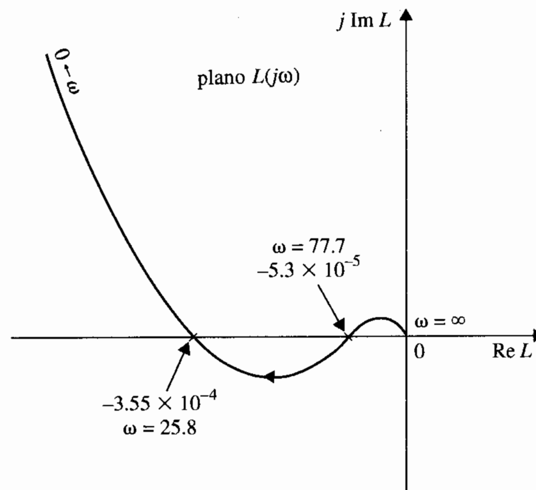


Figura 9-63 Traza de Nyquist de:

$$L(s) = \frac{100K(s+5)(s+40)}{s^3(s+100)(s+200)} \qquad K = 1$$

9

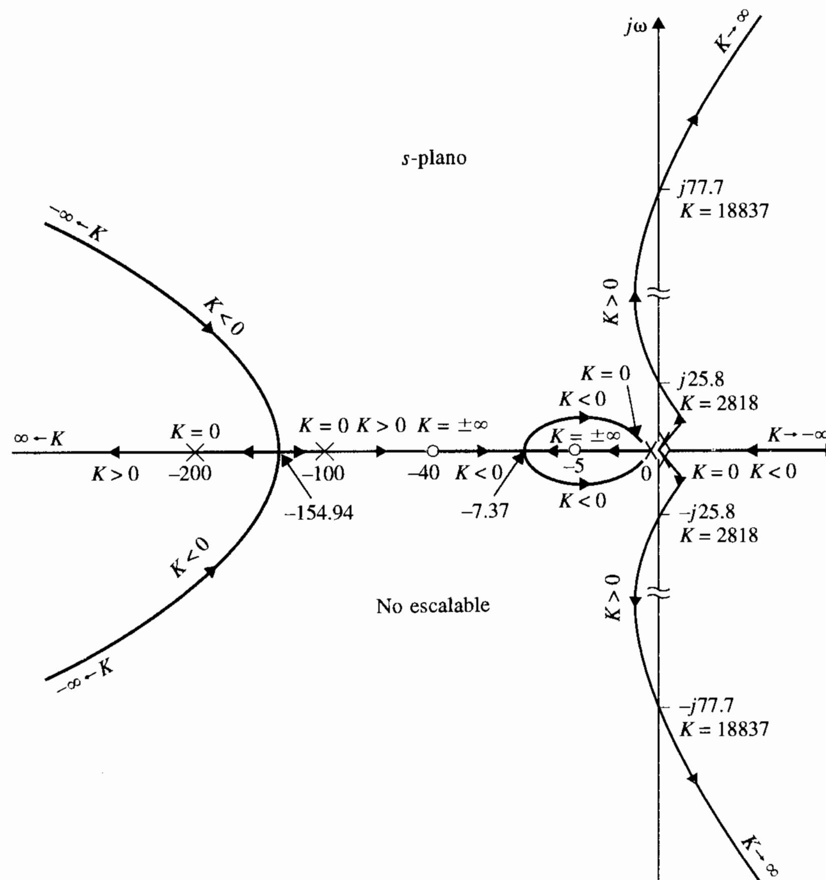


Figura 9-64 Lugar geométrico de las raíces de $G(s) = [100K(s + 5)(s + 40)]/[s^3(s + 100)(s + 200)]$.

sólo si el cruce de ganancia cae alrededor del punto de la mitad de estas regiones, pero aún entonces, el margen de fase es pequeño. Si la ganancia de cruce cae en la región en donde la curva de magnitud tiene una pendiente de –20 dB/década, el sistema es estable.

La Fig. 9-63 muestra la traza de Nyquist de $L(j\omega)$. Es interesante comparar los resultados sobre la estabilidad obtenida de las trazas de Bode y de la traza de Nyquist. El diagrama del lugar geométrico de las raíces del sistema se muestra en la Fig. 9-64. El lugar geométrico de las raíces da una imagen clara sobre la condición de estabilidad del sistema con respecto a K. El número de cruces del lugar geométrico de las raíces sobre el eje $j\omega$ del plano s es igual al número de cruces de la curva de fase de $L(j\omega)$ del eje –180° de las trazas de Bode, y el número de cruces de la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ con el eje real negativo. El lector deberá verificar los margenes de ganancia que obtuvieron a partir de las trazas de Bode y las coordenadas de los puntos de cruce sobre el eje real negativo de la traza de Nyquist con los valores de K en el cruce del lugar geométrico de las raíces con el eje $j\omega$. ▲

9-17 Análisis de estabilidad con la traza de magnitud-fase

La traza de magnitud-fase descrita en la Sec. A-3 del Apéndice A, es otra forma de gráfica en el dominio de la frecuencia, que tiene ciertas ventajas de análisis y diseño en el dominio de la frecuencia. La traza de magnitud-fase de una función de transferencia $L(j\omega)$ se hace en el valor absoluto de $|L(j\omega)|$ (dB) contra $\angle L(j\omega)$ (grados). El diagrama de magnitud-fase de la función de transferencia de la ecuación (9-155) se construye en la Fig. 9-65 empleando los datos de las trazas de Bode de la Fig. 9-60. Los cruces de ganancia y fase y los márgenes de ganancia y fase se indican con claridad sobre el diagrama de magnitud-fase de $L(j\omega)$.

- ▲ El punto crítico es la intersección del eje 0-dB y el eje –180°.
- ▲ El cruce de fase es donde el lugar geométrico intercepta al eje –180°.
- ▲ El cruce de ganancia es donde el lugar geométrico intercepta al eje 0-dB.
- ▲ El margen de ganancia es la distancia vertical en dB medida del cruce de fase al punto crítico.
- ▲ El margen de fase es la distancia horizontal en grados medida del cruce de ganancia al punto crítico.

Las regiones en las cuales los cruces de fase y ganancia deben localizarse para estabilidad también están indicados. Ya que el eje vertical del módulo de $|L(j\omega)|$ está en dB, cuando la ganancia de lazo de $L(j\omega)$ cambia, el lugar geométrico sólo se corre hacia arriba o hacia abajo a lo largo del eje vertical. En forma similar, cuando una fase constante se añade a $L(j\omega)$, el lugar geométrico es corrido de manera horizontal sin distorsión de la curva. Si $L(j\omega)$ contiene un retardo puro T_d, el efecto de éste es añadir una fase igual a $-\omega T_d \times 180°/\pi$ a lo largo de la curva.

Otra ventaja de emplear la traza de magnitud-fase es que para **sistemas con realimentación unitaria,** los parámetros del sistema en lazo cerrado, tales como M_r, ω_r, y

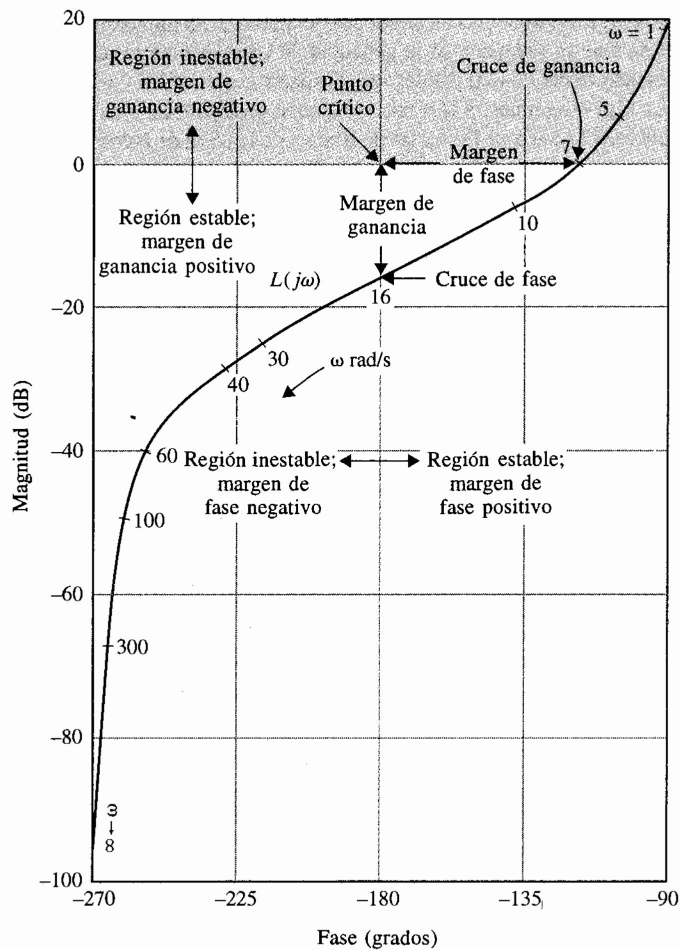


Figura 9-65 Traza de ganancia-fase de $L(s) = 10/[s(1 + 0.2s)(1 + 0.02s)]$.

BW se pueden determinar de la traza con la ayuda del lugar geométrico de M constante. Estos parámetros de desempeño en lazo cerrado no están representados en las trazas de Bode de la función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema con realimentación unitaria.

9-18 Lugar geométrico de *M* constante en el plano *G*(*jω*)

Anteriormente se señaló que de forma analítica el pico de resonancia M_r y el ancho de banda BW son difíciles de obtener para sistemas de orden superior, y las trazas de Bode proveen información sobre el sistema en lazo cerrado sólo en la forma de margen de ganancia y mar-

gen de fase. Es necesario desarrollar un método gráfico para la determinación de M_r, ω_r, y BW empleando la función de transferencia de la trayectoria directa $G(j\omega)$. Como se observará en el siguiente desarrollo, el método es en directo aplicable sólo a sistemas con realimentación unitaria, aun cuando con algunas modificaciones también se puede aplicar a sistemas con realimentación no unitaria.

Considere que $G(s)$ es la función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema con realimentación unitaria. La función de transferencia de lazo es:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \tag{9-161}$$

Para un estado senoidal permanente, se substituye s por $j\omega$; $G(s)$ se convierte en:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \text{Re}G(j\omega) + j\text{Im}G(j\omega) \\ &= x + jy \end{aligned} \tag{9-162}$$

donde para simplicidad, x denota $\text{Re}G(j\omega)$ y y denota $\text{Im}G(j\omega)$. La magnitud de la función de transferencia en lazo cerrado se escribe:

$$|M(j\omega)| = \left|\frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}\right| = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(1 + x)^2 + y^2}} \tag{9-163}$$

Para facilidad de notación, sea M que denota $|M(j\omega)|$; entonces la ecuación (9-163) lleva a:

$$M\sqrt{(1 + x)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{9-164}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación (9-164) se obtiene:

$$M^2[(1 + x)^2 + y^2] = x^2 + y^2 \tag{9-165}$$

Rearreglando esta última ecuación se obtiene:

$$(1 - M^2)x^2 + (1 - M^2)y^2 - 2M^2x = M^2 \tag{9-166}$$

Esta ecuación se condiciona al dividir entre $(1 - M^2)$ y sumar el término $[M^2/(1 - M^2)]^2$ en ambos miembros. Se tiene:

$$x^2 + y^2 - \frac{2M^2}{1 - M^2}x + \left(\frac{M^2}{1 - M^2}\right)^2 = \frac{M^2}{1 - M^2} + \left(\frac{M^2}{1 - M^2}\right)^2 \tag{9-167}$$

que por último simplifica a:

$$\left(x - \frac{M^2}{1 - M^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{M}{1 - M^2}\right)^2 \qquad M \neq 1 \tag{9-168}$$

Para un valor dado de M, la ecuación (9-168) representa un círculo con centro en:

$$x = \text{Re}\, G(j\omega) = \frac{M^2}{1 - M^2} \qquad y = 0 \tag{9-169}$$

El radio del círculo es:

$$r = \left|\frac{M}{1 - M^2}\right| \tag{9-170}$$

La ecuación (9-168) es válida para $M = 1$. Para $M = 1$, la ecuación (9-165) da:

$$x = \text{Re}\, G(j\omega) = -\tfrac{1}{2} \tag{9-171}$$

que es la ecuación de una línea recta paralela al eje $j\,\text{Im}G(j\omega)$ y que pasa a través del punto $\left(-\frac{1}{2}, j0\right)$ en el plano $G(j\omega)$.

Cuando M toma diferentes valores, la ecuación (9-168) describe en el plano $G(j\omega)$, una familia de círculos que se llaman **lugar geométrico de M constante,** o **círculos de M constante.** La Fig. 9-66 ilustra un conjunto típico de círculos M constante en el plano $G(j\omega)$. Estos círculos son simétricos con respecto a la línea $M = 1$ y al eje real. Los círculos a la izquierda del lugar geométrico $M = 1$ corresponden a valores de M mayores que 1, y aquellos a la derecha de la línea $M = 1$ son para M menor que 1. Las ecuaciones (9-168) y (9-169) muestran que cuando M se vuelve infinita, el círculo degenera en el punto $(-1, j0)$.

Gráficamente, la intersección de la curva $G(j\omega)$ y el círculo M constante da el valor de M en la frecuencia correspondiente sobre la curva de $G(j\omega)$. Si se quiere mantener el valor de M_r menor que cierto valor, la curva $G(j\omega)$ no debe interceptar al círculo correspondiente de M en cualquier punto, y al mismo tiempo no debe encerrar al punto $(-1, j0)$. El círculo M constante con el menor radio que es tangente a la curva $G(j\omega)$ da el valor de M_r, y la frecuencia de resonancia ω_r se lee del punto tangente sobre la curva $G(j\omega)$.

La Fig. 9-67(a) ilustra la traza de Nyquist de $G(j\omega)$ para un sistema de control con realimentación unitaria, junto con varios lugares geométricos de M constante. Para una ganancia de lazo $K = K_1$, las intersecciones entre la curva $G(j\omega)$ y el lugar geométrico de M constante dan los puntos sobre la curva del módulo de $|M(j\omega)|$ en función de ω. El pico de resonancia M_r, se encuentra localizado en el círculo más pequeño que es tangente a la curva $G(j\omega)$. La frecuencia de resonancia se encuentra en el punto de tangencia y se designa como ω_{r1}. Si la ganancia de lazo se incrementa a K_2 y si el sistema es aún estable, un círculo M constante con el menor radio que corresponde a la mayor M se encuentra tangente a la curva $G(j\omega)$, y por tanto el pico de resonancia será mayor. La frecuencia de resonancia se muestra

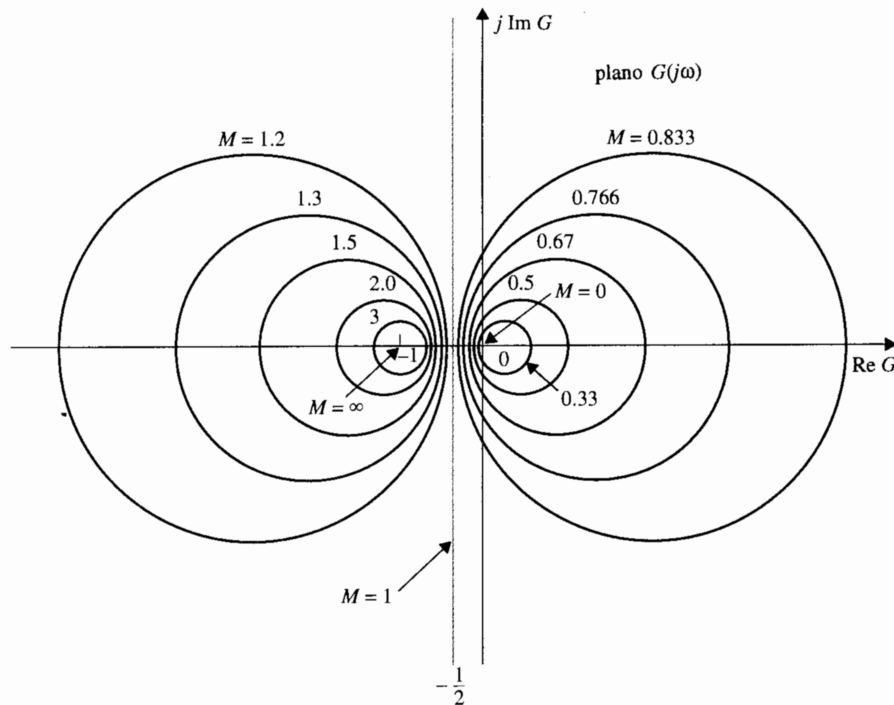


Figura 9-66 Círculos de M constante en coordenadas polares.

▲ Cuando el sistema es inestable, el lugar geométrico de M constante y de M_r dejan de tener sentido.

como ω_{r2}, que está más cercana a la frecuencia de cruce de fase ω_p que a ω_{r1}. Cuando K se incrementa a K_3, de tal forma que la curva $G(j\omega)$ ahora pasa a través del punto $(-1, j0)$ el sistema es marginalmente estable y M_r es infinita; ω_{p3} es ahora la misma que la frecuencia de resonancia ω_r. Cuando se obtienen los suficientes puntos de intersección entre la curva $G(j\omega)$ y el lugar geométrico de M constante, las curvas magnificadas del módulo $|M(j\omega)|$ en función de ω se grafican como se muestra en la Fig. 9-67(b).

El ancho de banda del sistema en lazo cerrado se encuentra en la intersección de la curva $G(j\omega)$ y el lugar geométrico $M = 0.707$. Para valores de K mayores que K_3, el sistema es inestable, y el lugar geométrico de M constante y M_r ya no tiene sentido.

9-19 Lugar geométrico de fase constante en el plano $G(j\omega)$

El lugar geométrico de fase constante de un sistema en lazo cerrado se puede graficar en el plano $G(j\omega)$ a través de un método similar al usado para graficar el lugar geométrico de M constante. En general, la información de fase del sistema en lazo cerrado rara vez se utiliza en el análisis y diseño, ya que la información sobre M_r, ω_r, y BW se obtiene de la curva de

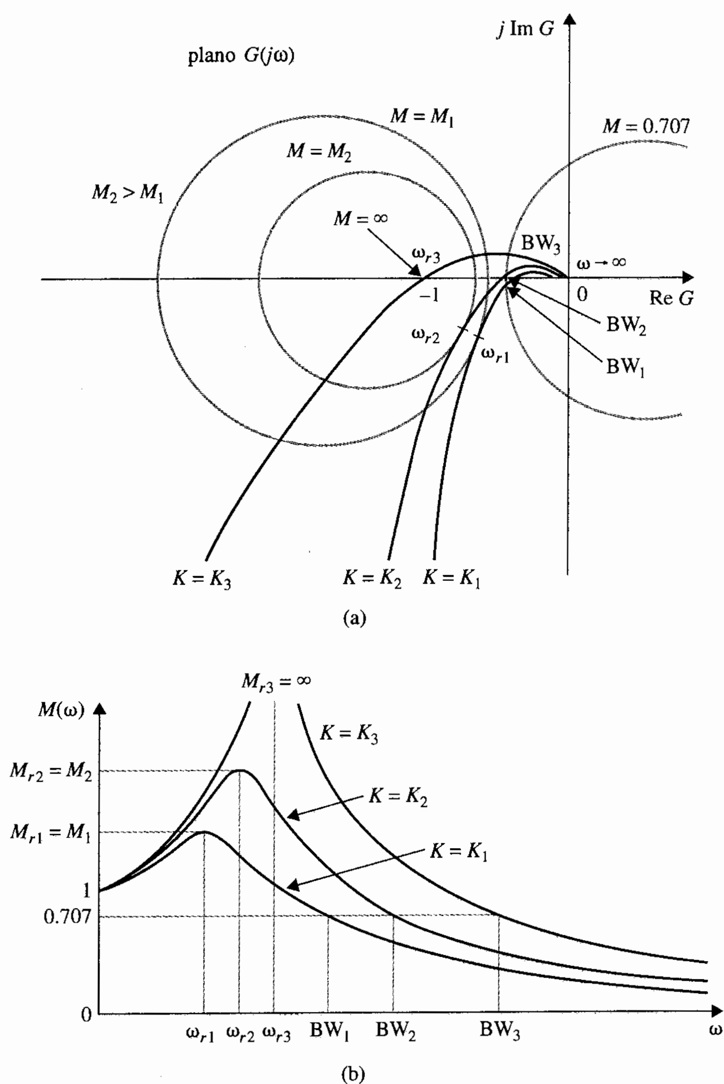


Figura 9-67 a) Trazas polares de $G(s)$ y lugar geométrico de M constante. (b) Curvas magnificadas correspondientes.

magnitud. La Fig. 9-68 muestra un conjunto de lugares geométricos de fase constante que se llama **círculos de N constante** en el plano $G(j\omega)$. Estos círculos se describen por la ecuación:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4N^2} \qquad (9\text{-}172)$$

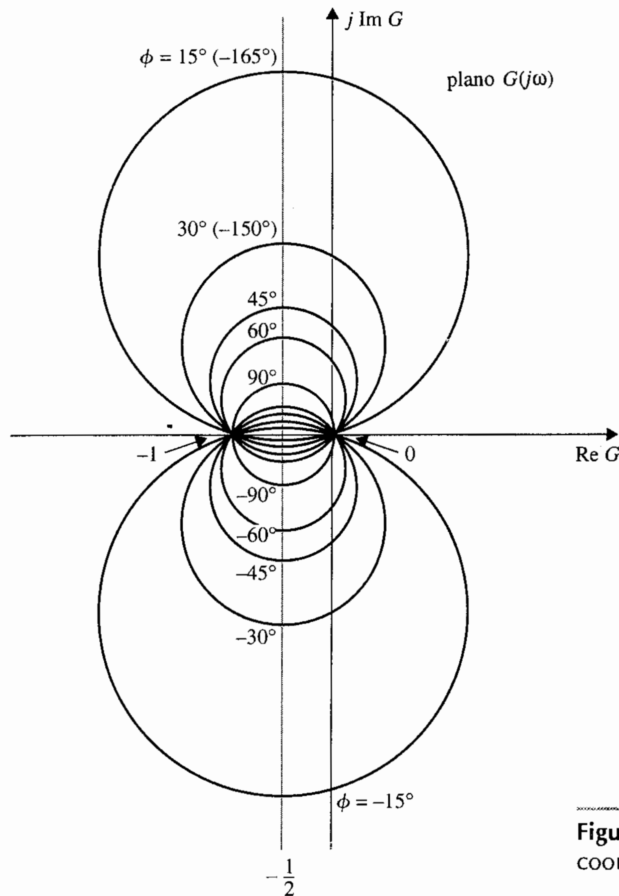


Figura 9-68 Círculos de *N* constante en coordenadas polares.

donde *N* es el ángulo de fase en grados. Los centros de estos círculos están en $(x, y) = (-1/2, 1/2N)$. El radio está dado por:

$$r = \left(\frac{N^2 + 1}{4N^2}\right)^{1/2} \tag{9-173}$$

9-20 Lugar geométrico de *M* constante en el plano magnitud-fase: La carta de Nichols

Una de las mayores desventajas al trabajar en coordenadas polares de la traza de Nyquist de $G(j\omega)$ es que la curva ya no retiene su forma original cuando una modificación simple tal como el cambio de ganancia de lazo se hacen al sistema. Frecuentemente, en situaciones de

troladores al sistema. Esto requiere una reconstrucción completa de la traza de Nyquist de la $G(j\omega)$ modificada. Para el trabajo de diseño que involucra a M_r y BW como especificaciones, es más conveniente trabajar con la traza de magnitud-fase $G(j\omega)$, ya que cuando la ganancia de lazo es alterada, la curva $G(j\omega)$ completa se corre hacia arriba o hacia abajo en forma vertical, sin distorsión. Cuando las propiedades de fase de $G(j\omega)$ se cambian de forma independiente, sin afectar la ganancia, la traza de magnitud-fase se afecta sólo en dirección horizontal.

Por la razón anterior, el lugar geométrico de M constante en las coordinadas polares se transfiere a las coordenadas magnitud-fase, y el lugar geométrico resultante forma una **carta de Nichols.** Una carta de Nichols típica del lugar geométrico de M constante se muestra en la Fig. 9-69. El lugar geométrico de N constante se puede transferir de manera similar, si es necesario.

▲ BW es la frecuencia donde la curva $G(j\omega)$ intersecta el lugar de $M = 0.707$ del lugar geométrico de M constante.

Una vez que la curva $G(j\omega)$ del sistema se construye en la carta de Nichols, las intersecciones entre el lugar geométrico de M constante y la trayectoria $G(j\omega)$ dan el valor de M a las frecuencias correspondientes de $G(j\omega)$. El pico de resonancia M_r se encuentra al localizar el lugar geométrico más pequeño de M constante ($M \geq 1$) que es tangente a la curva $G(j\omega)$. La frecuencia de resonancia es la frecuencia de $G(j\omega)$ en el punto de tangencia. *El ancho de banda del sistema en lazo cerrado es la frecuencia en la cual la curva $G(j\omega)$ intercepta al lugar geométrico $M = 0.707$ (-3 dB).*

El ejemplo siguiente ilustra la relación entre los métodos de análisis empleando las trazas de Bode, la traza de magnitud-fase, y la carta de Nichols.

Considere el sistema de control de posición de las superficies control de la aeronave analizada en la

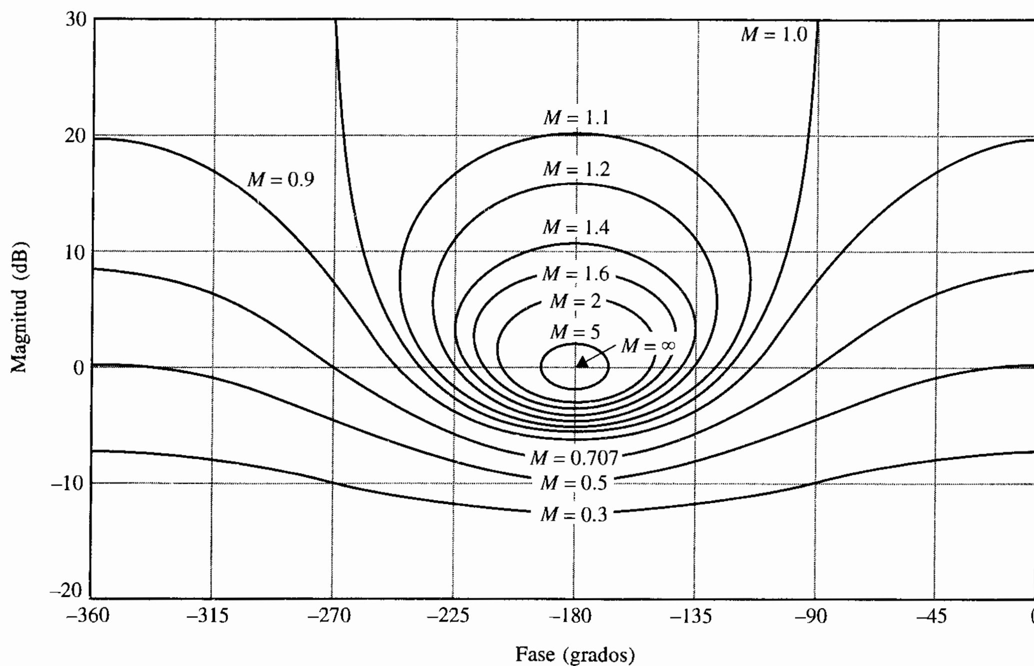


Figura 9-69 Carta de Nichols.

Ejemplo 9-18

sección 7-6. La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema con realimentación unitaria está dada en la ecuación (7-137) y se repite aquí.

$$G(s) = \frac{1.5 \times 10^7 K}{s(s + 400.26)(s + 3008)} \tag{9-174}$$

Las trazas de Bode para $G(j\omega)$ se muestran en la Fig. 9-70 para $K = 7.248$, 14.5, 181.2 y 273.57. Los márgenes de ganancia y fase del sistema de lazo cerrado para estos valores de K se determinaron y se

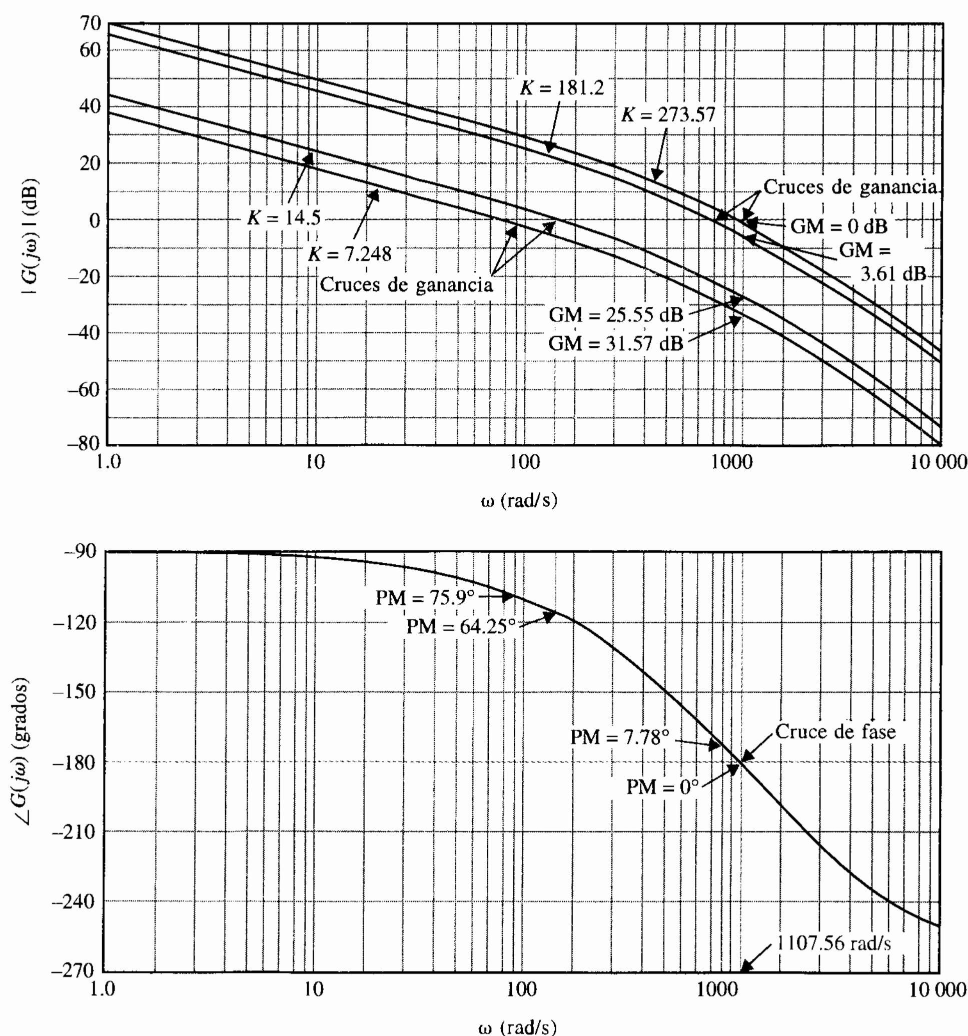


Figura 9-70 Trazas de Bode del sistema en el ejemplo 9-18.

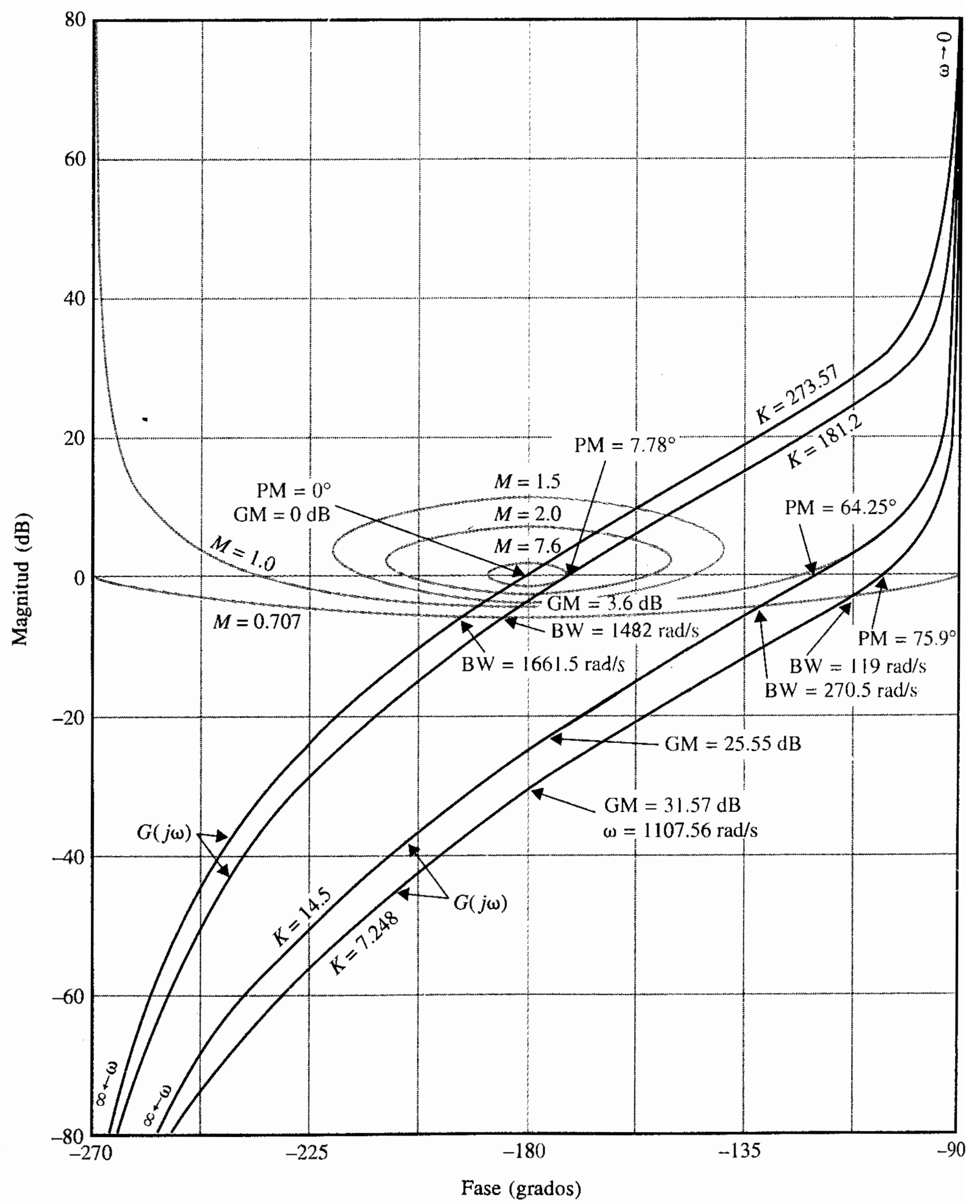


Figura 9-71 Trazas de ganancia-fase del sistema en el ejemplo 9-18.

se muestran sobre las trazas de Bode. Las gráficas de magnitud-fase de $G(j\omega)$ correspondiente a las trazas de Bode se muestran en la Fig. 9-71. Estas trazas de magnitud-fase, junto con la carta de Nichols, dan información sobre el pico de resonancia M_r, la frecuencia de resonancia ω_r, y el ancho de banda BW. Los márgenes de ganancia y fase también están claramente marcados en las trazas de magnitud-fase. La Fig. 9-72 muestra las respuestas en frecuencias en lazo cerrado. La tabla 9-2 resume los

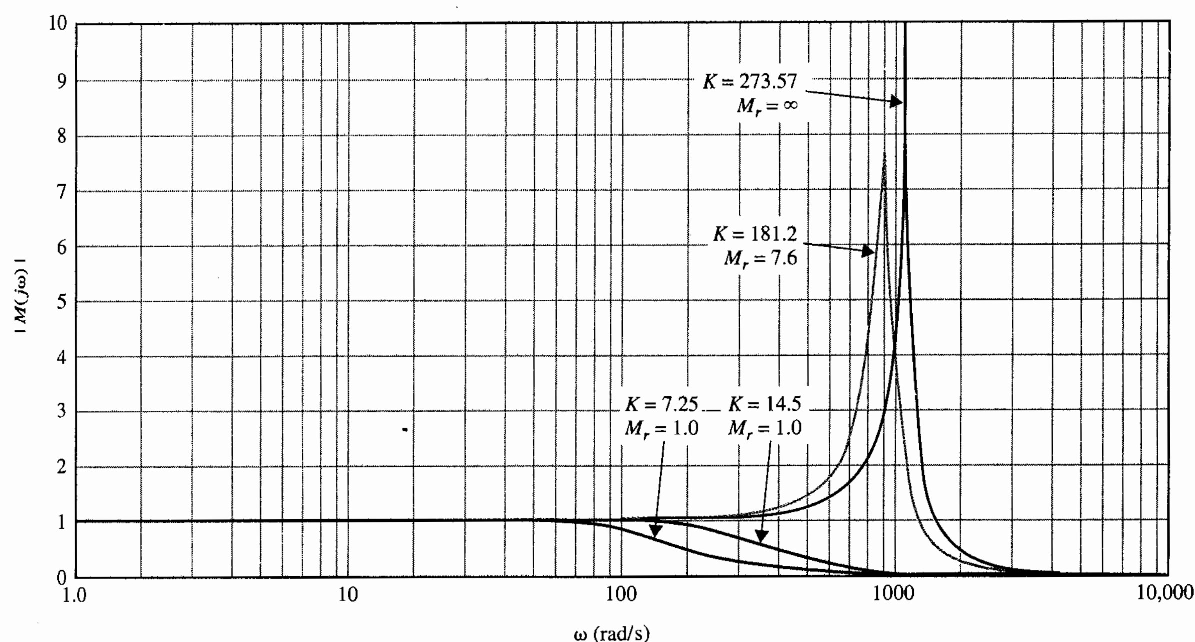


Figura 9-72 Respuesta en frecuencia en lazo cerrado del sistema en el ejemplo 9-18.

resultados del análisis en el dominio de la frecuencia para los cuatro diferentes valores de K, junto con los sobrepasos máximos en el dominio del tiempo determinados en la Sec. 7-6. ▲

9-21 Soluciones por computadora

Las trazas de Bode, la traza de Nyquist y la traza de magnitud-fase con análisis en la carta de Nichols se pueden realizar con programas de computadora que se tengan disponibles. La

Tabla 9-2 Resumen del análisis en el dominio de la frecuencia

K	Máximo sobrepaso (%)	M_r	ω_r (rad/s)	Margen de ganancia (dB)	Margen de fase (grados)	BW (rad/s)
7.25	0	1.0	1.0	31.57	75.9	119.0
14.5	4.3	1.0	43.33	25.55	64.25	270.5
181.2	15.2	7.6	900.00	3.61	7.78	1402.0
273.57	100.0	∞	1000.00	0	0	1661.5

siguiente ilustración se realizó con las funciones en la caja de herramientas de **CSAD.** El sistema descrito en la ecuación (9-174) en el ejemplo 9-18 se emplea con $K = 181.2$.

Bplot

La función **bplot** de la caja de herramientas **CSAD** calcula la respuesta frecuencia en magnitud (dB) y en fase (grados), y grafica las trazas de Bode. Al ingresar **bplot** <CR> en el prompt de **CSAD** >>, el programa responde:

```
Enter Numerator polynomial vector>271.8e7<CR>

Enter Denominator polynomial vector>pmult([1 0],[1 400.26],[1 3008])<CR>

Enter START frequency w=10^k1, k1 = [-1]>0 <CR>
(Choose 1 rad/sec)

Enter END frequency w=10^k2, k2 = [1]>4 <CR>
(Choose 10,000 rad/sec)


           - BODEPLOT OPTIONS -

           Amplitude          Freq range
           Phase              Time delay
           Both               New TF
           Zoom in            Display TF
           Set axes           Margins
           Grid               Roots
           Hold               View Data
           Label              Quit

Option?>b<CR>     (Select to plot both amplitude and phase plots)
```

Las trazas de amplitud y fase de $G(j\omega)$ se grafican en la pantalla del monitor como se muestra en la Fig. 9-73. Las trazas de amplitud y fase se pueden hacer por separado seleccionando "Amplitud" y "Fase", respectivamente. Al seleccionar "Márgenes", la información de desempeño se calcula y despliega.

```
Gain margin, dB                3.581
Phase crossover, rad/sec       1098
Phase margin, degrees          7.779
Gain crossover, rad/sec        888.9
Peak resonance, dB             17.4
Peak resonance, |Mr|           7.412
3 dB bandwidth, rad/sec        1.383
```

El programa cuenta con una opción para añadir un retardo puro a $G(s)$.

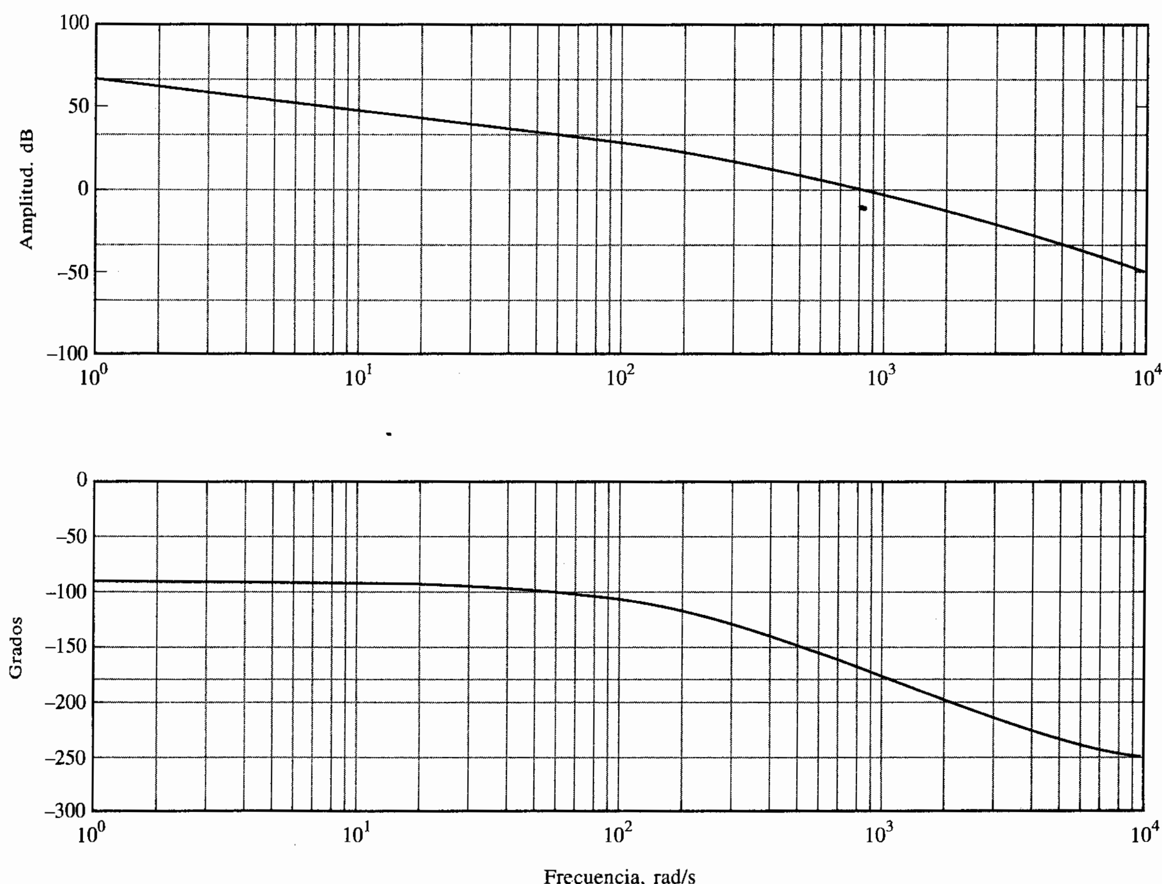


Figura 9-73 Trazas de Bode de la función de transferencia en la ecuación (9-174) con $K = 181.2$ mediante el **Bode plot** de **CSAD.**

Plrplot

La función **plrplot** de la caja de herramientas **CSAD** calcula la respuesta en frecuencia de $G(j\omega)$ y grafica los datos en coordenadas polares. El programa regresa los mismos "márgenes" como los dados anteriormente. Las trazas de Bode de la función en la ecuación (9-174) con $K = 181.2$ se grafican en la Fig. 9-74 después de hacer un "acercamiento" para seleccionar la porción significativa de la traza.

Mvpplot

La función **mvpplot** calcula la respuesta en frecuencia de $G(j\omega)$ y grafica los datos en las coordenadas de amplitud-fase. La Fig. 9-75 muestra la traza amplitud-fase de la función de transferencia en la ecuación (9-174) con $K = 181.2$, junto con la carta de Nichols. El programa calcula los mismos márgenes tal como en **bplot** y **plrplot.**

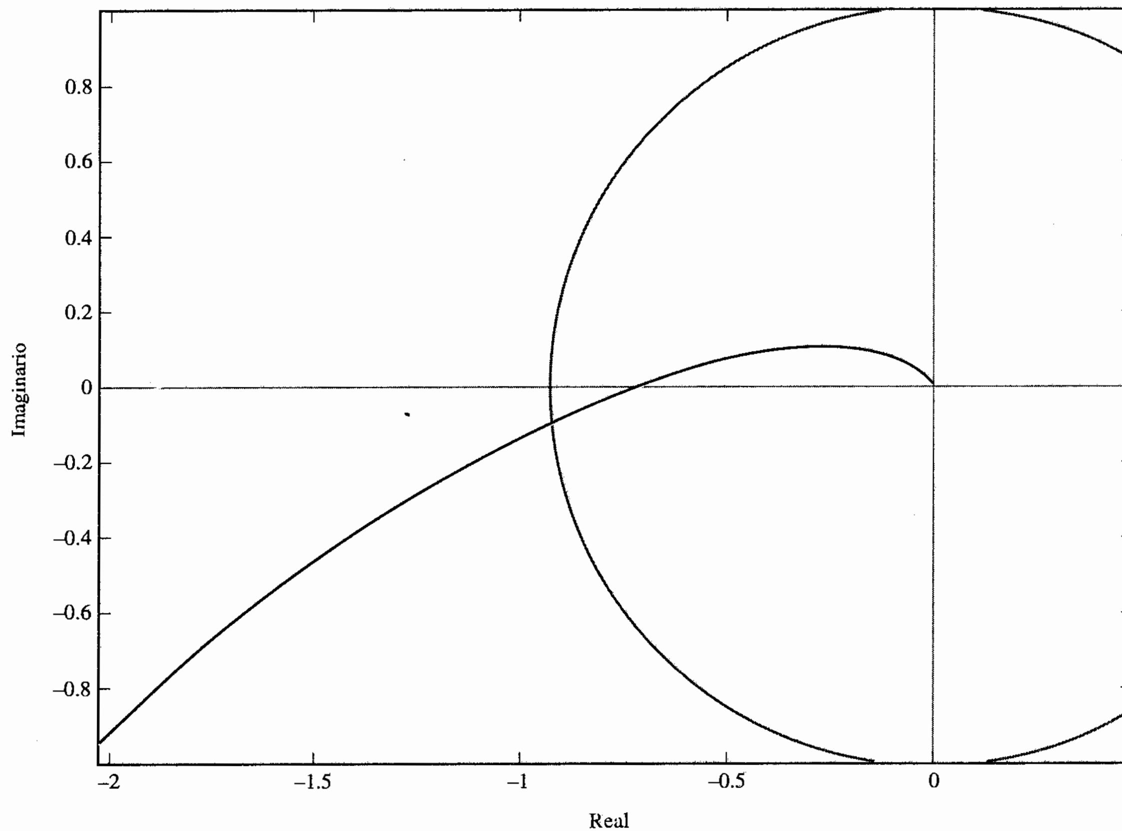


Figura 9-74 Traza de Nyquist de la función de transferencia en la ecuación (9-174) con $K = 181.2$ mediante el **plrplot** de **CSAD.**

La función **fddesign** de la caja de herramientas **CSAD** también se puede utilizar para el análisis en el dominio de la frecuencia. El programa está preparado para el diseño de controladores de atraso y adelanto; al hacer que la función de transferencia del controlador sea la unidad, se puede emplear también para propósitos de análisis.

9-22 La carta de Nichols aplicada a sistemas de realimentación no unitaria

El lugar geométrico de M constante y la carta de Nichols que se presentaron en la sección anterior están limitados a sistemas en lazo cerrado con realimentación unitaria cuya función de transferencia está dada por la ecuación (9-161). Cuando un sistema tiene realimentación

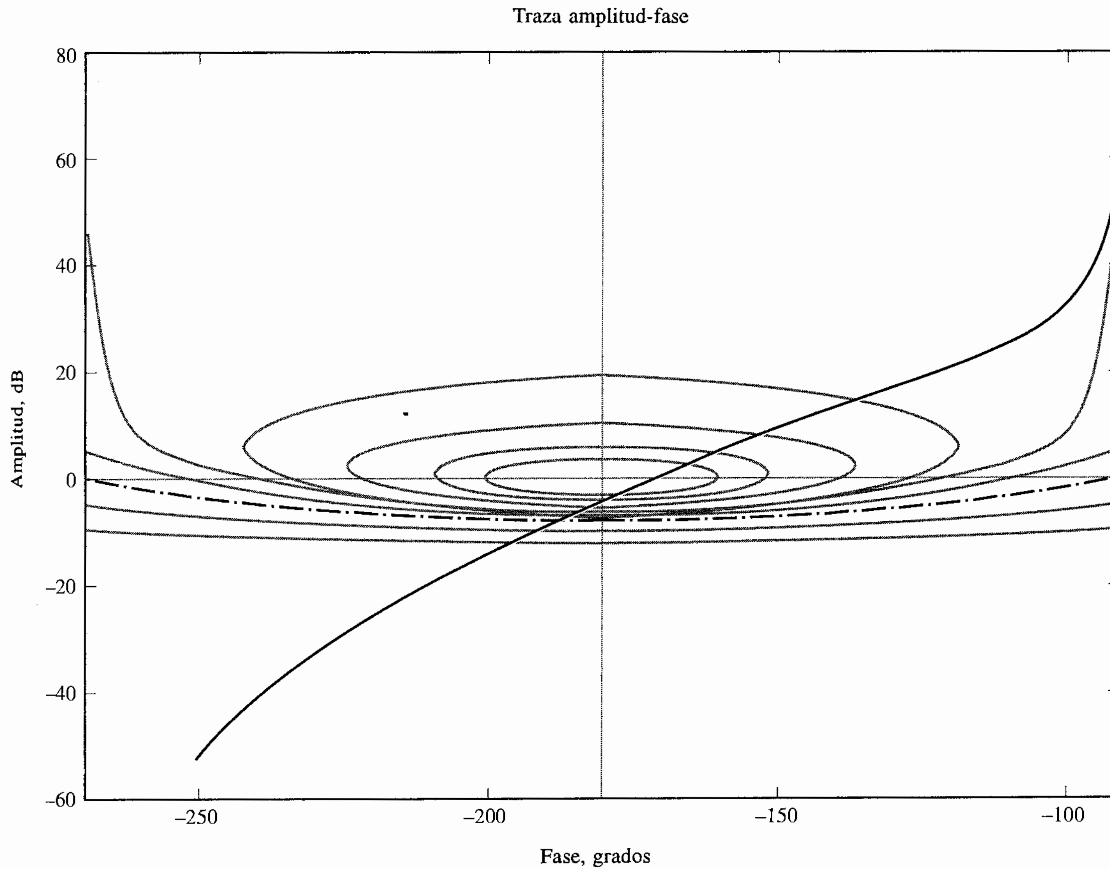


Figura 9-75 Traza de magnitud-fase con la carta de Nichols de la función de transferencia de la ecuación (9-174) para $K = 181.2$ con **mvpplot** de **CSAD.**

no unitaria, la función de transferencia en lazo cerrado del sistema se expresa como:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{9-175}$$

donde $H(s) \neq 1$. El lugar geométrico de M constante y la carta de Nichols no pueden aplicarse directamente para obtener la respuesta en frecuencia en lazo cerrado al graficar $G(j\omega)H(j\omega)$, ya que el numerador de $M(s)$ no contiene $H(j\omega)$.

A través de una modificación propia, el lugar geométrico de M constante y la carta de Nichols aún se pueden aplicar a sistemas con realimentación no unitaria. Al considerar la función:

$$P(s) = H(s)M(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{9-176}$$

Aparentemente, la ecuación (9-176) es la misma que la ecuación (9-175). La respuesta en frecuencia de $P(j\omega)$ se puede determinar al graficar la función $G(j\omega)H(j\omega)$ en coordenadas amplitud-fase a lo largo de la carta de Nichols. Una vez hecho esto, la información de la puesta-frecuencia para $M(j\omega)$ se obtiene como sigue:

$$|M(j\omega)| = \frac{|P(j\omega)|}{|H(j\omega)|} \tag{9-177}$$

$$\phi_m(j\omega) = \angle M(j\omega) = \angle P(j\omega) - \angle H(j\omega) \tag{9-178}$$

9-23 Estudios de sensibilidad en el dominio de la frecuencia

▲ El estudio de sensibilidad se lleva a cabo fácilmente en el dominio de la frecuencia.

El estudio en el dominio de la frecuencia de sistemas de control lineales tiene la ventaja de que sistemas de orden superior se pueden manejar más fácil que en el dominio del tiempo. Aún más, la sensibilidad del sistema con respecto a variaciones de parámetros se pueden interpretar fácilmente empleando las trazas en el dominio de la frecuencia. Se demostrará como se pueden emplear la traza de Nyquist y la carta de Nichols para el análisis y diseño de sistemas de control basados en consideraciones de sensibilidad.

Considere un sistema de control lineal con realimentación unitaria descrito por la función de transferencia:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \tag{9-179}$$

La sensibilidad de $M(s)$ con respecto a la ganancia de lazo K, que es un factor multiplicativo en $G(s)$, se define como:

$$S_G^M(s) = \frac{dM(s)/M(s)}{dG(s)/G(s)} = \frac{dM(s)}{dG(s)}\frac{G(s)}{M(s)} \tag{9-180}$$

Al sustituir la ecuación (9-179) en la ecuación (9-180) y simplificando, se tiene:

$$S_G^M(s) = \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{1/G(s)}{1 + 1/G(s)} \tag{9-181}$$

Claramente, la función de sensibilidad $S_G^M(s)$ es una función de la variable compleja s. La Fig. 9-76 muestra la traza de magnitud de $S_G^M(s)$ cuando $G(s)$ es la función de transferencia dada en la ecuación (9-155) con $K = 10$. Es interesante observar que la sensibilidad del siste-

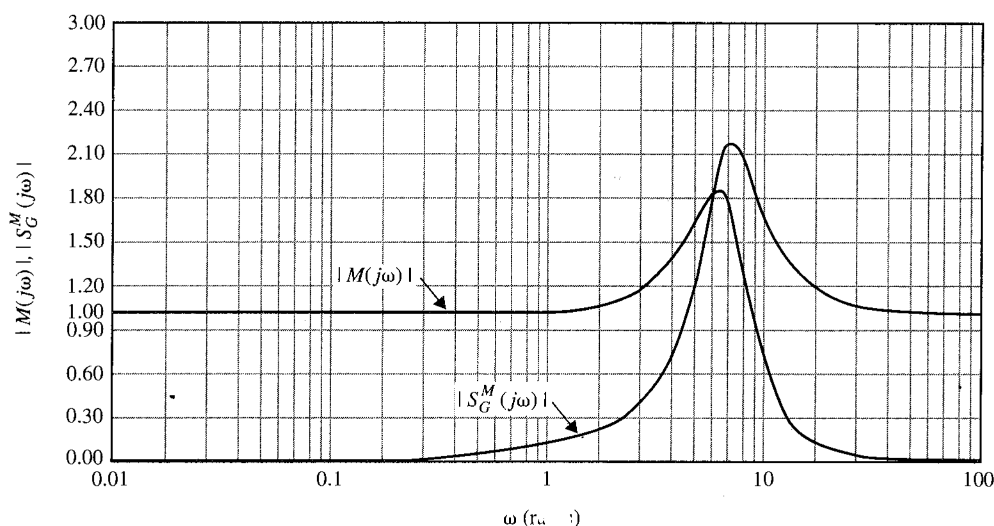


Figura 9-76 $|M(j\omega)|$ y $|S_G^M(j\omega)|$ en función de ω para:

$$G(s) = \frac{2500}{s(s+5)(s+50)}$$

ma en l..o cerrado es inferior en frecuencias mayores que 4.8 rad/s al sistema en lazo abierto cuya sensibilidad a la variación de K siempre es la unidad. En general, es deseable formular un criterio de diseño sobre la sensibilidad en la forma siguiente:

$$|S_G^M(j\omega)| = \frac{1}{|1 + G(j\omega)|} = \frac{|1/G(j\omega)|}{|1 + 1/G(j\omega)|} \leq k \tag{9-182}$$

donde k es un número real positivo. El criterio de sensibilidad es adicional al criterio de desempeño regular sobre el error en estado estable y la estabilidad relativa.

La ecuación (9-182) es análoga a la magnitud de la función de transferencia de lazo cerrado del módulo $|M(j\omega)|$, dado en la ecuación (9-163), con $G(j\omega)$ reemplazado por $1/G(j\omega)$. Por tanto, la función de sensibilidad de la ecuación (9-182) se puede determinar al graficar $1/G(j\omega)$ en coordenadas polares a lo largo de los círculos de M constante, o graficar $1/G(j\omega)$ en las coordenadas magnitud-fase con la carta de Nichols. La Fig. 9-77 muestra las trazas polares de $G(j\omega)$ de la ecuación (9-155) y $1/G(j\omega)$ con $K = 10$. Note que $G(j\omega)$ es tangente al círculo $M = 1.84$ desde abajo, lo que significa que M_r del sistema en lazo cerrado es 1.84. La curva $1/G(j\omega)$ es tangente a la curva $M = 2.18$ desde arriba y de acuerdo a la Fig. 9-76 es el valor máximo de $|S_G^M(s)|$.

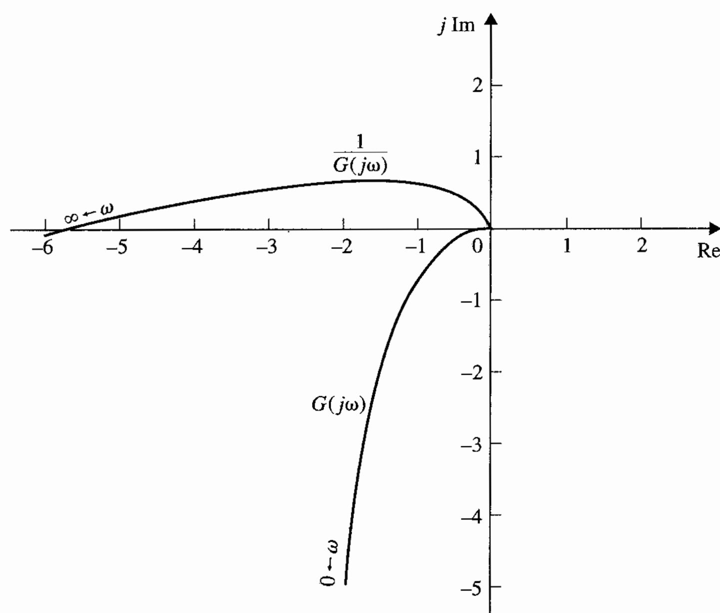


Figura 9-77 Trazas polares de $G(j\omega)$ y $1/G(j\omega)$ de:

$$G(s) = \frac{2500}{s(s+5)(s+50)}$$

La ecuación (9-182) muestra que para sensibilidad baja, la ganancia de lazo de $G(j\omega)$ debe ser alta, pero se conoce que en general, una ganancia alta podría causar inestabilidad. Por tanto, el diseñador nuevamente tiene un reto al diseñar un sistema tanto con un alto grado de estabilidad, como con una baja sensibilidad.

La Fig. 9-78 muestra las trazas de magnitud-fase de $G(j\omega)$ y $1/G(j\omega)$ con la carta de Nichols. Estos resultados de nuevo sustentan aquellos determinados de las trazas polares. Las trazas de Bode de $G(j\omega)$ y $1/G(j\omega)$ se muestran en la Fig. 9-79. Son útiles para diseño de compensadores, ya que la coordenada vertical está en decibeles. El diseño de sistemas de control robustos (baja sensibilidad) con métodos en el dominio de la frecuencia, se discuten en el capitulo 10.

9-24 Análisis de sistemas en tiempo discreto en el dominio de la frecuencia

Todos los métodos en el dominio de la frecuencia discutidos en las secciones anteriores se pueden extender al análisis de sistemas en tiempo discreto. Considere el sistema en tiempo

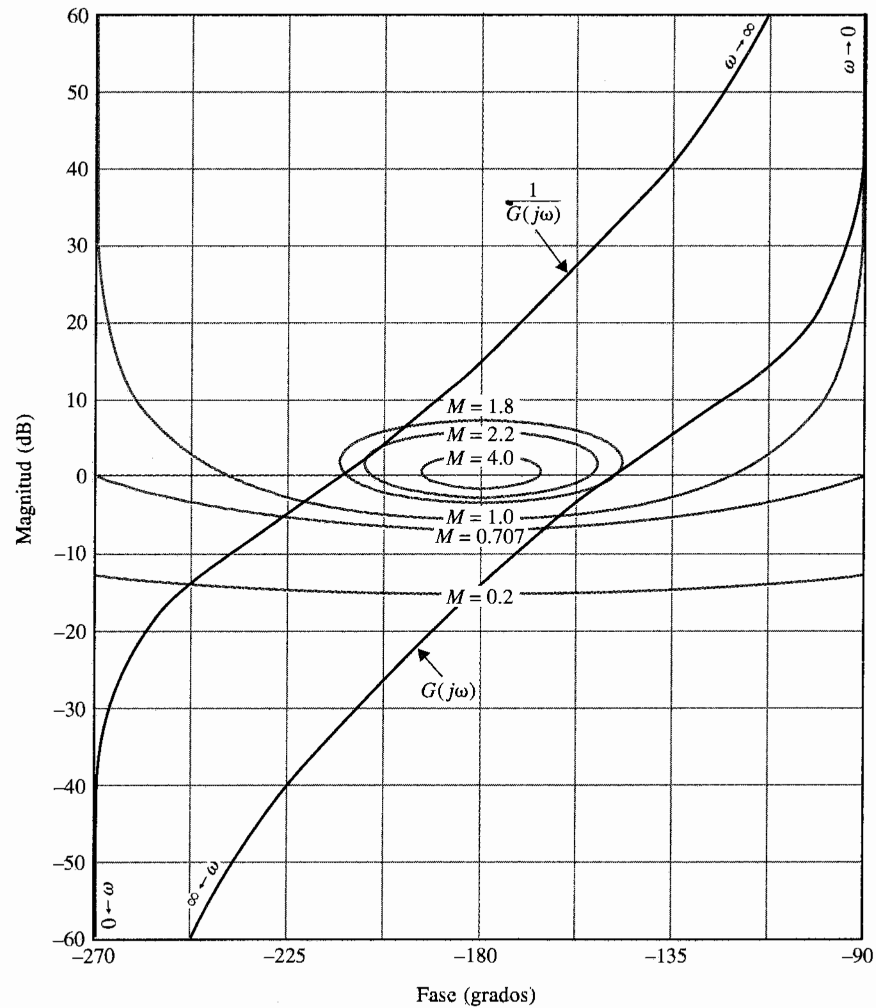


Figura 9-78 Trazas de ganancia-fase de $G(j\omega)$ y $1/G(j\omega)$ para:

$$G(s) = \frac{2500}{s(s+5)(s+50)}$$

discreto que se muestra en la Fig. 9-80. La función de transferencia del sistema en lazo cerrado del sistema es:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_{h0}G(z)}{1 + G_{h0}G(z)} \tag{9-183}$$

donde $G_{h0}G(z)$ es la transformada z de $G_{h0}(s)G(s)$. Tal como en el caso de sistemas en tiempo continuo, las condiciones de estabilidades absoluta y relativa del sistema en tiempo discreto

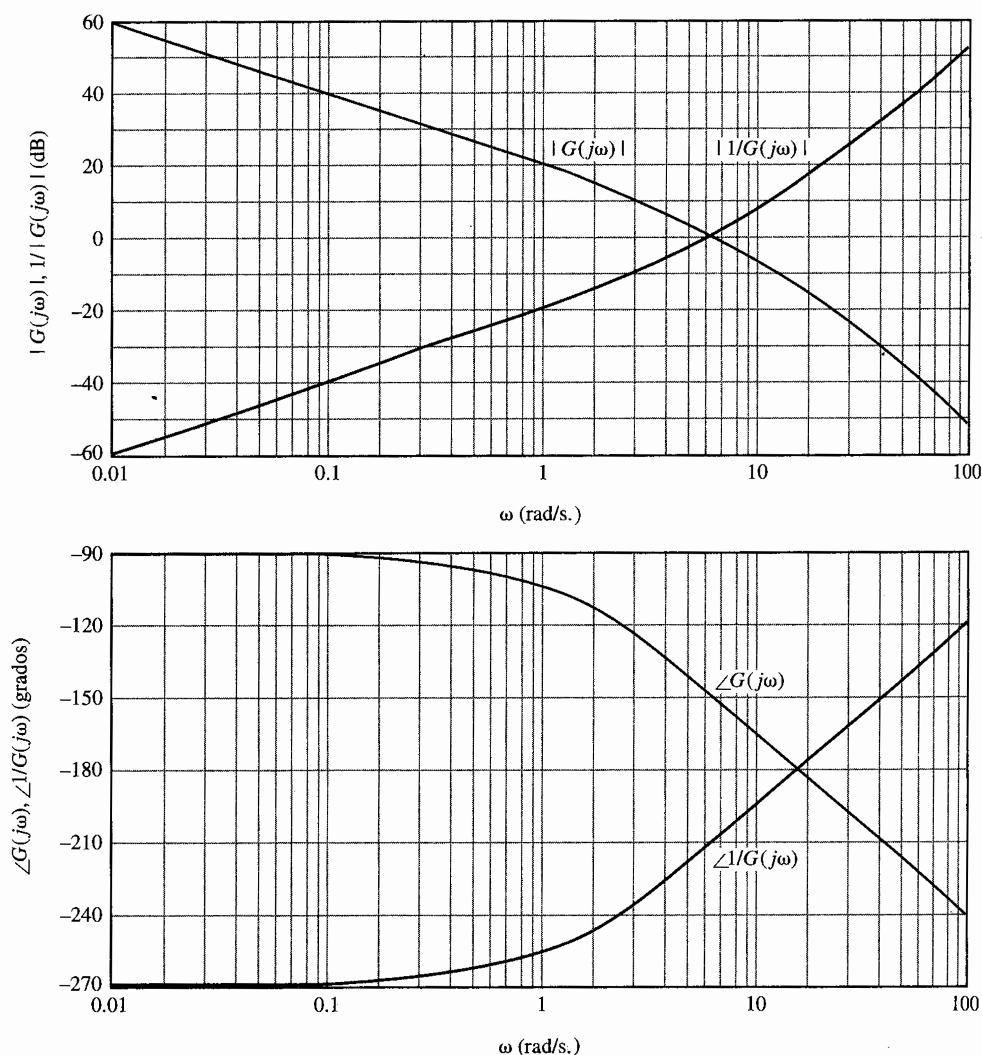


Figura 9-79 Trazas de Bode de $G(j\omega)$ y $1/G(j\omega)$ de:

$$G(s) = \frac{2500}{s(s+5)(s+50)}$$

en lazo cerrado se pueden investigar al hacer las trazas en el dominio de la frecuencia de $G_{h0}G(z)$. Ya que el eje positivo $j\omega$ del plano s corresponde a la frecuencia real, las trazas en el dominio de la frecuencia de $G_{h0}G(z)$ se obtienen al hacer $z = e^{j\omega T}$ y dejando que ω varíe desde 0 hasta ∞. Esto también es equivalente a mapear los puntos sobre el círculo unitario, $|z|=1$, en el plano z dentro del plano $G_{h0}G(e^{j\omega T})$. Ya que el círculo unitario se repite por cada frecuencia de muestreo ω_s $(=2\pi/T)$, como se muestra en la Fig. 9-81, cuando ω varía a lo largo del eje $j\omega$, la traza en el dominio de la frecuencia de $G(e^{j\omega T})$ se repite para $\omega = n\omega_s$, hasta $(n+1)\omega_s$, $n = 0$,

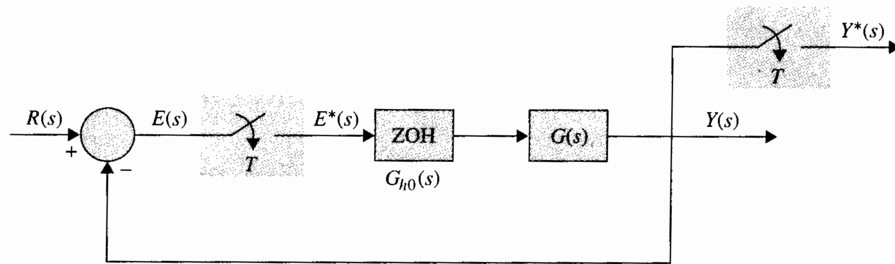


Figura 9-80 Sistema de control en tiempo discreto en lazo cerrado.

1, 2, ... Por tanto, es necesario dibujar $G_{h0}G(e^{j\omega T})$ sólo para el rango de $\omega = 0$ hasta $\omega = \omega_s$. De hecho, ya que el círculo unitario en el plano z es simétrico con respecto al eje real, la traza de $G_{h0}G(e^{j\omega T})$ en coordenadas polares para $\omega = 0$ hasta $\omega_s/2$ necesita ser diagramado.

9-24-1 La traza de Bode con la transformada *w*

La transformada w que se presento en la subsección 6-7-1, mostraba que la ecuación (6-47), se puede utilizar para el análisis en el dominio de la frecuencia y el diseño de sistemas de control en tiempo discreto. La regla de transformación es [ecuación (6-46)].

$$z = \frac{(2/T) + w}{(2/T) - w} \tag{9-184}$$

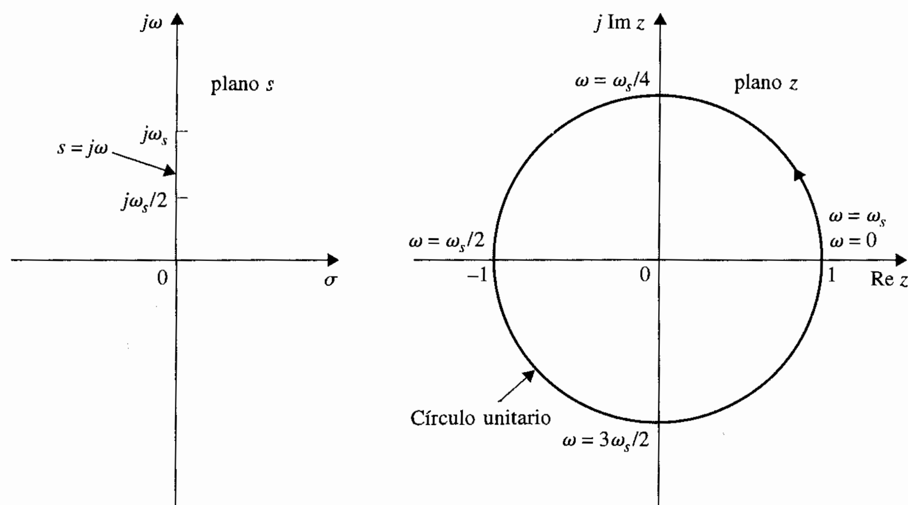


Figura 9-81 Relación entre el eje $j\omega$ en el plano s y el círculo unitario en el plano z.

En el dominio de la frecuencia, se hace [ecuación (6-50)]:

$$w = j\omega_w = j\frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2} \qquad (9\text{-}185)$$

Para el análisis en el dominio de la frecuencia de un sistema en tiempo discreto, se sustituyen las ecuaciones (9-184) y (9-185) en $G(z)$ para obtener $G(j\omega_w)$; el último se puede emplear para formar las trazas de Bode o la traza polar del sistema.

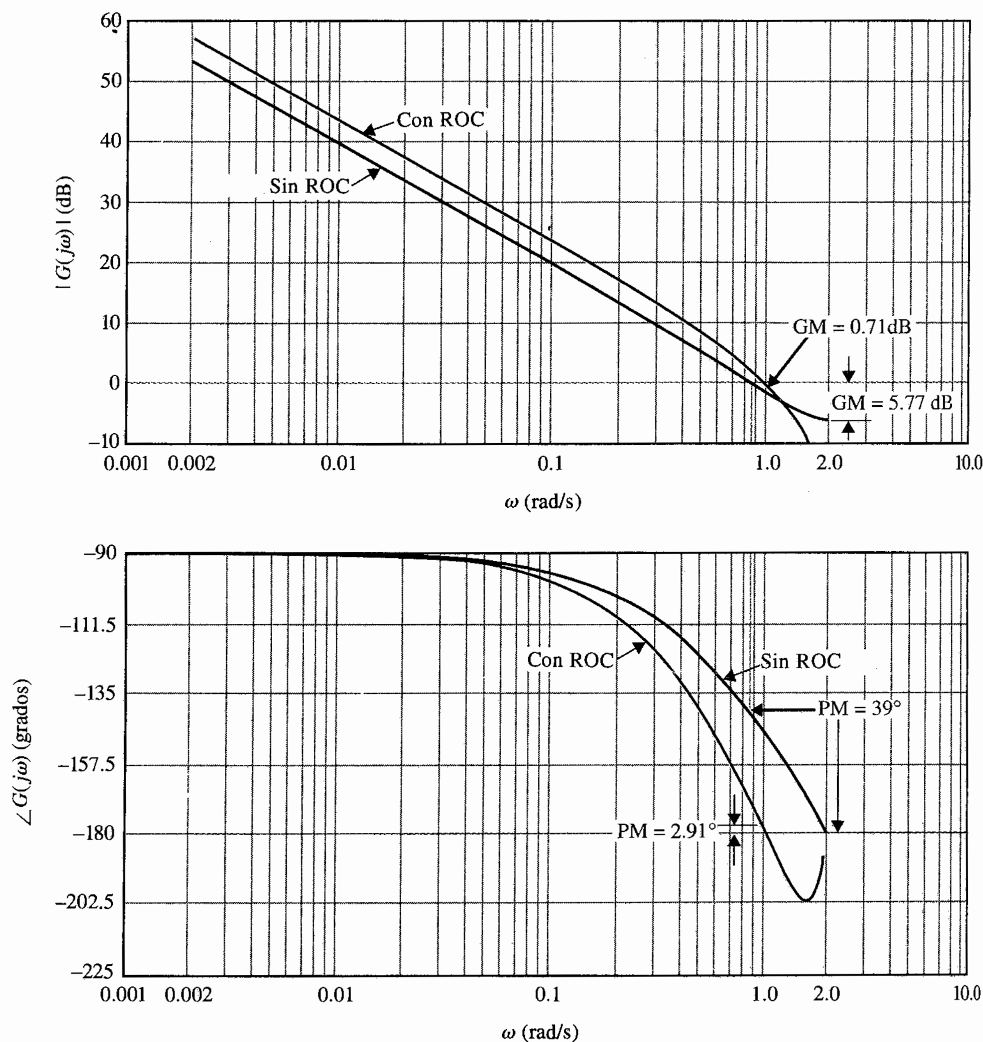


Figura 9-82 Trazas de Bode de $G_{h0}G(z)$ del sistema en la Fig. 9-80, con $G(s) = 1.57/[s(s+1)]$. T = 1.57 s y con y sin ROC.

Ejemplo 9-19

Como ejemplo ilustrativo sobre las trazas en el dominio de la frecuencia de sistemas en tiempo discreto, sea la función de transferencia del proceso en el sistema en la Fig. 9-80 como sigue:

$$G(s) = \frac{1.57}{s(s+1)} \tag{9-186}$$

y la frecuencia de muestreo es 4 rad/s. Considere primero que el sistema no tiene un retén de orden cero, por lo que:

$$G_{h0}G(z) = G(z) = \frac{1.243z}{(z-1)(z-0.208)} \tag{9-187}$$

La respuesta en frecuencia de $G_{h0}G(z)$ se obtiene al sustituir $z = e^{j\omega T}$ en la ecuación (9-186). La traza polar de $G_{h0}G(e^{j\omega T})$ para $\omega = 0$ hasta $\omega_s/2$ se muestra en la Fig. 9-82. La imagen en espejo del lugar geométrico mostrado, con el espejo colocado sobre el eje real, representa la traza para $\omega = \omega_s/2$ hasta ω_s.

Las trazas de Bode de $G_{h0}G(e^{j\omega T})$ consiste de las gráficas de la magnitud de $|G_{h0}G(e^{j\omega T})|$ en dB en función a ω, y $\angle G_{h0}G(e^{j\omega T})$ en grados en función a ω, como se muestra en la Fig. 9-83 para tres décadas de frecuencia con las trazas que terminan en $\omega = \omega_s/2 = 2$ rad/s.

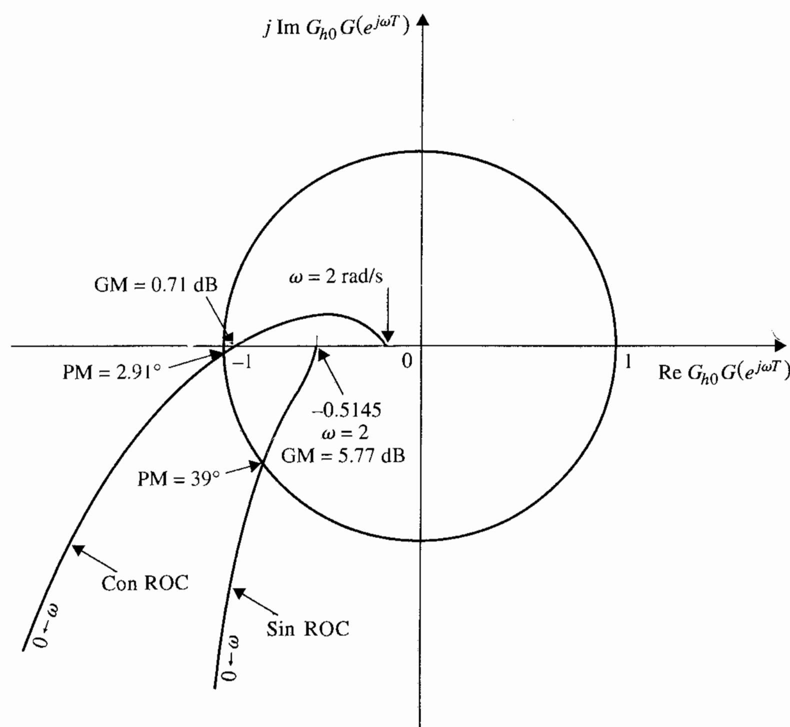


Figura 9-83 Traza en el dominio de la frecuencia de $G_{h0}G(z)$ del sistema en la Fig. 9-80, con $G(s) = 1.57/[s(s+1)]$, $T = 1.57$ s y con y sin ROC.

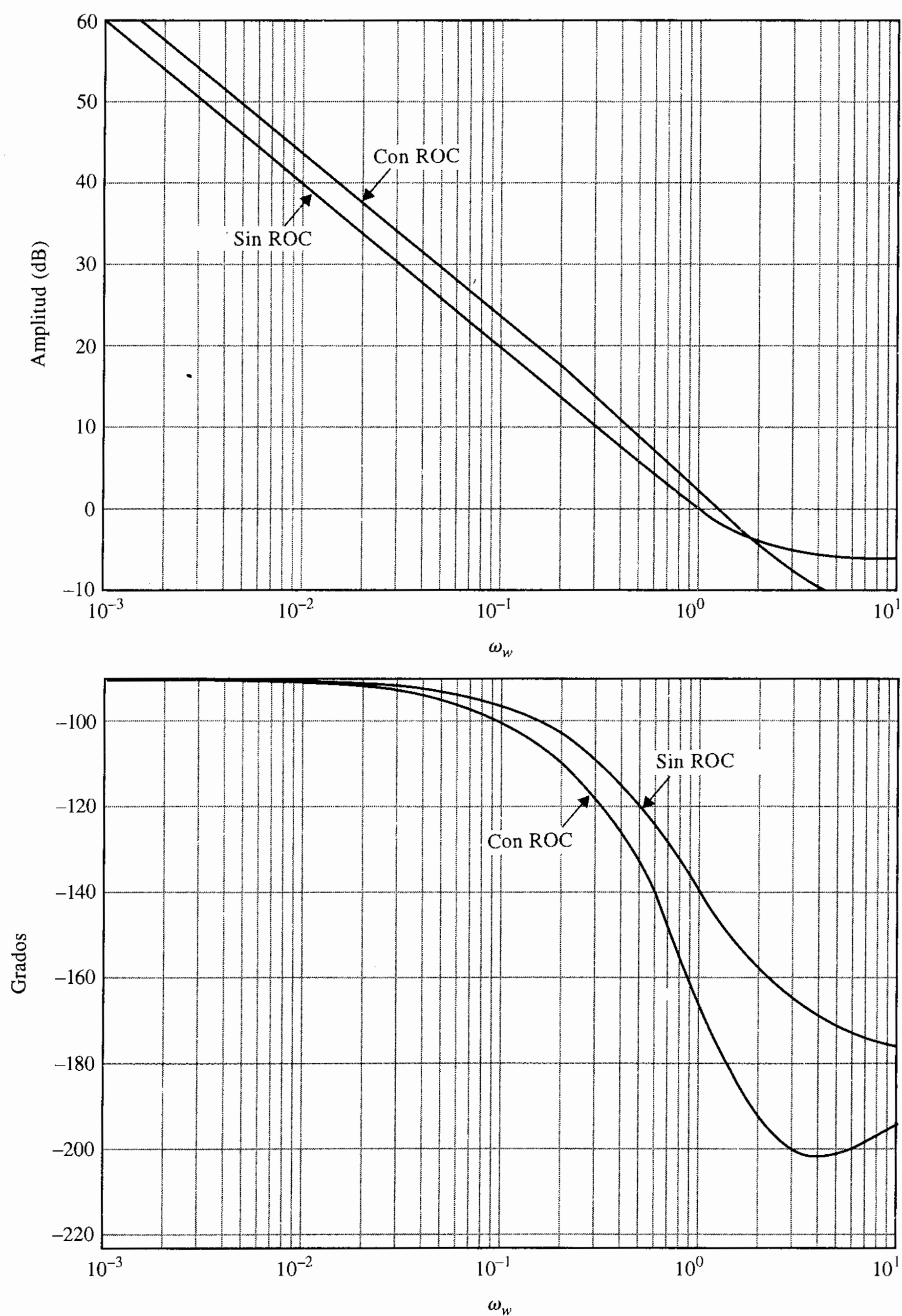


Figura 9-84 Trazas de Bode de $G_{h0}G(z)$ del sistema en la Fig. 9-80 con $G(s) = 1.57/[s(s+1)]$, $T = 1.57$ s con y sin ROC. Las trazas están hechas con la transformación $w = j\omega_w$.

Para propósitos de comparación, la función de transferencia de la trayectoria directa del sistema con retén de orden cero se obtiene:

$$G_{h0}G(z) = \frac{1.2215z + 0.7306}{(z-1)(z-0.208)} \qquad (9\text{-}188)$$

La traza polar y las trazas de Bode de la ecuación (9-188) se muestran en las Figs. 9-82 y 9-83, respectivamente. Observe que la traza polar del sistema con el retén de orden cero se intersecta con el eje real negativo en un punto más cercano al punto $(-1, j0)$ que aquel del sistema sin el retén de orden cero (ROC). Por lo que el sistema con el retén de orden cero es menos estable. En forma similar, la fase de la traza de Bode del sistema con el retén de orden cero es más negativo que aquel del sistema sin el retén de orden cero. El margen de ganancia, el margen de fase y el pico de resonancia de los dos sistemas se resumen como sigue:

	Margen de ganancia (dB)	Margen de fase (grados)	M_r
Sin ROC	5.77	39.0	1.58
Con ROC	0.71	2.91	22.64

Como alternativa, las trazas de Bode y la traza polar de la función de transferencia de la trayectoria directa se pueden efectuar empleando la transformada w de la ecuación (9-184). Para el sistema con ROC, la función de transferencia de la trayectoria directa en el dominio w es:

$$G_{h0}G(w) = \frac{1.57(1 + 0.504w)(1 - 1.0913w)}{w(1 + 1.197w)} \qquad (9\text{-}189)$$

Para el sistema sin ROC:

$$G_{h0}G(jw) = \frac{1 - 0.6163w^2}{w(1 + 1.978w)} \qquad (9\text{-}190)$$

Al sustituir $w = j\omega_w$ en la ecuación (9-190), las trazas de Bode se hacen como se muestran en la Fig. 9-84. Observe que las coordenadas de frecuencia en la Fig. 9-84 son ω_w, mientras que aquellas en la Fig. 9-82 son la frecuencia real ω. Las dos frecuencias están relacionadas a través de la ecuación (9-185).

La conclusión de este ejemplo ilustrativo es que una vez que z se reemplaza por $e^{j\omega T}$ en la función de transferencia del dominio z, o al emplear la transformada w, todas las técnicas de análisis en el dominio de la frecuencia disponibles para sistemas en tiempo continuo, se pueden aplicar a sistemas en tiempo discreto. ▲

9-25 Resumen

Este capítulo está dedicado al análisis en el dominio de la frecuencia de sistemas de control lineal. El capítulo comienza por describir las relaciones típicas entre las respuestas en frecuencia en lazo abierto y en lazo cerrado de sistemas lineales. Las especificaciones de desempeño tales como el pico de resonancia M_r, la frecuencia de resonancia ω_r, y el ancho de banda

BW se definen en el dominio de la frecuencia. Las relaciones entre estos parámetros de un sistema prototipo de segundo orden se obtuvieron en forma analítica. Los efectos de adicionar polos simples y ceros a la función de transferencia de lazo en M_r y BW son discutidos.

El criterio de Nyquist para el análisis de estabilidad de sistemas de control lineales se desarrolla a profundidad. La estabilidad del sistema de control de un solo lazo se puede investigar al estudiar el comportamiento de la traza de Nyquist de la función de transferencia de lazo $G(s)H(s)$ desde $\omega = 0$ hasta $\omega = \infty$ con respecto al punto crítico. El criterio de Nyquist general se da en términos de la condición angular dada en la ecuación (9-82). Si $G(s)H(s)$ es una función de transferencia de fase mínima, la condición de estabilidad se simplifica de tal forma que la traza de Nyquist no debe encerrar al punto crítico. La aplicación del criterio de Nyquist a sistemas multilazo también se definió.

La relación entre el lugar geométrico de las raíces y la traza de Nyquist se señala en la Sec. 9-7. La discusión debe añadir más perspectiva al entendimiento de ambos temas.

La estabilidad relativa se define en términos de margen de ganancia y margen de fase. Estas cantidades se definen en coordenadas polares, así como en las trazas de Bode. La traza de ganancia-fase permite que la carta de Nichols sea construida para el análisis en lazo cerrado. Los valores de M_r y BW se encuentran con facilidad al graficar el lugar geométrico de $G(j\omega)$ sobre la carta de Nichols.

La función de sensibilidad $S_G^M(j\omega)$ se define como medida de la variación de $M(j\omega)$ debido a variaciones en $G(j\omega)$. Se muestra que las trazas de la respuesta en frecuencia de $G(j\omega)$ y $G(j\omega)^{-1}$, se pueden emplear para estudios de sensibilidad.

Por último, la respuesta en frecuencia de sistemas de control en tiempo discreto se investigó. Prácticamente, todas las especificaciones en el dominio de la frecuencia definidas para sistemas analógicos se pueden extender a sistemas en tiempo discreto. Las trazas en el dominio de la frecuencia de sistemas en tiempo discreto se pueden hacer al reemplazar la variable de la transformada z por $e^{j\omega T}$, donde T es el periodo de muestreo. La transformada w también se aplica a la graficación de las trazas de Bode de sistemas en tiempo discreto.

Preguntas de repaso

1. Explique por qué es importante conducir análisis en el dominio de la frecuencia de sistemas de control lineal.
2. Defina el pico de resonancia M_r de un sistema de control en lazo cerrado.
3. Defina el ancho de banda BW de un sistema de control en lazo cerrado.
4. Se definen las siguientes cantidades:

   Z = número de ceros de $L(s)$ que están en el semiplano derecho del plano s.
   P = número de polos de $L(s)$ que están en el semiplano derecho del plano s.
   P_ω = número de polos de $L(s)$ que están sobre el eje $j\omega$.

   Mencione las condiciones de estos parámetros para que el sistema sea **(a)** estable en lazo abierto, y **(b)** estable en lazo cerrado.
5. Considere que la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ se dibuja para $\omega = 0$ hasta $\omega = \infty$. Sea Φ_{11} el ángulo total recorrido por el vector dibujado desde el punto $(-1, j0)$ a la traza de Nyquist cuando ω varía desde ∞ hasta 0. Mencione la condición entre Φ_{11} y los parámetros listados en la pregunta de repaso número 4 para la estabilidad en lazo cerrado.

6. ¿Qué condición debe satisfacer la función $L(j\omega)$ para que el criterio de Nyquist se simplifique para investigar si el punto $(-1, j0)$ está encerrado por la traza de Nyquist?
7. Diga todas las propiedades de una función de transferencia de fase mínima.
8. Mencione las definiciones de margen de ganancia y margen de fase.
9. Al aplicar una señal senoidal de frecuencia ω_o a un sistema lineal, la salida de estado estable del sistema será de la misma frecuencia. (V) (F)
10. Para un sistema prototipo de segundo orden, el valor de M_r depende sólo del factor de amortiguamiento relativoz ζ. (V) (F)
11. El añadir un cero a la función de transferencia de lazo siempre incrementa el ancho de banda del sistema en lazo cerrado. (V) (F)
12. El efecto general de adicionar un polo a la función de transferencia de lazo es hacer al sistema en lazo cerrado menos estable al decrementar el ancho de banda. (V) (F)
13. Para una función de transferencia de lazo de fase mínima $L(j\omega)$, si el margen de fase es negativo, el sistema en lazo cerrado siempre es inestable. (V) (F)
14. La frecuencia de cruce de fase es la frecuencia en la cual la fase de $L(j\omega)$ es 0°. (V) (F)
15. La frecuencia de cruce de ganancia es la frecuencia en la cual la ganancia de $L(j\omega)$ es 0 dB. (V) (F)
16. El margen de ganancia se mide a la frecuencia de cruce de fase. (V) (F)
17. El margen de fase se mide a la frecuencia de cruce de ganancia. (V) (F)
18. Un sistema en lazo cerrado con un retardo puro en el lazo es usualmente menos estable que aquel sin retardo. (V) (F)
19. La pendiente de la curva de magnitud de la traza de Bode de $L(j\omega)$ al cruce de ganancia a menudo da una indicación de la estabilidad relativa del sistema en lazo cerrado. (V) (F)
20. Una carta de Nichols puede emplearse para encontrar información sobre BW y M_r para un sistema en lazo cerrado. (V) (F)
21. Las trazas de Bode pueden usarse para análisis de estabilidad para funciones de transferencia de fase mínima y no mínima. (V) (F)

Las respuestas a las preguntas de verdadero-falso se dan después de la sección de problemas.

Referencias

Criterio de Nyquist de sistemas en tiempo continuo

1. **H. NYQUIST,** "Regeneration Theory," *Bell Syst. Tech. J.,* Vol. 11, pp. 126–147, Jan. 1932.
2. **R. W. BROCKETT and J. L. WILLEMS,** "Frequency Domain Stability Criteria—Part I," *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-10, pp. 255–261, July 1965.
3. **R. W. BROCKETT and J. L. WILLEMS,** "Frequency Domain Stability Criteria—Part II," *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-10, pp. 407–413, Oct. 1965.
4. **T. R. NATESAN,** "A Supplement to the Note on the Generalized Nyquist Criterion," *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-12, pp. 215–216, Apr. 1967.
5. **K. S. YEUNG,** "A Reformulation of Nyquist's Criterion," *IEEE Trans. Educ.,* Vol. E-28, pp. 58–60, Feb. 1985.

Función de sensibilidad

6. **A. GELB,** "Graphical Evaluation of the Sensitivity Function Using the Nichols Chart," *IRE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-7, pp. 57–58, July 1962.

Criterio de Nyquist de sistemas en tiempo discreto

7. **K. S. YEUNG and H. M. LAI,** ''A Reformulation of Nyquist Criterion for Discrete Systems,'' *IEEE Trans. Educ.,* Vol. 31, No. 1, Feb. 1988.
8. **B. C. KUO,** *Digital Control Systems,* 2nd ed., Saunders College Publishing, Philadelphia, 1992.

Problemas

Los siguientes problemas pueden ser resueltos empleado un programa de computadora. Algunos de los más simples deben resolverse en forma analítica para mejor entendimiento de los principios fundamentales.

▲ Soluciones analíticas de M_r, ω_r, y BW

9-1. La función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema de control con realimentación unitaria es:

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 6.54)}$$

Analíticamente encuentre el pico de resonancia M_r, la frecuencia de resonancia ω_r y el ancho de banda BW del sistema en lazo cerrado para los siguientes valores de K: $K = 5$; **(a)** $K = 21.39$; **(b)** $K = 100$. Emplee las fórmulas del sistema prototipo de segundo orden dadas en el libro.

▲ Soluciones por computadora de M_r, ω_r, y BW

9-2. Emplee un programa de computadora tal como **freqrp** del programa **ACSP** o **bplot** de las herramientas de **CSAD** para resolver los siguientes problemas. No intente obtener las soluciones en forma analítica. Las funciones de transferencia de la trayectoria directa de sistemas de control con realimentación unitaria están dados como sigue. Encuentre el pico de resonancia, M_r, la frecuencia de resonancia ω_r, y el ancho de banda BW de los sistemas en lazo cerrado. (*Recordatorio*: Asegúrese de que el sistema sea estable).

(a) $G(s) = \dfrac{5}{s(1 + 0.5s)(1 + 0.1s)}$ **(b)** $G(s) = \dfrac{10}{s(1 + 0.5s)(1 + 0.1s)}$

(c) $G(s) = \dfrac{500}{(s + 1.2)(s + 4)(s + 10)}$ **(d)** $G(s) = \dfrac{10(s + 1)}{s(s + 2)(s + 10)}$

(e) $G(s) = \dfrac{0.5}{s(s^2 + s + 1)}$ **(f)** $G(s) = \dfrac{100e^{-s}}{s(s^2 + 10s + 50)}$

(g) $G(s) = \dfrac{100e^{-s}}{s(s^2 + 10s + 100)}$ **(h)** $G(s) = \dfrac{10(s + 5)}{s(s^2 + 5s + 5)}$

▲ Correlación entre sobrepaso máximo, tiempo de levantamiento y M_r y BW

9-3. Las especificaciones sobre un sistema de control de segundo orden con realimentación unitaria con la función de transferencia en lazo cerrado:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

son que el sobrepaso máximo no debe exceder a 10% y el tiempo de levantamiento debe ser menor a 0.1 s. Encuentre los valores limites correspondientes de M_r y BW en forma analítica.

9-4. Repita el problema 9-3 para un sobrepaso máximo de ≤ 20% y $t_r \leq 0.2$ s.

9-5. Repita el problema 9-3 para un sobrepaso máximo de ≤ 30% y $t_r \leq 0.2$ s.

▲ Correlación entre las respuestas en frecuencia y en el tiempo

9-6. La respuesta en frecuencia en lazo cerrado del módulo $|M(j\omega)|$ en función a la frecuencia de un sistema prototipo de segundo orden se muestra en la Fig. 9P-6. Bosqueje la correspondiente respuesta al escalón unitario del sistema; indique los valores del sobrepaso máximo, tiempo de pico, y error en estado estable debido a la entrada escalón unitario.

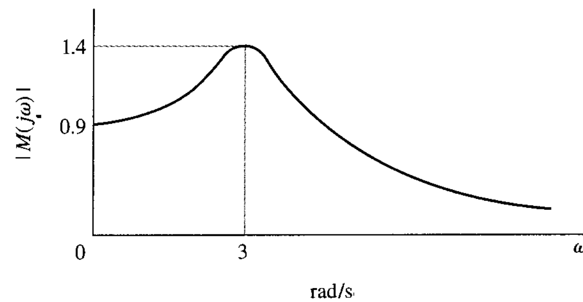


Figura 9P-6

▲ Encuentra M_r y BW

9-7. La función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema de control con realimentación unitaria es:

$$G(s) = \frac{1 + Ts}{2s(s^2 + s + 1)}$$

Encuentre los valores de BW y M_r del sistema en lazo cerrado para $T = 0.05, 1, 2, 3, 4,$ y 5. Utilice un programa de computadora para las soluciones.

▲ Encuentra M_r y BW

9-8. La función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema de control con realimentación unitaria es:

$$G(s) = \frac{1}{2s(s^2 + s + 1)(1 + Ts)}$$

Encuentre los valores de BW y M_r del sistema en lazo cerrado para $T = 0, 0.5, 1, 2, 3, 4,$ y 5. Emplee un programa de computadora para las soluciones.

▲ Análisis de estabilidad con el criterio de Nyquist

9-9. La función de transferencia de lazo $L(s)$ de un sistema de un solo lazo se da a continuación. Bosqueje la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ para $\omega = 0$ hasta $\omega = \infty$. Determine la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Si el sistema es inestable, encuentre el número de polos de la función de transferencia en lazo cerrado que están en el semiplano derecho del plano s. Resuelva para la intersección de $L(j\omega)$ sobre el eje real negativo del plano $L(j\omega)$ en forma analítica. Puede construir la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ empleando cualquier programa de computadora.

(a) $L(s) = \dfrac{20}{s(1 + 0.1s)(1 + 0.5s)}$ **(b)** $L(s) = \dfrac{10}{s(1 + 0.1s)(1 + 0.5s)}$

(c) $L(s) = \dfrac{100(1+s)}{s(1+0.1s)(1+0.2s)(1+0.5s)}$ (d) $L(s) = \dfrac{10}{s^2(1+0.2s)(1+0.5s)}$

(e) $L(s) = \dfrac{5(s-2)}{s(s+1)(s-1)}$ (f) $L(s) = \dfrac{50}{s(s+5)(s-1)}$

(g) $L(s) = \dfrac{3(s+2)}{s(s^3+3s+1)}$ (h) $L(s) = \dfrac{0.1}{s(s+1)(s^2+s+1)}$

(i) $L(s) = \dfrac{100}{s(s+1)(s^2+2)}$ (j) $L(s) = \dfrac{s^2-5s+2}{s(s^3+2s^2+2s+10)}$

(k) $L(s) = \dfrac{-0.1(s^2-1)(s+2)}{s(s^2+s+1)}$ (l) $L(s) = \dfrac{10(s+10)}{s(s+1)(s+100)}$

(m) $L(s) = \dfrac{e^{-0.1s}}{s(s+1)(s+10)}$ (n) $L(s) = \dfrac{(s+2)e^{-0.2s}}{s(s^2+s+1)}$

▲ Análisis de estabilidad con el criterio de Nyquist

9-10. Las funciones de transferencia de lazo de un sistema de control de un solo lazo se dan a continuación. Aplique el criterio de Nyquist y determine los valores de K para que el sistema sea estable. Dibuje la traza de Nyquist de $L(j\omega)$ con $K = 1$ desde $\omega = 0$ hasta $\omega = \infty$. Puede emplear un programa de computadora para graficar las trazas de Nyquist .

(a) $L(s) = \dfrac{K}{s(s+2)(s+10)}$ (b) $L(s) = \dfrac{K(s+1)}{s(s+2)(s+5)(s+15)}$

(c) $L(s) = \dfrac{K}{s^2(s+2)(s+10)}$ (d) $L(s) = \dfrac{K(s-2)}{s(s^2-1)}$

(e) $L(s) = \dfrac{K}{s(s+10)(s-2)}$ (f) $L(s) = \dfrac{K(s+1)}{s(s^3+3s+1)}$

(g) $L(s) = \dfrac{K(s^2-5s+2)}{s(s^3+2s^2+2s+10)}$ (h) $L(s) = \dfrac{K(s^2-1)(s+2)}{s(s^2+s+1)}$

(i) $L(s) = \dfrac{K(s^2-5s+1)}{s(s+1)(s^2+4)}$ (j) $L(s) = \dfrac{K(s+1)e^{-s}}{s(s^2+s+1)}$

▲ Aplicación del criterio de Nyquist

9-11. La función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema de control con realimentación unitaria es:

$$G(s) = \frac{K}{(s+5)^n}$$

Determine mediante el criterio de Nyquist el rango de K ($-\infty < K < \infty$) para que el sistema en lazo cerrado sea estable. Dibuje la traza de Nyquist de $G(j\omega)$ desde $\omega = 0$ hasta $\omega = \infty$ y, **(a)** $n = 2$, **(b)** $n = 3$, y **(c)** $n = 4$.

▲ Aplicación del criterio de Nyquist

9-12. La Fig. 9P-12 muestra las trazas de Nyquist de la función de transferencia de lazo $L(j\omega)$ para $\omega = 0$ hasta $\omega = \infty$ para sistemas de control de un solo lazo. El número de polos de $L(j\omega)$ que están sobre el eje $j\omega$, P_ω, y en el semiplano derecho del plano s, P, están indicados para cada caso. Determine la estabilidad del sistema en lazo cerrado aplicando el criterio de Nyquist. Para sistemas inestables, mencione el número de ceros de $1 + L(s)$ que están en el semiplano derecho del plano s.

▲ Aplic criterio funcion

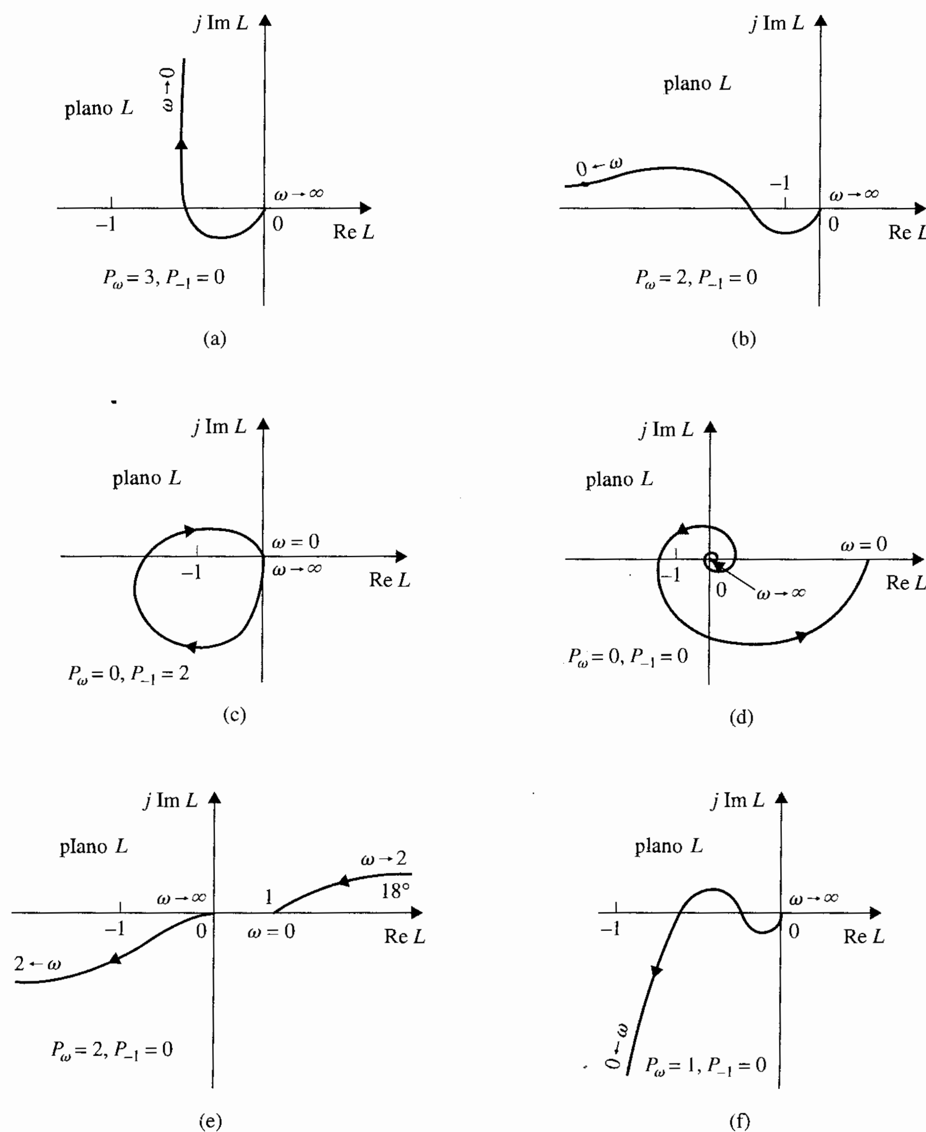


Figura 9P-12

▲ Aplicación del criterio de Nyquist a funciones impropias

9-13. Se menciona en el libro que cuando la función $L(j\omega)$ tiene más ceros que polos, es necesario graficar la traza de Nyquist de $1/L(j\omega)$ para aplicar el criterio de Nyquist simplificado. Determine la estabilidad de los sistemas descritos por la función $1/L(j\omega)$ que se muestran en la Fig. 9P-13. Para cada caso se dan los valores de P_ω y P para la función $1/L(j\omega)$, donde P_ω se refiere al número de polos de $1/L(j\omega)$ que están sobre el eje $j\omega$, y P se refiere al número de polos de $1 + 1/L(j\omega)$ que están en el semiplano derecho del plano s.

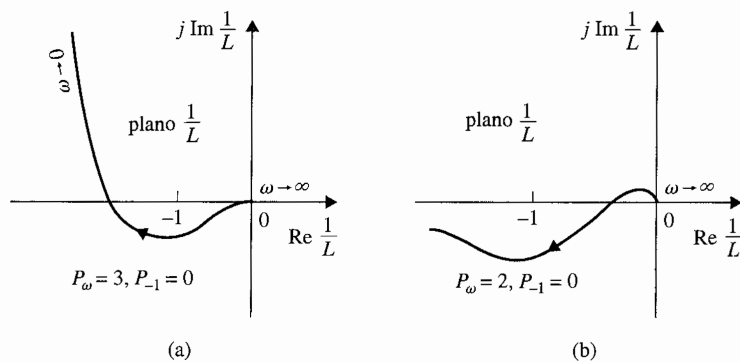


Figura 9P-13

▲ Aplicación del criterio de Nyquist

9-14. La Fig. 9P-14 muestra las trazas de Nyquist de la función de transferencia de lazo $L(j\omega)$ para $\omega = 0$ hasta $\omega = \infty$ para sistemas de control de un solo lazo. La ganancia K aparece como factor multiplicativo en $L(s)$. El número de polos de $L(j\omega)$ que están sobre el eje $j\omega$ y en el

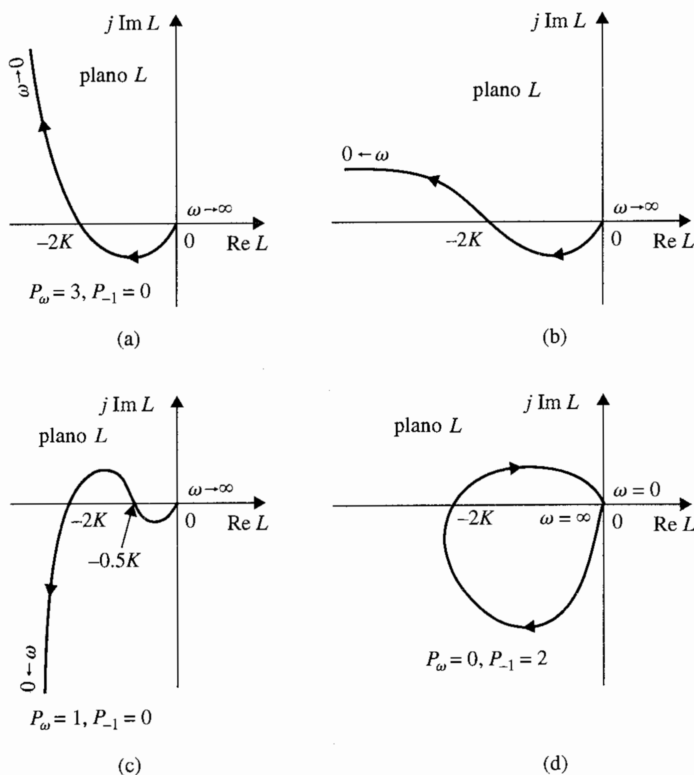


Figura 9P-14

semiplano derecho del plano s, están indicados en cada caso. Determine el(los) rango(s) de K para la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

▲ Aplicación de los criterios de Nyquist y de Routh-Hurwitz

9-15. Las ecuaciones características de sistemas de control lineal están dadas a continuación. Aplique el criterio de Nyquist para determinar los valores de K para la estabilidad del sistema. Verifique las respuestas a través del criterio de Routh-Hurwitz.

(a) $s^3 + 4Ks^2 + (K + 5)s + 10 = 0$
(b) $s^3 + K(s^3 + 2s^2 + 1) = 0$
(c) $s(s + 1)(s^2 + 4) + K(s^2 + 1) = 0$
(d) $s^3 + 2s^2 + 20s + 10K = 0$
(e) $s(s^3 + 3s + 3) + K(s + 2) = 0$
(f) $s(s^3 + 2s^2 + s + 1) + K(s^2 + s + 1) = 0$

▲ Estabilidad de sistemas para PD controlado

9-16. La función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema de control con realimentación unitaria con un controlador PD (proporcional-derivativo) es:

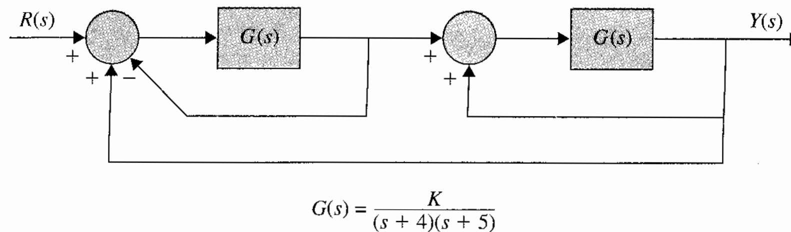
$$G(s) = \frac{10(K_P + K_D s)}{s^2}$$

Seleccione el valor de K_P de tal forma que la constante de error parabólica K_a sea 100. Encuentre la función de transferencia de la trayectoria directa equivalente de $G_{eq}(s)$ para $\omega = 0$ hasta $\omega = \infty$. Determine el rango de K_D para estabilidad mediante el criterio de Nyquist.

▲ Aplicación de los criterios de Nyquist y de Routh-Hurwitz

9-17. El diagrama de bloque de un sistema de control con realimentación se muestra en la Fig. 9P-17.

(a) Aplique el criterio de Nyquist para determinar el intervalo de K para la estabilidad.
(b) Verifique la respuesta obtenida en la parte (a) con el criterio de Routh-Hurwitz.



$$G(s) = \frac{K}{(s + 4)(s + 5)}$$

Figura 9P-17

▲ Estudio de estabilidad del sistema de control de nivel de líquido mediante el criterio de Nyquist

9-18. La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema de control de nivel de líquido que se muestra en la Fig. 6P-13 es:

$$G(s) = \frac{K_a K_i n K_I N}{s(R_a J s + K_i K_b)(As + K_o)}$$

Se dan los siguientes parámetros del sistema: $K_a = 50$, $K_i = 10$, $K_t = 50$, $J = 0.006$, $K_b = 0.0706$, $n = 0.01$, y $R_a = 10$. Los valores de A, N, y K_o son variables.

(a) para $A = 50$ y $K_o = 100$, dibuje la traza de Nyquist de $G(j\omega)$ para $\omega = 0$ hasta ∞ con N como parámetro variable. Encuentre el valor entero máximo de N para que el sistema en lazo cerrado sea estable.

(b) Sea $N = 10$ y $K_o = 100$. Dibuje la traza de Nyquist de una función de transferencia equivalente $G_{eq}(j\omega)$ que tenga a A como factor multiplicativo. Encuentre el valor crítico de K_o para la estabilidad.

(c) Para $A = 50$ y $N = 10$, bosqueje la traza de Nyquist de una función de transferencia equivalente $G_{eq}(j\omega)$ que tenga K_o como factor multiplicativo. Encuentre el valor crítico K_o para estabilidad.

▲ Estudio de estabilidad del sistema de control del motor de corriente directa

9-19. El diagrama de bloques del sistema de control de un motor de corriente directa se muestra en la Fig. 9P-19. Determine el rango de K para la estabilidad empleando el criterio de Nyquist cuando K_t tiene los siguientes valores: **(a)** $K_t = 0$, **(b)** $K_t = 0.01$, y **(c)** $K_t = 0.1$.

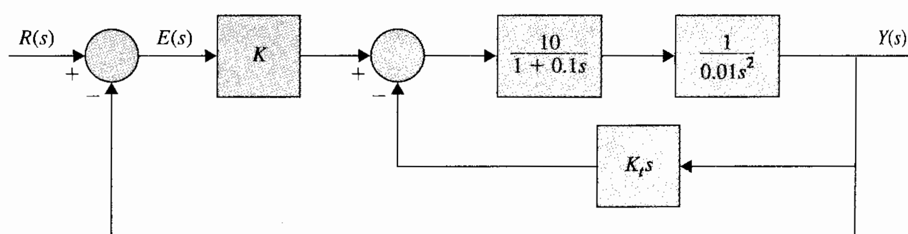


Figura 9P-19

▲ Estudio de estabilidad del sistema de control del motor de corriente directa

9-20. Para el sistema que se muestra en la Fig. 9P-19, sea $K = 10$. Encuentre el rango de K_t para estabilidad con el criterio de Nyquist.

▲ Estudio de estabilidad del sistema de control de laminación de acero

9-21. El sistema de control de laminación de acero del sistema que se muestra en la Fig. 4P-26 tiene la siguiente función de transferencia de la trayectoria directa:

$$G(s) = \frac{100Ke^{-T_d s}}{s(s^2 + 10s + 100)}$$

(a) Cuando $K = 1$, determine el tiempo de retardo máximo T_d en segundos para que el sistema de lazo cerrado sea estable.

(b) Cuando el tiempo de retardo T_d es de 1 s, encuentre el valor máximo de K para la estabilidad del sistema.

▲ Estudio de estabilidad del sistema de control de laminación de acero

9-22. Repita el problema 9-21 con las siguientes condiciones:

(a) Cuando $K = 0.1$, determine el máximo tiempo de retardo T_d en segundos para que el sistema en lazo cerrado sea estable.

(b) Cuando el tiempo de retardo T_d es 0.1 s, encuentre el máximo valor de K para la estabilidad del sistema.

▲ Estudio de estabilidad del sistema de control del concentrado de soluciones químicas

9-23. El diagrama esquemático del sistema que se muestra en la Fig. 9P-23 está diseñado para controlar la concentración de una solución química al mezclar agua y el concentrado de la solución en proporciones adecuadas. La función de transferencia de los componentes del sistema entre la salida del amplificador e_a (V) y la posición de la válvula x (pulg) es:

$$\frac{X(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{s^2 + 10s + 100}$$

Cuando el sensor detecta agua, el voltaje de la salida del amplificador e_a es cero; cuando detecta el concentrado de la solución, $e_a = 10$ V; 0.1 pulg del movimiento de la válvula cambia la salida del concentrado de cero a máximo. Los puertos de la válvula se asume que son de una forma tal que la salida del concentrado varía linealmente en relación con la posición de la válvula. El tubo de salida tiene un área de sección transversal de 0.1 pulg², y la velocidad de fluido es 10_3 pulg/s sin considerar la posición de la válvula. Para asegurar que el sensor detecta una solución homogénea, es deseable colocarlo a una distancia D pulg de la posición de la válvula.

(a) Obtenga la función de transferencia de lazo del sistema.
(b) Cuando $K = 10$, encuentre la distancia máxima D (pulg) para que el sistema sea estable. Emplee el criterio de Nyquist para la estabilidad.
(c) Sea $D = 10$ pulg. Encuentre el valor máximo de K para la estabilidad del sistema.

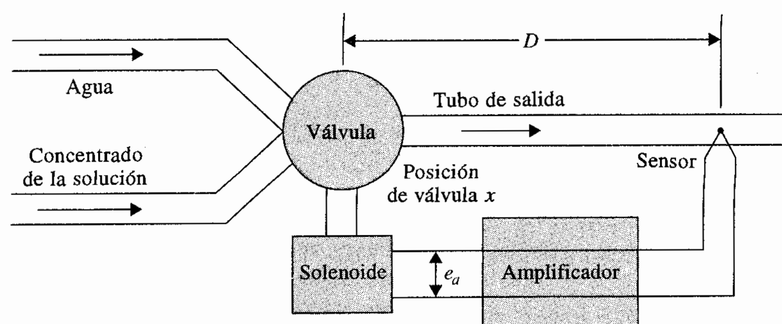


Figura 9P-23

▲ Estudio de estabilidad del sistema de control del concentrado de soluciones químicas

9-24. Para el sistema mezclador que se describe en el problema 9-23, se dan los siguientes parámetros: Cuando el sensor detecta sólo agua, el voltaje de salida del amplificador $e_s = 0$V; cuando detecta el concentrado de la solución, $e_a = 1$ V; 0.1 pulg del movimiento de la válvula, cambia la salida del concentrado de cero a máximo. Las demás características del sistema son las mismas que para el problema 9-23. Repita las tres partes del problema 9-23.

▲ Análisis en el dominio de la frecuencia de la aproximación de sistemas de bajo orden

9-25. La aproximación de sistemas de orden superior por medio de sistemas de bajo orden que se discutieron en la Sec. 7-9 se basan en el criterio en el dominio de la frecuencia. Las funciones

de transferencia de la trayectoria directa de orden superior y las funciones de transferencia correspondientes a aproximaciones de bajo orden determinadas en el capítulo 7 se dan a continuación. Calcule y compare los valores de M_r, ω_r, y BW de sistemas de orden superior con aquellos de los sistemas de bajo orden, de tal forma que la exactitud de las aproximaciones pueda ser juzgada. Utilice un programa de computadora para las soluciones:

(a) $G_H(s) = \dfrac{8}{s(s^2 + 6s + 12)}$ $\quad G_L(s) = \dfrac{2.31}{s(s + 2.936)}$ $\quad$ (Ejemplo 7-8)

(b) $G_H(s) = \dfrac{0.909}{s(1 + 0.5455s + 0.0455s^2)}$ $\quad G_L(s) = \dfrac{0.995}{s(1 + 0.4975s)}$

(Ejemplo 7-9, $T = 0.1$)

(c) $G_H(s) = \dfrac{0.5}{s(1 + 0.75s + 0.25s^2)}$ $\quad G_L(s) = \dfrac{0.707}{s(1 + 0.3536s)}$

(Ejemplo 7-9, $T = 1.0$)

(d) $G_H(s) = \dfrac{90.3}{s(1 + 0.00283s + 8.3056 \times 10^7 s^2)}$ $\quad G_L(s) = \dfrac{92.943}{s(1 + 0.002594s)}$

(Ejemplo 7-10, $K = 7.248$)

(e) $G_H(s) = \dfrac{180.6}{s(1 + 0.00283s + 8.3056 \times 10^7 s^2)}$ $\quad G_L(s) = \dfrac{189.54}{s(1 + 0.002644s)}$

(Ejemplo 7-10, $K = 14.5$)

(f) $G_H(s) = \dfrac{1245.52}{s(1 + 0.00283s + 8.3056 \times 10^7 s^2)}$ $\quad G_L(s) = \dfrac{2617.56}{s(1 + 0.0053s)}$

(Ejemplo 7-10, $K = 100$)

▲ M_r, ω_r, y BW de sistemas de tercer y segundo orden

9-26. La función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema de control con realimentación unitaria es:

$$G(s) = \frac{1000}{s(s^2 + 105s + 600)}$$

(a) Encuentre los valores de M_r, ω_r, y BW del sistema en lazo cerrado.

(b) Encuentre los parámetros del sistema de segundo orden con la función de transferencia en lazo abierto que dará los mismos valores para M_r y ω_r que el sistema de tercer orden. Compare los valores de BW de los dos sistemas.

$$G_L(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

▲ M_r, ω_r, y BW de sistemas de tercer y segundo orden

9-27. Repita el problema 9-26 para la función de transferencia que se dio en el problema 9-25(f). (Aunque el enfoque empleado aquí puede rendir resultados que son mejores o al menos tan buenos como aquellos obtenidos a través del método detallado en la Sec. 7-9, el objetivo aquí es restringir solamente al sistema de segundo orden como una aproximación de sistemas de bajo orden.)

▲ Márgenes de ganancia y de fase a partir de las trazas de Bode

9-28. Bosqueje o grafique las trazas de Bode de las funciones de transferencia de la trayectoria directa dadas en el problema 9-2. Encuentre el margen de ganancia, frecuencia de cruce de ganancia, margen de fase y frecuencia de cruce de fase para cada sistema.

▲ Márgenes de ganancia y de fase a partir de las trazas de Bode

9-29. Las funciones de transferencia de la trayectoria directa de sistemas de control con realimentación unitaria están dados como sigue. Dibuje las trazas de Bode de $G(j\omega)/K$ y realice lo siguiente: **(i)** encuentre el valor de K para que el margen de ganancia del sistema sea 20 dB; **(ii)** encuentre el valor de K para que el margen de fase del sistema sea 45°.

(a) $G(s) = \dfrac{K}{s(1 + 0.1s)(1 + 0.5s)}$ **(b)** $G(s) = \dfrac{K(s + 1)}{s(1 + 0.1s)(1 + 0.2s)(1 + 0.5s)}$

(c) $G(s) = \dfrac{K}{(s + 3)^3}$ **(d)** $G(s) = \dfrac{K}{(s + 3)^4}$

(e) $G(s) = \dfrac{Ke^{-s}}{s(1 + 0.1s + 0.01s^2)}$ **(f)** $G(s) = \dfrac{K(1 + 0.5s)}{s(s^2 + s + 1)}$

▲ Aplicación de la carta de Nichols y de las trazas de ganancia-fase

9-30. Las funciones de transferencia de la trayectoria directa de sistemas de control con realimentación unitaria están dadas a continuación. Grafique $G(j\omega)/K$ en coordenadas ganancia-fase de la carta de Nichols, y haga lo siguiente: **(i)** encuentre el valor de K de tal forma que el margen de ganancia del sistema sea 10 dB; **(ii)** encuentre el valor de K para que el margen de fase del sistema sea 45°; **(iii)** encuentre el valor de K para que $M_r = 1.2$.

(a) $G(s) = \dfrac{10K}{s(1 + 0.1s)(1 + 0.5s)}$ **(b)** $G(s) = \dfrac{5K(s + 1)}{s(1 + 0.1s)(1 + 0.2s)(1 + 0.5s)}$

(c) $G(s) = \dfrac{10K}{s(1 + 0.1s + 0.01s^2)}$ **(d)** $G(s) = \dfrac{Ke^{-s}}{s(1 + 0.1s + 0.01s^2)}$

▲ Aplicación de las trazas de Bode

9-31. Las trazas de Bode de la función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema de control con realimentación unitaria se obtuvieron en forma experimental y se muestran en la Fig. 9P-31 cuando la ganancia directa K está colocada en su valor nominal.

(a) Encuentre los márgenes de ganancia y fase del sistema a partir de las trazas lo mejor que los pueda leer. Encuentre las frecuencias de cruce de fase y ganancia.
(b) Repita la parte (a) si la ganancia es del doble de su valor nominal.
(c) Repita la parte (a) si la ganancia es 10 veces su valor nominal.
(d) Encuentre cuánto debe cambiarse la ganancia de su valor nominal si el margen de ganancia es de 40 dB.
(e) Encuentre cuánto debe cambiarse la ganancia de lazo de su valor nominal si el margen de fase es de 45°.
(f) Encuentre el error en estado estable del sistema si la entrada de referencia al sistema es una función escalón unitario.
(g) La trayectoria directa ahora tiene un retardo puro de T_d segundos, de tal forma que la función de transferencia de la trayectoria directa es multiplicado por $e^{-T_d s}$. Encuentre el margen de ganancia y el margen de fase para $T_d = 0.05$ s. La ganancia está colocada en su valor nominal.

(h) Con la ganancia puesta en su valor nominal, encuentre el tiempo de retardo máximo T_d que el sistema puede tolerar sin caer en la inestabilidad.

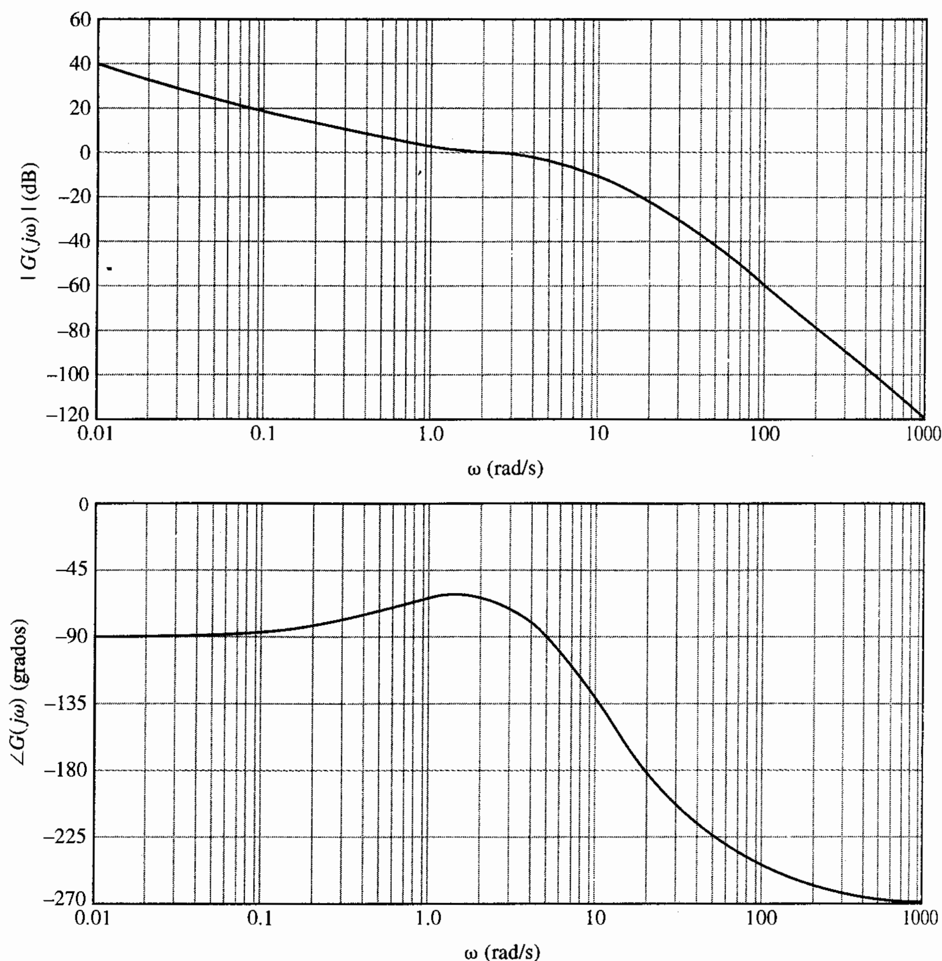


Figura 9P-31

▲ Aplicaciones de las trazas de Bode

9-32. Repita el problema 9-31 empleando la Fig. 9P-31 para las siguientes partes:

(a) Encuentre los márgenes de ganancia y fase si la ganancia es de cuatro veces su valor nominal. Encuentre las frecuencias de cruce de ganancia y fase.

(b) Encuentre cuánto debe ser cambiada la ganancia de su valor nominal si el margen de ganancia es de 20 dB.

(c) Encuentre el valor marginal de la ganancia de la trayectoria directa para la estabilidad del sistema.

(d) Encuentre cuánto debe cambiarse la ganancia de su valor nominal si el margen de fase es de 60°.

(e) Encuentre el error en estado estable del sistema si la entrada de referencia es una función al escalón unitario y la ganancia es dos veces su valor nominal.

(f) Encuentre el error en estado estable del sistema si la entrada de referencia es una función escalón unitario y la ganancia es 20 veces su valor nominal.

(g) El sistema ahora tiene un retardo puro por lo que la función de transferencia de la trayectoria directa es multiplicada por $e^{-T_d s}$. Encuentre los márgenes de ganancia y fase cuanto $T_d = 0.1$ s. La ganancia está colocada en su valor nominal.

(h) Con la ganancia en 10 veces su valor nominal, encuentre el máximo tiempo de retardo T_d que el sistema puede tolerar sin caer en la inestabilidad.

▲ Relación entre las trazas de Bode, la de Nyquist y el lugar geométrico de las raíces

9-33. La función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema de control con realimentación unitaria es:

$$G(s) = \frac{K(1 + 0.2s)(1 + 0.1s)}{s^2(1 + s)(1 + 0.01s)^2}$$

(a) Construya las trazas de Bode y Nyquist de $G(j\omega)/K$ y determine el rango de K para la estabilidad del sistema.

(b) Construya el lugar geométrico de las raíces del sistema para $K \geq 0$. Determine los valores de K y ω en los puntos donde el lugar geométrico de las raíces cruza al eje $j\omega$, utilizando la información encontrada a partir de las trazas de Bode.

▲ Relación entre las trazas de Bode, las de Nyquist y el lugar geométrico de las raíces

9-34. Repita el problema 9-33 para la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{K(s + 1)(s + 2)}{s^2(s^2 + 2s + 2)}$$

▲ El trazas de Bode y la estabilidad relativa del sistema de control del motor de corriente directa

9-35. La función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema de control de un motor de corriente directa descrito en la Fig. 4P-17 es:

$$G(s) = \frac{6.087 \times 10^8 K}{s(s^3 + 423.42s^2 + 2.6667 \times 10^6 s + 4.2342 \times 10^8)}$$

Dibuje las trazas de Bode de $G(j\omega)$ con $K = 1$, y determine el margen de ganancia y el margen de fase del sistema. Encuentre el valor crítico de K para la estabilidad.

▲ Estabilidad relativa del sistema de control del brazo robot

9-36. La función de transferencia entre la posición de salida $\Theta_L(s)$ y la corriente del motor $I_a(s)$ de un brazo robot modelado en la Fig. 4P-21 es:

$$G_p(s) = \frac{\Theta_L(s)}{I_a(s)} = \frac{K_i(Bs + K)}{\Delta_o}$$

donde:

$$\Delta_o(s) = s\{J_L J_m s^3 + [J_L(B_m + B) + J_m(B_L + B)]s^2 + [B_L B_m + (B_L + B_m)B + (J_m + J_L)K]s + K(B_L + B_m)\}$$

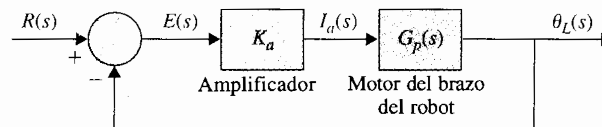


Figura 9P-36

El brazo está controlado por un sistema en lazo cerrado, como se muestra en la Fig. 9P-36. Los parámetros del sistema son $K_a = 65$, $K = 100$, $K_i = 0.4$, $B = 0.2$, $J_m = 0.2$, $B_L = 0.01$, $J_L = 0.6$, y $B_m = 0.25$.

(a) Obtenga la función de transferencia de la trayectoria directa $G(s) = \Theta_L(s)/E(s)$.

(b) Dibuje las trazas de Bode de $G(j\omega)$. Encuentre los márgenes de ganancia y fase del sistema.

(c) Dibuje la magnitud de $|M(j\omega)|$ en función de ω, donde $M(s)$ es la función de transferencia en lazo cerrado. Encuentre M_r, ω_r, y BW.

▲ Análisis de estabilidad relativa a partir de la traza de ganancia-fase

9-37. La traza de ganancia-fase de la función de transferencia de la trayectoria directa de $G(j\omega)/K$ de un sistema de control con realimentación unitaria se muestra en la Fig. 9P-37. Encuentre las siguientes características de desempeño del sistema.

(a) Frecuencia de cruce de ganancia (rad/s) cuando $K = 1$.

(b) Frecuencia de cruce de ganancia (rad/s) cuando $K = 1$.

(c) Margen de ganancia (dB) cuando $K = 1$.

(d) Margen de fase (grados) cuando $K = 1$.

(e) Pico de resonancia M_r cuando $K = 1$.

(f) Frecuencia de resonancia ω_r (rad/s) cuando $K = 1$.

(g) BW del sistema en lazo cerrado cuando $K = 1$.

(h) El valor de K para que el margen de ganancia sea 20 dB.

(i) El valor de K para el sistema sea marginalmente estable. Encuentre la frecuencia de oscilación sostenida en rad/s.

(j) El error de estado estable cuando la entrada de referencia es una función escalón unitario.

▲ Similar al problema 9-37

9-38. Repita las partes (a) a la (g) del problema 9-37, cuando $K = 5$ dB. Repita la parte (h) para margen de ganancia = 40 dB.

▲ Estabilidad relativa del sistema con tiempo de retardo

9-39. Para la traza de ganancia-fase de $G(j\omega)/K$ que se muestra en la Fig. 9P-37, el sistema ahora tiene un retardo puro de T_d en la trayectoria directa, para que la función de la trayectoria directa se vuelva $G(s)e^{-T_d s}$.

(a) Con $K = 1$, encuentre T_d para que el margen de fase sea 40°.

(b) Con $K = 1$, encuentre el valor máximo de T_d para que el sistema permanezca estable.

9-40. Repita el problema 9-39 con $K = 10$.

9-41. Repita el problema 9-39(a) para que el margen de ganancia sea 5 dB cuando $K = 1$.

▲ E relat de c

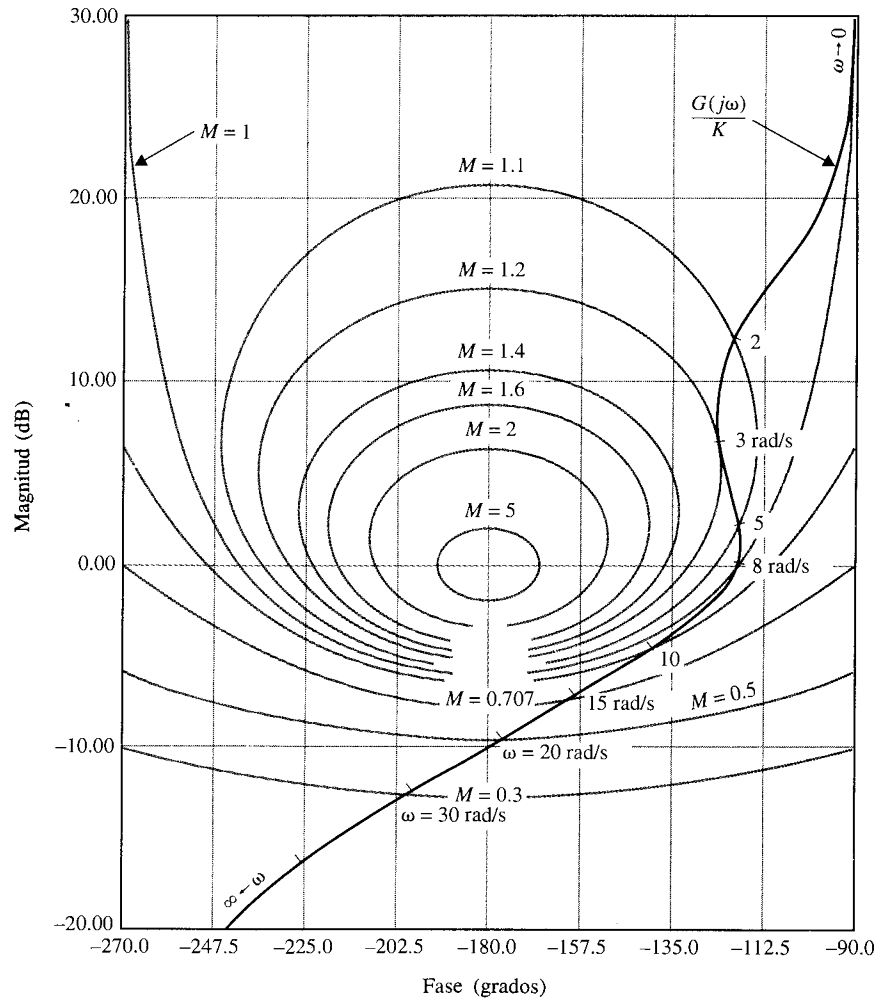


Figura 9P-37

▲ Estabilidad relativa del sistema de control del horno

9-42. El diagrama de bloques de un sistema de control de hornos se muestra en la Fig. 9P-42. La función de transferencia del proceso es:

$$G_p(s) = \frac{1}{(1 + 10s)(1 + 25s)}$$

El tiempo de retardo T_d es 2 s.

(a) Dibuje las trazas de Bode de $G(s) = Y(s)/E(s)$ y encuentre las frecuencias del cruce de ganancia y cruce de fase. Encuentre el margen de ganancia y el margen de fase.

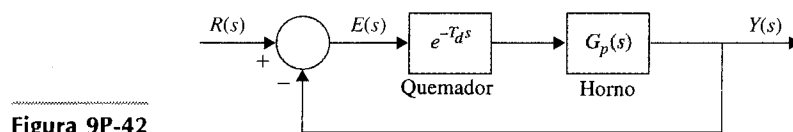


Figura 9P-42

(b) Aproxime el tiempo de retardo [ecuación (4-170)],

$$e^{-T_d s} \cong \frac{1}{1 + T_d s + T_d s^2/2}$$

y repita la parte (a). Comente sobre la exactitud de la aproximación. ¿Cuál es la máxima frecuencia bajo la cual la aproximación polinominal es exacta?

(c) Repita la parte (b) para la aproximación del término de retardo [ecuación (4-171)].

$$e^{-T_d s} \cong \frac{1 - T_d s/2}{1 + T_d s/2}$$

9-43. Repita el problema 9-42 con $T_d = 1$ s.

▲ Problema de sensibilidad

9-44. Grafique $|S_G^M(j\omega)|$ en función a ω para el sistema descrito en el problema 9-36 para $K = 1$. Encuentre la frecuencia en la cual la sensibilidad es máxima y el valor de la sensibilidad máxima.

▲ Análisis en el dominio de la frecuencia del sistema en tiempo discreto

9-45. La función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema de control en tiempo discreto con realimentación unitaria con muestrador y retén es:

$$G_{h0}G(z) = \frac{0.0952z}{(z - 1)(z - 0.905)}$$

El periodo de muestreo es $T = 0.1$ s.

(a) Dibuje las trazas de Bode de $G_{h0}G(z)$ y determine la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

(b) Aplique la transformación w de la ecuación (9-184) a $G_{h0}G(z)$, y grafique las trazas de Bode de $G_{h0}G(w)$. Encuentre los márgenes de ganancia y fase del sistema.

▲ Análisis en el dominio de la frecuencia del sistema de control de nivel de líquidos de datos muestreados

9-46. Considere que el sistema de control de nivel de líquido descrito en el problema 6-13 está ahora sujeto a operación de muestreo-retención. La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema es:

$$G_{h0}G(z) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \mathcal{Z} \left(\frac{16.67N}{s(s + 1)(s + 12.5)} \right)$$

El periodo de muestreo es 0.05 s. El parámetro N representa el número de válvulas de entrada. Construya las trazas de Bode de $G_{h0}G(w)$ y determine el valor límite de N (entero) para que el sistema en lazo cerrado sea estable.

Problemas adicionales para computadora

9-47. Utilice cualquier programa de computadora para analizar la respuesta en frecuencia de los siguientes sistemas de control con realimentación unitaria. Dibuje las trazas de Bode, trazas polares y trazas de ganancia-fase y calcule el margen de fase, margen de ganancia, M_r y BW.

(a) $G(s) = \dfrac{1 + 0.1s}{s(s + 1)(1 + 0.01s)}$ (b) $G(s) = \dfrac{0.5(s + 1)}{s(1 + 0.2s)(1 + s + 0.5s^2)}$

(c) $G(s) = \dfrac{(s + 1)}{s(1 + 0.2s)(1 + 0.5s)}$ (d) $G(s) = \dfrac{1}{s(1 + s)(1 + 0.5s)}$

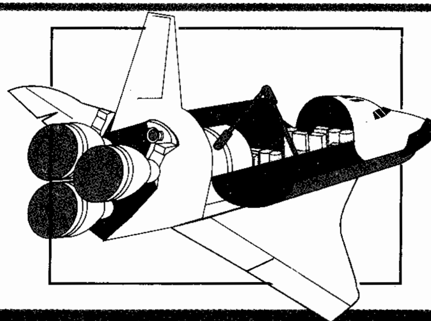
(e) $G(s) = \dfrac{50}{s(s + 1)(1 + 0.5s^2)}$ (f) $G(s) = \dfrac{0.2(1 - s^2)(1 + 0.5s)}{s(s^2 + s + 1)}$

(g) $G(s) = \dfrac{(1 + 0.1s)e^{-0.1s}}{s(s + 1)(1 + 0.01s)}$ (h) $G(s) = \dfrac{10e^{-0.1s}}{s^2 + 2s + 2}$

Respuestas a las preguntas de repaso de verdadero y falso

9. (V) **10.** (V) **11.** (V) **12.** (V) **13.** (V) **14.** (F) **15.** (V)
16. (V) **17.** (V) **18.** (V) **19.** (V) **20.** (V) **21.** (F)

10 Diseño de sistemas de control



PALABRAS CLAVE Y TEMAS

- ▲ Introducción
- ▲ Controlador PD
- ▲ Controlador PI
- ▲ Controlador PID
- ▲ Controlador de adelanto de fase
- ▲ Controlador de atraso de fase
- ▲ Controlador de adelanto-atraso
- ▲ Cancelación de polos y ceros
- ▲ Control robusto
- ▲ Control del lazo menor
- ▲ Diseño por ubicación de polos
- ▲ Controlador puente *T*
- ▲ Realimentación de estado
- ▲ Realimentación de estado con control integral

10-1 Introducción

Todos los fundamentos que se han hecho para el análisis en los capítulos anteriores llevan al objetivo último del diseño de sistemas de control. Al comenzar con el proceso controlado que se muestra en el diagrama de bloques de la Fig. 10-1, el diseño de sistemas de control involucra los tres pasos siguientes:



Figura 10-1 Proceso controlado.

1. Determine qué debe hacer el sistema y cómo hacerlo (especificaciones de diseño).
2. Determine la configuración del compensador o controlador relativa a cómo está conectado al proceso controlado.
3. Determine los valores de los parámetros del controlador para alcanzar los objetivos de diseño.

Estas tareas de diseño se exploran posteriormente en las secciones siguientes.

10-1-1 Especificaciones de diseño

A menudo se emplean especificaciones de diseño para describir qué debe hacer el sistema y cómo hacerlo. Estas especificaciones son únicas para cada aplicación individual y con frecuencia incluyen especificaciones como **estabilidad relativa, precisión en estado estable (error), respuesta transitoria,** y **características de respuesta en frecuencia.** En algunas aplicaciones puede haber especificaciones adicionales sobre **sensibilidad a variaciones de parámetros** (*i.e.*, **robustez,** o **rechazo a perturbaciones**).

El diseño de sistemas de control lineales se puede realizar ya sea en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia. Por ejemplo, la **precisión en estado estable** a menudo se especifica con respecto a una entrada escalón unitario, una entrada rampa o a una entrada parábola, y el diseño para cumplir ciertos requisitos es más conveniente realizarlo en el dominio del tiempo. Otras especificaciones como el **sobrepaso máximo, tiempo de levantamiento** y **tiempo de asentamiento,** están definidas para una entrada escalón unitario, y por tanto se emplean para diseño en el dominio del tiempo. Se ha aprendido que la estabilidad relativa también se mide en términos del **margen de ganancia, margen de fase,** y $\mathbf{M_r}$. Éstas son especificaciones típicas del dominio de la frecuencia y deben emplearse junto con herramientas como la traza de Bode, la traza polar, la traza de ganancia-fase, y la carta de Nichols.

Se ha mostrado que para el sistema prototipo de segundo orden, existen relaciones analíticas simples entre estas especificaciones, en los dominios del tiempo y de la frecuencia. Sin embargo, para sistemas de orden superior, la correlación entre las especificaciones entre los dominios del tiempo y la frecuencia son difíciles de establecer. Como se señaló anteriormente, el análisis y diseño de sistemas de control es más un ejercicio de selección, entre varios métodos alternativos, para resolver el mismo problema. Por tanto la selección de si el diseño se debe realizar en el dominio del tiempo o de la frecuencia depende de la preferencia del diseñador. Sin embargo, se debe señalar que, en la mayoría de los casos, las especificaciones en el dominio del tiempo tales como sobrepaso máximo, tiempo de levantamiento y tiempo de asentamiento se emplean normalmente como la medida final del

desempeño del sistema. Para un diseñador sin experiencia, es difícil comprender la conexión física entre las especificaciones en el dominio de la frecuencia tales como márgenes de ganancia y fase, pico de resonancia, con el desempeño real del sistema. Por ejemplo, ¿un margen de ganancia de 20 dB garantiza un sobrepaso máximo menor al 10%? Para un diseñador tiene más sentido especificar, por ejemplo, un sobrepaso máximo menor que el 5% y un tiempo de asentamiento menor que 0.01 segundos. Es menos obvio que, por ejemplo, un margen de fase de 60° y un M_r de menos de 1.1 lleven al desempeño del sistema. Los siguientes comentarios se espera clarifiquen y expliquen las razones para emplear las especificaciones en el dominio de tiempo contra las especificaciones en el dominio de la frecuencia.

1. Históricamente, el diseño de sistemas de control lineales fue desarrollado con una gran cantidad de herramientas gráficas tales como las trazas de Bode, la traza de Nyquist, la traza de ganancia-fase, y la carta de Nichols, que se realizan en el dominio de la frecuencia. La ventaja de estas herramientas es que se pueden bosquejar mediante métodos aproximados sin realizar un dibujo detallado. En consecuencia, el diseñador puede realizar diseños empleando especificaciones en el dominio de la frecuencia tales como **margen de ganancia, margen de fase, M_r,** etcétera. Los sistemas de orden superior no presentan mayor problema. Para ciertos tipos de controlador, existen procedimientos de diseño en la frecuencia que reducen el esfuerzo de prueba y error a un mínimo.
2. El diseño en el dominio del tiempo que emplea especificaciones de diseño tales como **tiempo de levantamiento, tiempo de retardo, tiempo de asentamiento, sobrepaso máximo,** etc., es factible *analíticamente* sólo para sistemas de segundo orden, o sistemas que se puedan aproximar mediante sistemas de segundo orden. Los procedimientos generales de diseño que emplean especificaciones en el dominio del tiempo son difíciles de establecer para sistemas de orden superior a segundos.

▲ Las ventajas históricas de los diseños en el dominio de la frecuencia son disminuidas por la disponibilidad de herramientas de cómputo.

El desarrollo y la disponibilidad de software de computadora amigable y poderoso ha cambiado rápidamente la práctica del diseño de sistemas de control, que hasta hace poco había estado dictado por el desarrollo histórico. Con herramientas de software modernas, el diseñador puede correr, en unos cuantos minutos, un gran número de diseños empleando especificaciones en el dominio del tiempo. Esto disminuye considerablemente la ventaja histórica del diseño en el dominio de la frecuencia, el cual está basado en la conveniencia de realizar el diseño gráfico en forma manual. Además, generalmente es difícil, excepto para el diseñador experimentado, seleccionar un conjunto coherente de especificaciones en el dominio de la frecuencia que correspondan a requisitos de desempeño en el dominio del tiempo. Por ejemplo, especificar un margen de fase de 60° tendrá sentido si se sabe que corresponde a un cierto sobrepaso máximo. En general, para controlar el sobrepaso máximo, se tiene que especificar al menos el margen de fase y M_r. Eventualmente, el establecer un conjunto inteligente de especificaciones en el dominio de la frecuencia se convierte en un proceso de prueba y error que precede al diseño real, el cual, a menudo, también es un esfuerzo de prueba y error. Sin embargo, los métodos en el dominio de la frecuencia aún son valiosos al interpretarse

rechazo a ruido y propiedades de sensibilidad del sistema, y la mayoría de ellos ofrecen otra perspectiva al proceso de diseño. Por lo anterior, en este capítulo, las técnicas de diseño en los dominios del tiempo y la frecuencia son tratados de manera estrecha, para que se pueda realizar una comparación y una referencia cruzada entre los métodos alternativos.

10-1-2 Configuraciones del controlador

En general, la dinámica de un proceso lineal controlado puede representarse por el diagrama de bloques de la Fig. 10-1. El objetivo de diseño es que las variables controladas, representadas por el vector de salida $\mathbf{y}(t)$, se comporten en cierta forma deseada. El problema esencialmente involucra el determinar la señal de control $\mathbf{u}(t)$ dentro de un intervalo prescrito para que todos los objetivos de diseño sean satisfechos.

La mayoría de los métodos de diseño de sistemas de control convencionales se basan en el **diseño de una configuración fija,** en el que en un principio el diseñador decide la configuración básica del sistema diseñado completo y el lugar donde el controlador estará colocado en relación con el proceso controlado. Entonces, el problema involucra el diseño de los elementos del controlador. Debido a que la mayoría de los esfuerzos de control involucran la modificación o compensación de las características de desempeño del sistema, el diseño general que emplea una configuración fija también es llamada **compensación.**

La Fig. 10-2 ilustra varias configuraciones comúnmente empleadas con compensación controlador, las cuales se describen brevemente a continuación.

- ▲ **Compensación en serie (cascada).** La Fig. 10-2(a) muestra la configuración del sistema más comúnmente utilizada con el controlador colocado en serie con el proceso controlado, y la configuración es llamada **compensación en serie** o **en cascada.**
- ▲ **Compensación mediante realimentación.** En la Fig. 10-2(b), el controlador está colocado en la trayectoria menor de realimentación y el esquema es llamado **compensación mediante realimentación.**
- ▲ **Compensación mediante la realimentación de estado.** La Fig. 10-2(c) muestra un sistema que genera la señal de control mediante la realimentación de las variables de estado a través de ganancias constantes reales, y el esquema se conoce como **realimentación de estado.** El problema con el control mediante la realimentación del estado es que para sistemas de orden superior, el gran número de variables de estado involucradas requeriría una gran cantidad de transductores para detectar las variables de estado para la realimentación. Por tanto, las implantaciones del esquema de control mediante la realimentación de estado puede ser costoso impráctico. Aun para sistemas de bajo orden, a menudo no todas las variables de estado son asequibles directamente, y puede ser necesario crear un **observador** o **estimador** que estime las variables de estado a partir de las mediciones de las variables de salida.

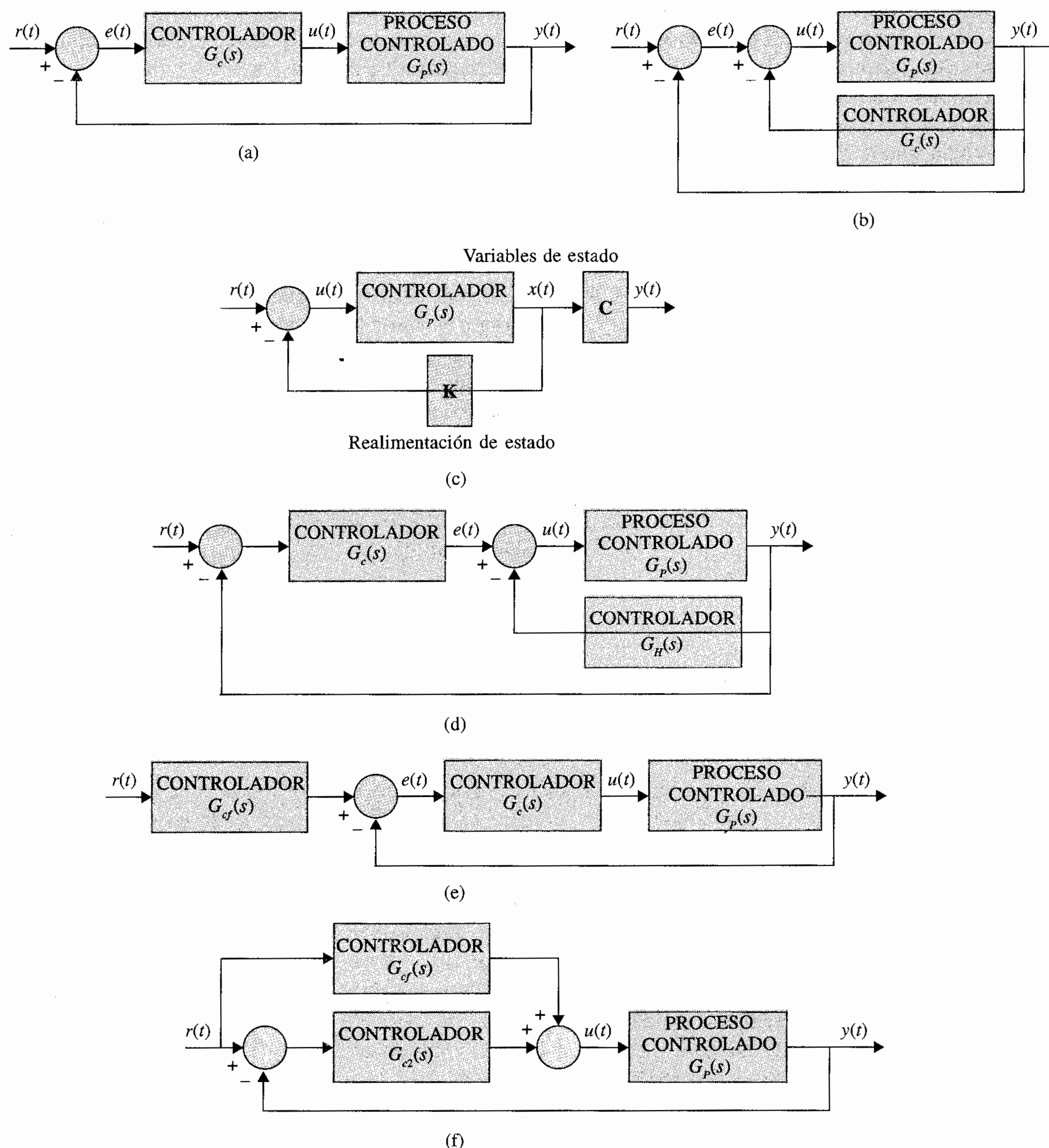


Figura 10-2 Configuraciones de varios controladores en la compensación de sistemas de control. (a) Compensación en serie o cascada. (b) Compensación mediante realimentación. (c) Control mediante realimentación de estado. (d) Compensación en serie-realimentada (dos grados de libertad). (e) Compensación directa con compensación en serie (dos grados de libertad). (f) Compensación en prealimentación (dos grados de libertad).

Los esquemas de compensación mostrados en las Figs. 10-2(a), (b), y (c) tienen un grado de libertad ya que sólo hay un controlador en cada sistema, aun cuando el controlador pueda tener más de un parámetro que pueda variar. La desventaja con un controlador de un grado de libertad es que los criterios de desempeño que pueden realizarse están limitados. Por ejemplo, si un sistema es diseñado para alcanzar un cierto grado de estabilidad relativa, puede tener baja sensibilidad a variaciones de parámetros. O si las raíces de la ecuación característica se seleccionan para proporcionar una cierta cantidad de amortiguamiento relativo, el sobrepaso máximo de la respuesta al escalón puede ser excesivo, debido a los ceros de la función de transferencia en lazo cerrado. Los esquemas de compensación mostrados en las Figs. 10-2(d), (e) y (f) tienen dos grados de libertad.

▲ **Compensación en serie-realimentada.** La Fig. 10-2(d) muestra la compensación en serie-realimentada para la cual se emplea un controlador en serie y un controlador en la realimentación.

▲ **Compensación prealimentada.** Las Figs. 10-2(e) y (f) muestran la llamada **compensación prealimentada.** En la Fig. 10-2(e), el controlador prealimentado $G_{cf}(s)$ es colocado en serie con el sistema en lazo cerrado, que tiene un controlador en serie $G_c(s)$ en la trayectoria directa. En la Fig. 10-2(f) el controlador prealimentado $G_{cf}(s)$ está colocado en paralelo con la trayectoria directa. La clave de la compensación prealimentada es que el controlador $G_{cf}(s)$ no esté en el lazo del sistema, por tanto no afecta las raíces de la ecuación característica del sistema original. Los polos y ceros de $G_{cf}(s)$ se pueden escoger para añadir o cancelar los polos y ceros de la función de transferencia en lazo cerrado.

▲ Todos los diseños de los sistemas de control se beneficiarán desde ambos puntos de vista, los dominios del tiempo y la frecuencia.

Uno de los controladores más ampliamente empleados en estos esquemas de compensación mencionados anteriormente es el controlador PID, el cual aplica una señal al proceso que es una combinación proporcional, integral y derivada de la señal de actuación. Debido a que estos componentes de la señal se pueden realizar y visualizar con facilidad en el dominio del tiempo, los controladores PID se diseñan comúnmente empleando métodos en el dominio del tiempo. Además de los controladores tipo PID, los controladores de adelanto, atraso, adelanto-atraso y de muesca también se emplean frecuentemente. Los nombres de estos controladores provienen de las propiedades de sus respectivas características en el dominio de la frecuencia. Como resultado, estos controladores se diseñan a menudo empleando conceptos en el dominio de la frecuencia. No obstante, estas tendencias de diseño, todos los diseños de sistemas de control se benefician al observar los diseños resultantes desde ambos puntos de vista, en los dominios de la frecuencia y del tiempo. Por tanto, ambos métodos se emplean ampliamente en este capítulo.

Se debe señalar que la lista de esquemas de compensación anterior no es exhaustiva. Los detalles de estos esquemas de compensación se discuten en las secciones subsecuentes. Aunque los sistemas ilustrados en la Fig. 10-2 son para control en tiempo continuo, las mismas configuraciones se pueden emplear en el control en tiempo discreto, en cuyo caso todos los controladores son digitales, con los convertidores de señal e interfaces necesarias.

10-1-3 Principios fundamentales de diseño

Después que se ha escogido una configuración del controlador, el diseñador debe escoger un tipo de controlador que con la selección adecuada de los valores de sus elementos satisfacerá todas las especificaciones de diseño. Los tipos de controladores disponibles para el diseño de sistemas de control están limitados sólo por la imaginación. Los ingenieros prácticos normalmente establecen que uno escoge el controlador más simple que cumpla con todas las especificaciones de diseño. En la mayoría de los casos, mientras más complejo sea un controlador, es más costoso, menos confiable, y más difícil de diseñar. El escoger un controlador determinado para una aplicación específica se basa a menudo en la experiencia del diseñador, y algunas veces en la intuición, e involucra inevitablemente tanto *arte* como *ciencia*. Como resultado, usted como novato puede encontrar difícil, en forma inicial, realizar una selección inteligente de controladores con cierta confianza. Al entender que la confianza se adquiere sólo a través de la experiencia, este capítulo provee experiencias guiadas que ilustran los elementos básicos del diseño de sistemas de control.

Una vez elegido el controlador, la siguiente tarea es determinar los valores de los parámetros del controlador. Estos parámetros son típicamente coeficientes de una o más funciones de transferencia que componen al controlador. El enfoque de diseño básico es emplear las herramientas de análisis discutidas en los capítulos anteriores para determinar cómo los valores de los parámetros individuales afectan las especificaciones de diseño, y finalmente, el desempeño del sistema. Con base en esta información, se determinan los parámetros del controlador para que se cumplan todas las especificaciones de diseño. Mientras algunas veces este proceso es directo, más frecuentemente no involucra muchas iteraciones de diseño, ya que normalmente los parámetros del controlador interactúan unos con otros y afectan las especificaciones de diseño en formas conflictivas. Por ejemplo, el valor de un parámetro en particular se puede seleccionar para que el sobrepaso máximo sea satisfecho, pero en el proceso de variar el valor de otro parámetro en un intento por cumplir el requisito de tiempo de asentamiento, la especificación de sobrepaso máximo ¡puede ya no cumplirse! Es claro que mientras más especificaciones de diseño y más parámetros haya, el proceso de diseño se vuelve más complicado.

Al realizar el diseño ya sea en el dominio del tiempo o de la frecuencia, es importante establecer algunas guías básicas o reglas de diseño. Se debe mantener en mente que el diseño en el dominio del tiempo normalmente se basa fuertemente en el plano s y en el lugar geométrico de las raíces. El diseño en el dominio de la frecuencia está basado en la manipulación de la ganancia y la fase de la función de transferencia de lazo para que se cumplan las especificaciones.

En general, es útil resumir las características en el dominio de la frecuencia y del tiempo para que se puedan emplear como guía para propósitos de diseño.

1. Los polos complejos conjugados de la función de transferencia en lazo cerrado producen una respuesta al escalón unitario que es subamortiguada. Si todos los polos son reales, la respuesta al escalón unitario es sobreamortiguada. Sin embargo, los ceros de la función de transferencia en lazo cerrado pueden causar un sobrepaso aun si el sistema es sobreamortiguado.
2. La respuesta de un sistema está dominada por aquellos polos más cercanos al origen del plano s. Los transitorios debidos a aquellos polos a la izquierda decaen más rápido.

3. Mientras más alejados a la izquierda en el plano s estén los polos dominantes del sistema, el sistema responderá más rápido y mayor será el ancho de banda.
4. Mientras más alejados a la izquierda del plano s estén los polos dominantes del sistema, más caro será y más grandes serán sus señales internas. Aunque esto se puede justificar en forma analítica, es obvio que golpear más fuerte un clavo con un martillo hará que el clavo entre más rápido pero requiere más energía por golpe. En forma similar, un carro de carreras puede acelerar más rápido, pero emplea más combustible que un carro promedio.
5. Cuando un polo y un cero de una función de transferencia de un sistema se cancelan uno con el otro, la porción de la respuesta del sistema asociada con el polo tendrá una magnitud más pequeña.
6. Las especificaciones en los dominios del tiempo y de la frecuencia están asociadas vagamente. El tiempo de levantamiento y el ancho de banda son inversamente proporcionales. El margen de fase, el margen de ganancia, M_r, y el amortiguamiento son inversamente proporcionales.

10-2 Diseño con el controlador PD

En todos los ejemplos de sistemas de control discutidos hasta ahora, el controlador ha sido típicamente un amplificador simple con una ganancia constante K. Este tipo de acción de control se conoce formalmente como **control proporcional,** ya que la señal de control a la salida del controlador está relacionada con la entrada del controlador mediante una constante proporcional. En forma intuitiva, se debe ser capaz de emplear la derivada o la integral de la señal de entrada, además de la operación proporcional. En consecuencia, se puede considerar un controlador en tiempo continuo más general como aquel que contiene componentes tales como sumadores (suma y resta), amplificadores, atenuadores, diferenciadores e integradores. La tarea del diseñador es determinar cuáles de estos componentes deben emplearse, en qué proporción, y cómo deberán estar conectados. Por ejemplo, uno de los controladores más ampliamente empleados es el controlador PID, mencionado en la sección 4-9, donde las letras son las iniciales de **proporcional, integral** y **derivativo.** Los componentes integral y derivativo del controlador PID tienen una implicación individual en el desempeño, y sus aplicaciones requieren un entendimiento de las bases de estos elementos. Para poder entender a este controlador, se considera primero sólo la porción PD de este controlador.

La Fig. 10-3 muestra el diagrama de bloques de un sistema de control realimentado que en forma arbitraria tiene un proceso prototipo de segundo orden con la función de transferencia:

$$G_p(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \tag{10-1}$$

El controlador en serie es del tipo proporcional-derivativo (PD) con la función de transferencia:

$$G_c(s) = K_P + K_D s \tag{10-2}$$

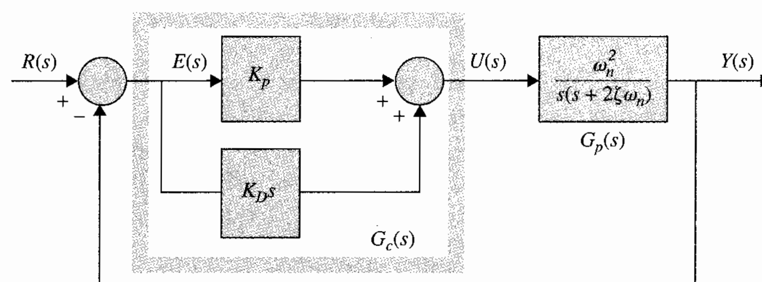


Figura 10-3 Sistema de control con el control PD.

Por tanto la señal de control aplicada al proceso es:

$$u(t) = K_P e(t) + K_D \frac{de(t)}{dt} \tag{10-3}$$

en donde K_P y K_D son las constantes proporcional y derivativa, respectivamente. Al emplear los componentes dados en la tabla 4-1, en la Fig. 10-4 se muestran dos realizaciones mediante circuitos electrónicos del controlador PD. La función de transferencia del circuito de la Fig. 10-4(a) es:

$$G_c(s) = \frac{E_o(s)}{E_{in}(s)} = \frac{R_2}{R_1} + R_2 C_1 s \tag{10-4}$$

Al comparar la ecuación (10-2) con la (10-4), se tiene:

$$K_P = R_2/R_1 \qquad K_D = R_2 C_1 \tag{10-5}$$

La función de transferencia del circuito de la Fig. 10-4(b) es:

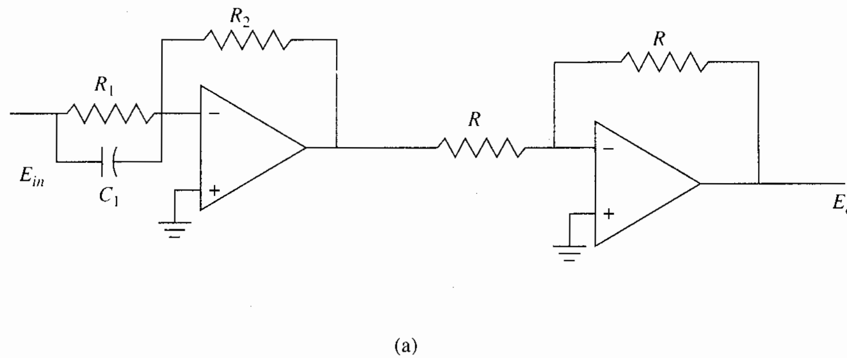
$$G_c(s) = \frac{E_o(s)}{E_{in}(s)} = \frac{R_2}{R_1} + R_d C_d s \tag{10-6}$$

Al comparar la ecuación (10-2) con la ecuación (10-6), se tiene:

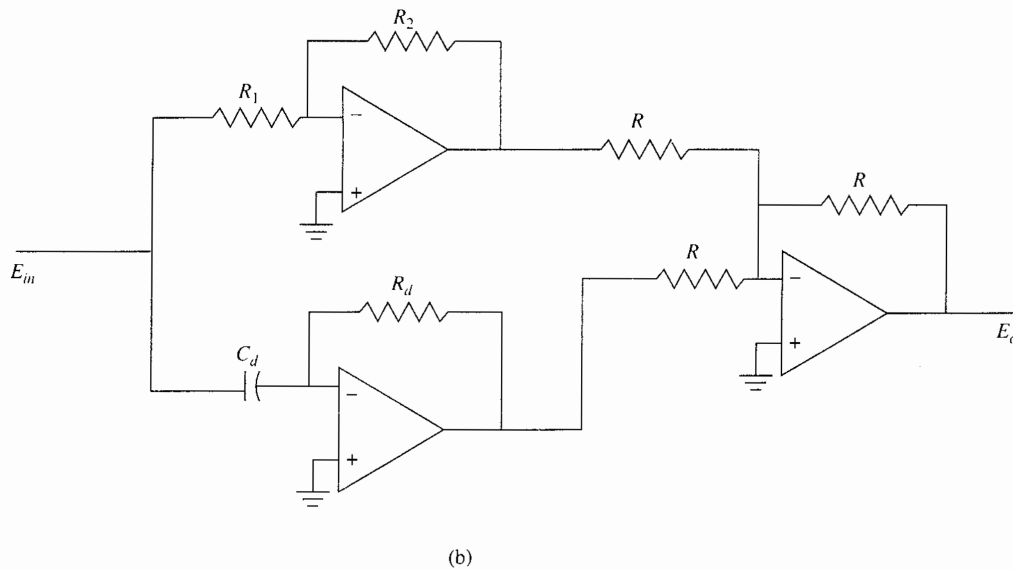
$$K_P = R_2/R_1 \qquad K_D = R_d C_d \tag{10-7}$$

La ventaja del circuito de la Fig. 10-4(a) es que sólo emplea dos amplificadores operacionales. Sin embargo, el circuito no permite una selección independiente de K_P y K_D, ya que son comúnmente dependientes de R_2. Un hecho importante del controlador PD es que si el valor de K_D es grande, se requerirá un capacitor C_1 grande. El circuito de la Fig. 10-4(b) permite que K_P y K_D sean controladas en forma independiente. Un K_D grande se puede compensar al

▲ El PD a cero s = – funci trasfe traye direct



(a)



(b)

Figura 10-4 Circuito con amplificadores operacionales del controlador PD, $G_c(s) = K_P + K_D s$. (a) Circuito de dos amplificadores operacionales. (b) Circuito de tres amplificadores operacionales.

▲ El control PD añade un cero simple en $s = -K_P/K_D$ a la función de trasferencia de la trayectoria directa.

seleccionar un valor grande para R_d, lo que resulta en un valor realista de C_d. Aunque el enfoque de este libro no incluye todos los temas prácticos involucrados en la implantación de funciones de transferencia, estos temas son de suma importancia en la práctica.

La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema compensador es:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = G_c(s)G_p(s) = \frac{\omega_n^2(K_P + K_D s)}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \tag{10-8}$$

la cual muestra que el control PD equivale a añadir un cero simple en $s = -K_P/K_D$ a la función de transferencia de la trayectoria directa.

10-2-1 Interpretación en el dominio del tiempo del control PD

El efecto del control PD sobre la respuesta transitoria de un sistema de control se puede investigar al referirse a las respuestas en el tiempo mostradas en la Fig. 10-5. Se supone que la respuesta al escalón unitario de un sistema estable con el control proporcional solamente es como la que se presenta en la Fig. 10-5(a), la cual tiene un sobrepaso máximo relativamente grande y es un poco oscilatoria. La señal de error correspondiente, que es la diferencia entre la entrada escalón unitario y la salida $y(t)$, y su derivada en tiempo $de(t)/dt$ se muestran en las Figs. 10-5(b) y (c), respectivamente. Las características de sobrepaso y oscilación también se reflejan en $e(t)$ y $de(t)/dt$. Por motivos de ilustración se supone que el sistema contiene un

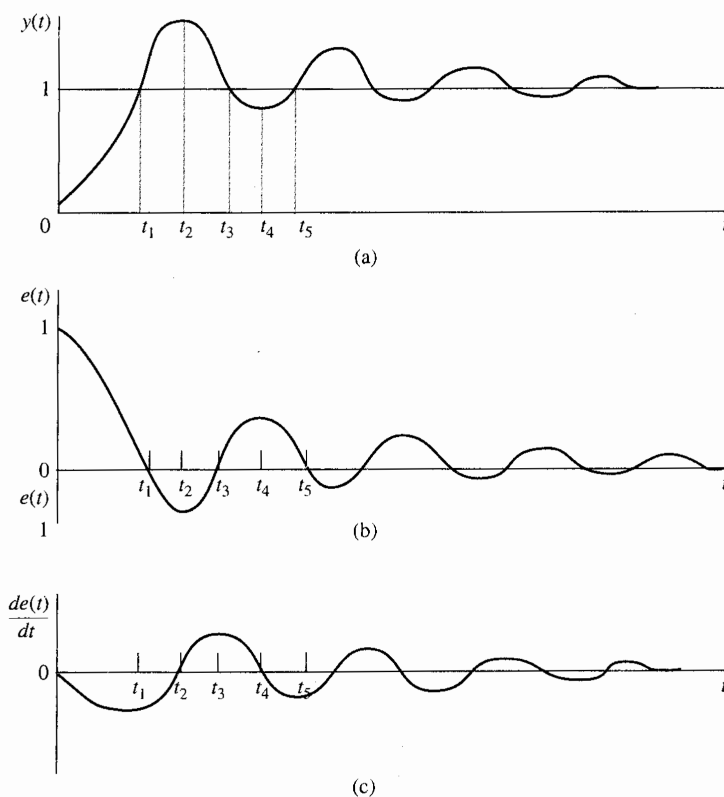


Figura 10-5 Formas de onda de $y(t)$, $e(t)$ y $de(t)/dt$, que muestran el efecto del control derivativo. (a) Respuesta al escalón unitario. (b) Señal de error. (c) Tasa de tiempo de cambio de la señal de error.

motor de alguna clase con su par proporcional a $e(t)$. El desempeño del sistema con el control proporcional se analiza como sigue:

1. Durante el intervalo de tiempo, $0 < t < t_1$. La señal de error $e(t)$ es positiva. El par del motor es positivo y se incrementa rápidamente. El sobrepaso grande y la oscilación subsecuente en la salida $y(t)$ se deben a la cantidad excesiva del par desarrollado por el motor y a la falta de amortiguamiento durante este intervalo.
2. Durante el intervalo, $t_1 < t < t_3$. La señal de error $e(t)$ es negativa, y el par correspondiente del motor es negativo. Este par negativo tiende a reducir la aceleración de salida y eventualmente causa que la dirección de la salida $y(t)$ se invierta y tenga un sobrepaso negativo.
3. Durante el intervalo, $t_3 < t < t_5$. El par del motor es otra vez positivo, por tanto, tiende a reducir el sobrepaso negativo en la respuesta causada por el par negativo en el intervalo previo. Ya que el sistema se supone estable, la amplitud del error se reduce con cada oscilación, y la salida eventualmente se establece en su valor final.

Al considerar el análisis anterior de la respuesta en tiempo del sistema, se puede decir que los factores que contribuyen al sobrepaso grande son:

1. El par correctivo positivo en el intervalo $0 < t < t_1$ es muy grande.
2. El par retardado en el intervalo $t_1 < t < t_2$ es inadecuado.

Por tanto, para reducir el sobrepaso en la respuesta al escalón, sin incrementar significativamente el tiempo de levantamiento, el enfoque lógico sería:

1. Disminuir la cantidad de par correctivo positivo durante $0 < t < t_1$.
2. Incrementar el par retardado durante $t_1 < t < t_2$.

En forma similar, durante el intervalo, $t_2 < t < t_4$, el par correctivo negativo en $t_2 < t < t_3$ se debe reducir, y el par retardado durante $t_3 < t < t_4$, el cual está ahora en la dirección positiva, se debe incrementar para mejorar el sobrepaso negativo *de* $y(t)$.

El control PD descrito en la ecuación (10-2) produce precisamente el efecto de compensación requerido. Ya que la señal de control del control PD está dada por la ecuación (10-3), la Fig. 10-5(c) muestra los siguientes efectos producidos por el controlador PD:

1. Para $0 < t < t_1$, $de(t)/dt$ es negativo; esto reducirá el par original desarrollado debido al $e(t)$ solo.
2. Para $t_1 < t < t_2$, tanto $e(t)$ como $de(t)/dt$ son negativos, lo que significa que el par retardado negativo desarrollado será más grande que sólo con el control proporcional.
3. Para $t_2 < t < t_3$, $e(t)$ y $de(t)/dt$ tienen signos opuestos. Por tanto el par negativo que originalmente contribuye al sobrepaso negativo también se reduce.

Por tanto, todos estos efectos resultarán en menores sobrepasos positivos y negativos en $y(t)$.

▲ PD es en esencia un control anticipatorio.

Otra forma de ver el control derivativo es que ya que $de(t)/dt$ representa la pendiente de $e(t)$, el control PD es esencialmente un control *anticipativo*. Esto es, al conocer la pendiente, el controlador puede anticipar la dirección del error y emplearla para controlar mejor el proceso. Normalmente, en sistemas lineales si la pendiente de $e(t)$ o $y(t)$ debida a la entrada escalón es grande, subsecuentemente ocurrirá un sobrepaso alto. El control derivativo mide la pendiente instantánea de $e(t)$, predice el sobrepaso grande adelante en el tiempo, y hace un esfuerzo correctivo antes de que el sobrepaso excesivo ocurra.

▲ El control derivativo o PD tendrá efecto en el error de estado estable sólo si el error varía con respecto al tiempo.

En forma intuitiva, el control derivativo afecta el error en estado estable de un sistema sólo si el error en estado estable varía con el tiempo. Si el error en estado estable de un sistema es constante con respecto al tiempo, la derivada con respecto al tiempo de este error es cero, y la porción derivativa del controlador no provee ninguna entrada al proceso. Pero si el error en estado estable se incrementa con el tiempo, se genera otra vez un par en proporción a $de(t)/dt$, lo cual reduce la magnitud del error. La ecuación (10-8) también muestra claramente que el control PD no altera el tipo del sistema que gobierna el error en estado estable de un sistema con realimentación unitaria.

10-2-2 Interpretación del control PD en el dominio de la frecuencia

Para el diseño en el domino de la frecuencia, la función de transferencia del controlador PD se escribe como:

$$G_c(s) = K_P + K_D s = K_P \left(1 + \frac{K_D}{K_P} s \right) \qquad (10\text{-}9)$$

▲ El controlador PD es un filtro de paso altas.

que se interpreta más fácilmente en las trazas de Bode. Las trazas de Bode de la ecuación (10-9) se muestra en la Fig. 10-6 con $K_P = 1$. En general, la ganancia del control proporcional K_P se puede combinar con una ganancia en serie del sistema, para que la ganancia en frecuencia

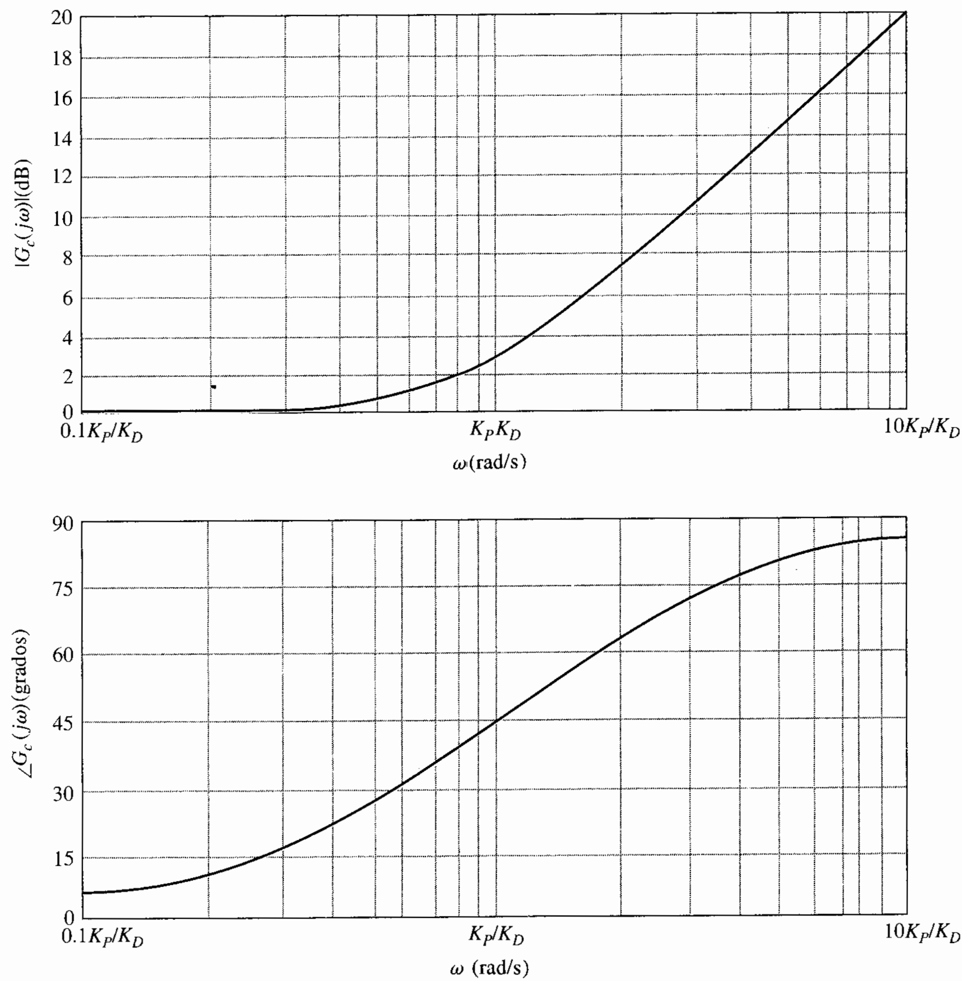


Figura 10-6 Trazas de Bode de $1 + K_D s/K_P$. $K_P = 1$.

▲ El controlador PD tiene la desventaja de que acentúa el ruido en frecuencias altas.

cero del controlador PD se pueda visualizar como la unidad. Las características del filtro paso altas del controlador PD se muestran claramente en la Fig. 10-6. La propiedad de adelanto de fase se puede utilizar para mejorar el margen de fase de un sistema de control. Desafortunadamente, la característica de magnitud del controlador PD empuja la frecuencia de cruce de ganancia a un valor más alto. Por tanto, *el principio de diseño del controlador PD involucra el localizar la frecuencia de corte del controlador,* $\omega = K_P/K_D$, *tal que se logre un mejoramiento efectivo del margen de fase en la nueva frecuencia de cruce de ganancia.* Para un sistema dado, existe un intervalo de valores de K_P/K_D que es óptimo para mejorar el amortiguamiento del sistema. Otra consideración práctica al seleccionar los valores de K_P y K_D está en la implementación física del controlador PD. Otro efecto aparente del control PD en el dominio de la frecuencia es que debido a las características del filtro paso altas, en la

▲ El controlador PD por lo general incrementara el BW y reducira el tiempo de levantamiento de la respuesta escalón.

mayoría de los casos incrementa el BW del sistema y reduce el tiempo de levantamiento de la respuesta al escalón. La desventaja práctica del controlador PD es que la parte diferencial es un filtro paso altas, el cual usualmente acentúa el ruido de alta frecuencia que se introduce por la entrada.

10-2-3 Resumen de los efectos de un control PD

Un controlador PD diseñado adecuadamente afectará el desempeño de un sistema de control en las formas siguientes:

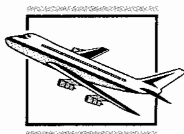
1. Mejora el amortiguamiento y reduce el sobrepaso máximo.
2. Reduce el tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamiento.
3. Incrementa el BW.
4. Mejora el margen de ganancia, el margen de fase y M_r.
5. Puede acentuar el ruido en altas frecuencias.
6. No es efectivo para sistemas ligeramente amortiguados o inicialmente inestables.
7. Puede requerir un capacitor muy grande en la implementación del circuito.

El ejemplo siguiente ilustra los efectos del controlador PD sobre las respuestas en los dominios del tiempo y frecuencia de un sistema de segundo orden.

Ejemplo 10-1

Considere el modelo de segundo orden de un sistema de control de altitud de una aeronave mostrado en la Fig. 7-24. La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema está dada en la ecuación (7-116), y se repite como:

$$G(s) = \frac{4500K}{s(s + 361.2)} \tag{10-10}$$



Se establecen las especificaciones de desempeño como sigue:

Error en estado estable debido a una entrada de rampa unitaria ≤ 0.000433
Sobrepaso máximo $\leq 5\%$
Tiempo de levantamiento $t_r \leq 0.005$ s
Tiempo de asentamiento $t_s \leq 0.005$ s

Para satisfacer el valor máximo del requisito especificado del error en estado estable, K se debe establecer en 181.17. Sin embargo, con este valor de K, el factor de amortiguamiento relativo del sistema es 0.2 y el sobrepaso máximo es 52.7%, como se muestra en la respuesta al escalón unitario en la Fig. 7-25 y repetido en la Fig. 10-9. Se considera insertar un controlador PD en la trayectoria directa del sistema, por lo que el amortiguamiento y el sobrepaso máximo del sistema se mejora mientras se mantiene el error en estado estable debido a la entrada de rampa unitaria en 0.000443.

Diseño en el dominio del tiempo

Con el controlador PD de la ecuación (10-9) y $K = 181.17$, la función de transferencia de la trayectoria directa del sistema se convierte en:

$$G(s) = \frac{\Theta_y(s)}{\Theta_e(s)} = \frac{815\,265(K_P + K_D s)}{s(s + 361.2)} \tag{10-11}$$

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{\Theta_y(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{815\,265(K_P + K_D s)}{s^2 + (361.2 + 815\,265K_D)s + 815\,265K_P} \tag{10-12}$$

La constante de error rampa es:

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{815\,265K_P}{361.2} = 2257.1K_P \tag{10-13}$$

El error en estado estable debido a una entrada rampa unitaria es $e_{ss} = 1/K_v = 0.000443/K_P$.

La ecuación (10-12) muestra que los efectos del controlador PD son:

1. Añadir un cero en $s = -K_P/K_D$ a la función de transferencia en lazo cerrado.
2. Incrementar el "término asociado al amortiguamiento", el cual es el coeficiente de s en el denominador, de 361.2 a $361.2 + 815\,265\ K_D$.

La ecuación característica se escribe como:

$$s^2 + (361.2 + 815\,265K_D)s + 815\,265K_P = 0 \tag{10-14}$$

Se puede establecer, arbitrariamente, $K_P = 1$ lo cual es aceptable desde el punto de vista del requisito de error en estado estable. El factor de amortiguamiento relativo del sistema es:

$$\zeta = \frac{361.2 + 815\,265K_D}{1805.84} = 0.2 + 451.46K_D \tag{10-15}$$

la cual muestra claramente el efecto positivo de K_D sobre el amortiguamiento. Si se deseara tener amortiguamiento crítico, $\zeta = 1$, la ecuación (10-15) da $K_D = 0.001772$. Se debe señalar que la ecuación (10-11) ya no representa un sistema prototipo de segundo orden; la respuesta transitoria también está afectada por el cero de la función de transferencia en $s = -K_P/K_D$. Se observa que para el sistema de segundo orden, cuando el valor de K_D se incrementa, el cero se moverá muy cerca del origen y cancela efectivamente el polo de $G(s)$ en $s = 0$. Por tanto, cuando K_D se incrementa, la función de transferencia en la ecuación (10-11) se aproxima a un sistema de primer orden con el polo en $s = -361.2$, y el sistema en lazo cerrado no tendrá ningún sobrepaso. En general, sin embargo, para sistemas de mayor orden, el cero en $s = -K_P/K_D$ puede incrementar el sobrepaso cuando K_D es muy grande.

Se puede aplicar el método de contornos de las raíces a la ecuación característica de la ecuación (10-14) para examinar el efecto de variar K_P y K_D. Primero, se hace K_D igual a cero, y la ecuación (10-14) se convierte en:

$$s^2 + 361.2s + 815\,265K_P = 0 \tag{10-16}$$

El lugar geométrico de las raíces de la ecuación (10-16) cuando K_P varía desde 0 hasta ∞ se muestra en la Fig. 10-7. Cuando $K_D \neq 0$, la ecuación característica de la ecuación (10-14) está condicionada como:

$$1 + G_{eq}(s) = 1 + \frac{815\,265K_D s}{s^2 + 361.2s + 815{,}265K_P} = 0 \tag{10-17}$$

Los contornos de las raíces de la ecuación (10-14) cuando K_P = constante y K_D varía se construyen con base en la configuración de polos y ceros de $G_{eq}(s)$ y se muestra en la Fig. 10-8 para K_P= 0.25 y K_P = 1. Se observa que cuando $K_P = 1$ y $K_D = 0$, las raíces de la ecuación característica están en −180.6 +

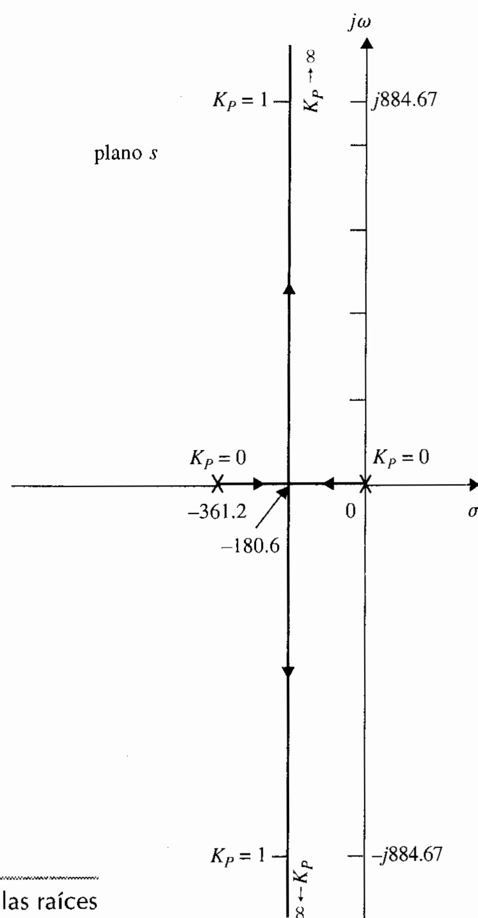


Figura 10-7 Lugar geométrico de las raíces de la ecuación (10-16).

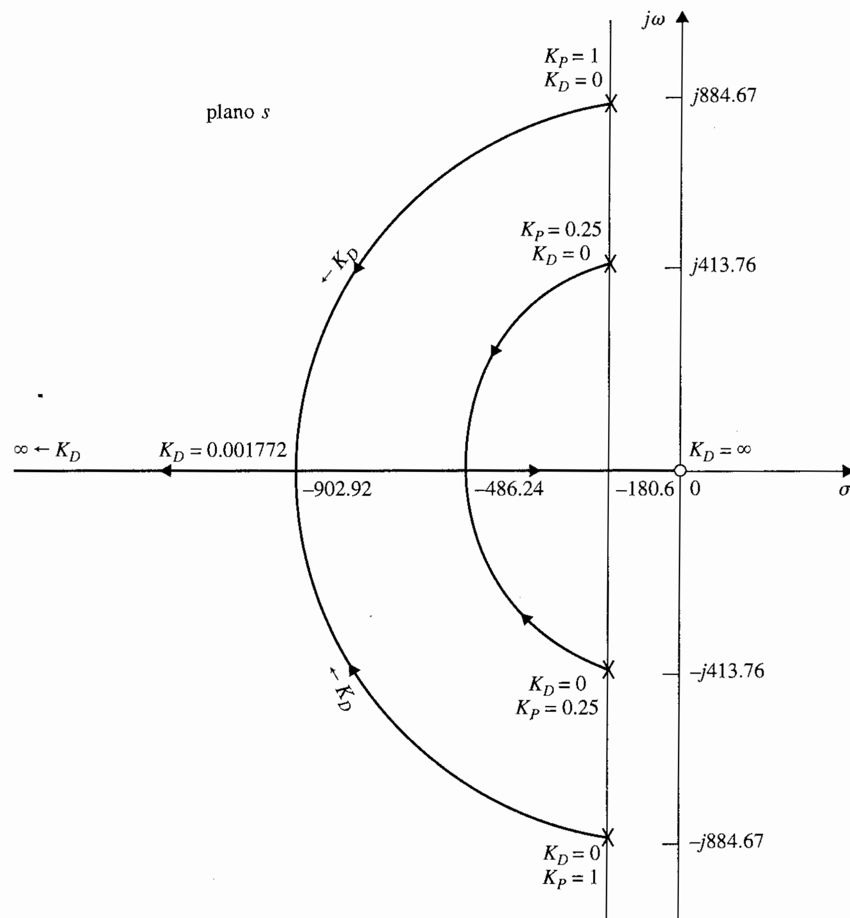


Figura 10-8 Contornos de las raíces de la ecuación (10-14) cuando $K_P = 0.25$ y 1.0; K_D varía.

$j884.67$ y $-180.6 - j884.67$, y el factor de amortiguamiento relativo del sistema en lazo cerrado es 0.2. Cuando el valor de K_D se incrementa, las dos raíces de la ecuación característica se mueven hacia el eje real a lo largo de un arco de círculo. Cuando K_D se incrementa hasta 0.00177, las raíces son reales e iguales, en −902.92, y el amortiguamiento es crítico. Cuando K_D se incrementa más allá de 0.00177, las dos raíces son reales diferentes, y el sistema es sobreamortiguado. Cuando K_P es 0.25 y $K_D = 0$, las dos raíces de la ecuación característica están en $-180.6 + j413.76$ y $-180.6 - j413.76$. Cuando K_D se incrementa, los contornos de la raíces otra vez muestran el mejoramiento en el amortiguamiento debido al controlador PD. La Fig. 10-9 muestra las respuestas al escalón unitario del sistema en lazo cerrado sin controlador PD y con $K_P = 1$ y $K_D = 0.00177$. Con el control PD, el sobrepaso máximo es 4.2%. En el presente caso, aunque K_D se escoge para amortiguamiento crítico, el sobrepaso se debe al cero en $s = -K_P/K_D$ de la función de transferencia en lazo cerrado. La tabla 10-1 muestra los resultados sobre el sobrepaso máximo, tiempo de levantamiento, y tiempo de asentamiento para $K_P = 1$, $K_D = 0$, 0.0005, 0.00177 y 0.0025. Los resultados en la tabla 10-1 muestran que todos los requisitos de desempeño se

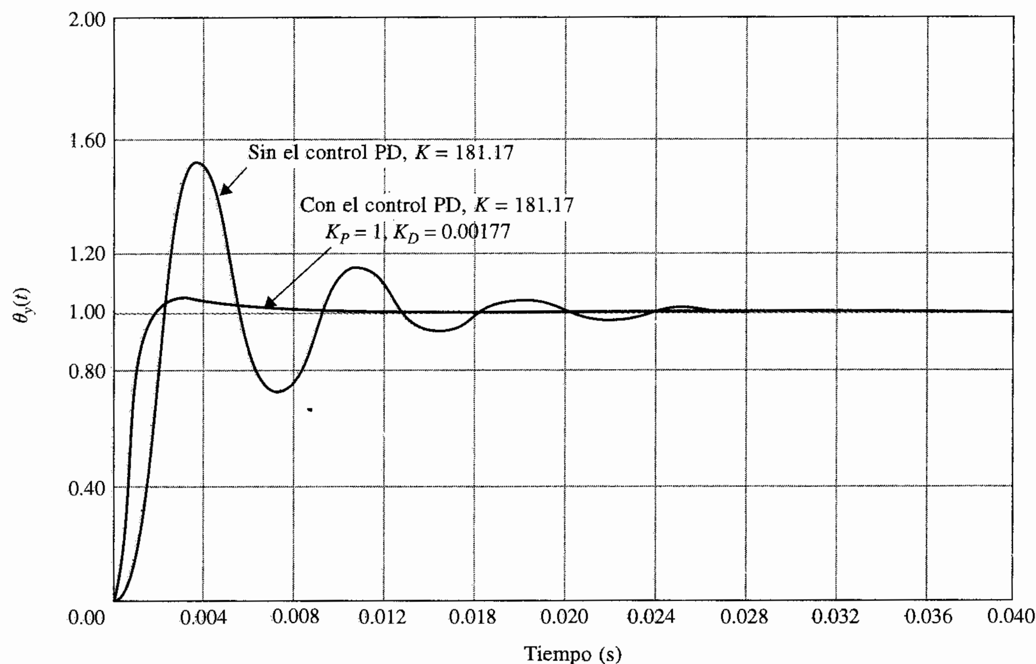


Figura 10-9 Respuestas al escalón unitario del sistema de control de altitud de la Fig. 7-29 con y sin el control PD.

▲ El controlador PD decrementa el sobrepaso máximo, el tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamiento.

satisfacen con $K_D \geq 0.00177$. Se debe mantener en mente que K_D sólo debe ser lo suficientemente grande para satisfacer los requisitos de desempeño. Una K_D grande corresponde a un BW grande, lo cual puede causar problemas con ruido de alta frecuencia, y también tiene que ver con el valor del capacitor en la realización del circuito con amplificadores operacionales. La conclusión general es que el controlador PD disminuye el sobrepaso máximo, el tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamiento.

Tabla 10-1 Atributos de las respuestas al escalón unitario del sistema en el ejemplo 10-1 con el control PD

K_D	t_r (s)	t_s (s)	Sobrepaso máximo (%)
0	0.00125	0.0151	52.2
0.0005	0.0076	0.0076	25.7
0.00177	0.00119	0.0049	4.2
0.0025	0.00103	0.0013	0.7

Otra forma analítica de estudiar los efectos de los parámetros K_P y K_D es evaluar las características de desempeño en el plano de parámetros de K_P y K_D. De la ecuación característica de la ecuación (10-14), se tiene:

$$\zeta = \frac{0.2 + 451.46K_D}{\sqrt{K_P}} \tag{10-18}$$

Al aplicar los requisitos de la ecuación (10-14), se encuentra que para la estabilidad del sistema:

$$K_P > 0 \quad \text{y} \quad K_D > -0.000443$$

Los límites de estabilidad en el plano de parámetros de K_P versus K_D se muestran en la Fig. 10-10. La trayectoria del factor de amortiguamiento relativo constante está descrita por la ecuación (10-18) y es una parábola. La Fig. 10-10 ilustra las trayectorias de ζ constante para $\zeta = 0.5$, 0.707 y 1.0. La constante de error a rampa K_v está dada por la ecuación (10-13), la cual describe una línea horizontal en el plano de parámetros, como se muestra en la Fig. 10-10. La figura proporciona una idea clara de cómo los valores de K_P y K_D afectan los diferentes criterios de desempeño del sistema. Por ejemplo, si K_v está en 2257.1, lo que corresponde a $K_P = 1$, el lugar de ζ constante muestra que el amortiguamiento se

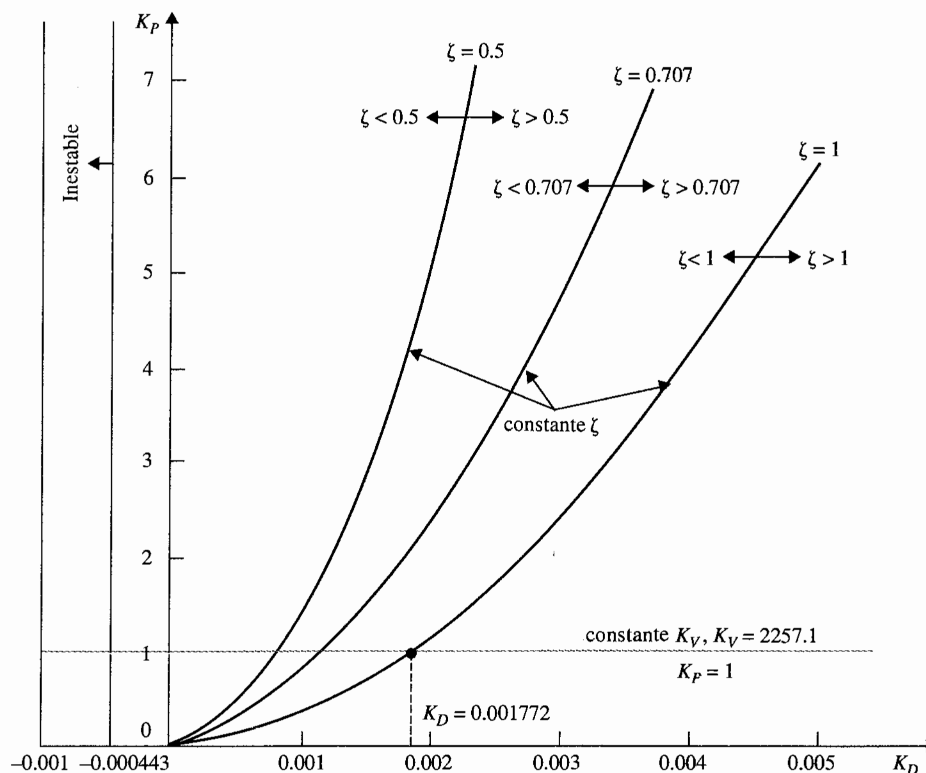


Figura 10-10 Plano de parámetros de K_P contra K_D del sistema de control de altitud con un controlador PD.

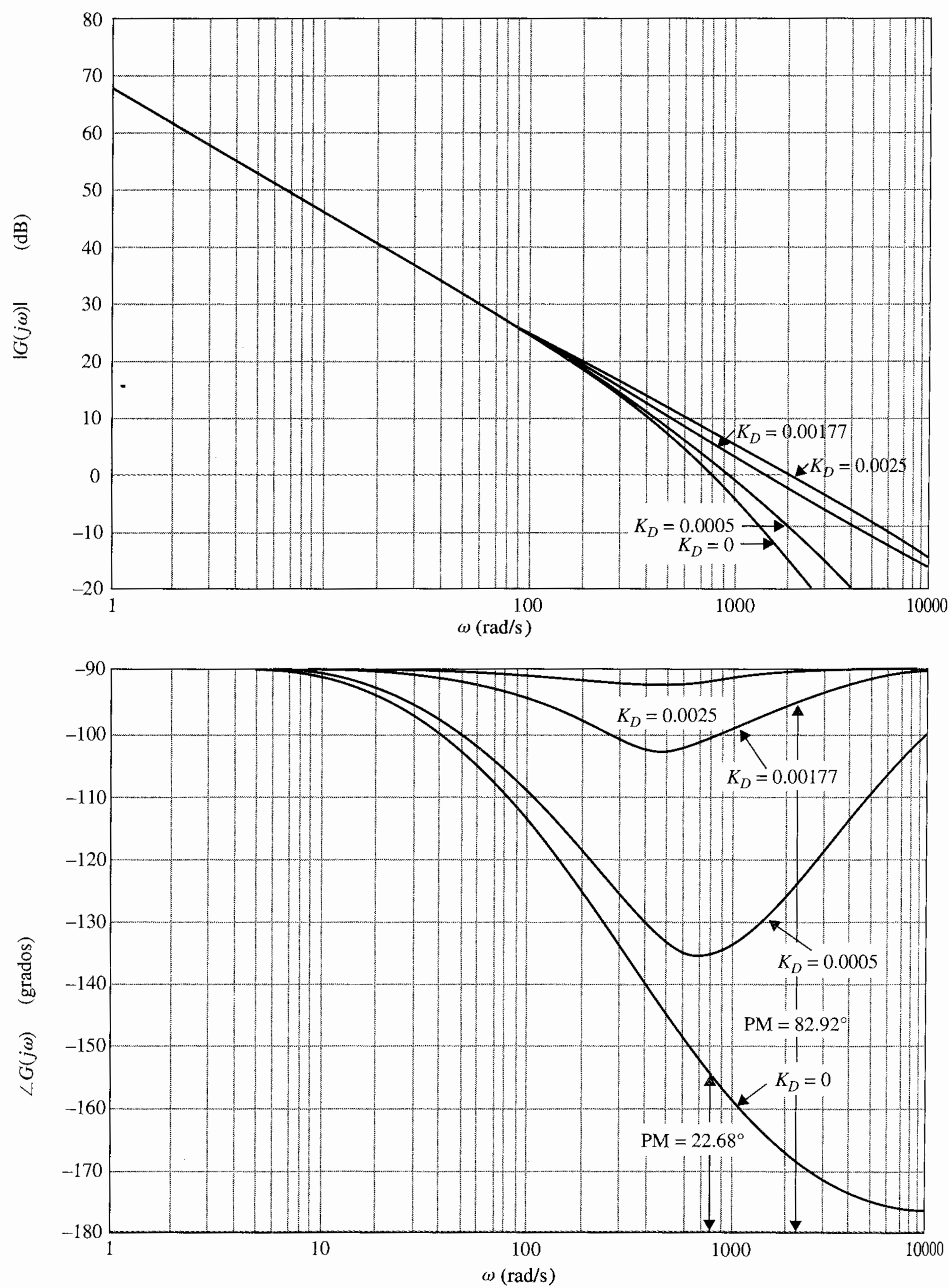


Figura 10-11 Trazas de Bode de $G(s) = \dfrac{815\,265(1+K_D s)}{s(s+361.2)}$

Tabla 10-2 Características en el dominio de la frecuencia del sistema en el ejemplo 10-1 con el control PD

K_D	MG (dB)	MF (grados)	Cruce de ganancia (rad/s)	BW (rad/s)	M_r	t_r (s)	t_s (s)	Sobrepaso máximo (%)
0	∞	22.68	868	1370	2.522	0.00125	0.0151	52.2
0.0005	∞	46.20	913.5	1326	1.381	0.0076	0.0076	25.7
0.00177	∞	82.92	1502	1669	1.025	0.00119	0.0049	4.2
0.0025	∞	88.95	2046	2083	1.000	0.00103	0.0013	0.7

incrementa en forma monótonica con el incremento en K_D. La intersección entre los lugares geométricos de K_v constante y ζ constante da el valor de K_D para K_v y ζ deseados.

Diseño en el dominio de la frecuencia

Ahora se llevará a cabo el diseño del controlador PD en el dominio de la frecuencia. La Fig. 10-11 muestran las trazas de Bode de $G(s)$ en la ecuación (10-11) con $K_P = 1$ y $K_D = 0$. El margen de fase del sistema no compensado es 22.68°, y el pico de resonancia M_r es 2.522. Estos valores corresponden a un sistema ligeramente amortiguado. Se dan los siguientes criterios de desempeño:

Error en estado estable debido a una entrada rampa unitaria ≤ 0.00443
Margen de fase $\geq 80°$
Pico de resonancia $M_r \leq 1.05$
BW ≤ 2000 rad/s

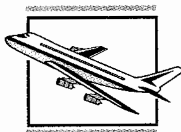
Las trazas de Bode de $G(s)$ para $K_P = 1$, $K_D = 0$, 0.005, 0.00177 y 0.0025 se muestran en la Fig. 10-11. Las mediciones de desempeño en el dominio de la frecuencia para el sistema compensado con estos parámetros del controlador se tabulan en la tabla 10-2, junto con los atributos en el dominio del tiempo para fines de comparación. Las trazas de Bode así como los datos de desempeño fueron generados fácilmente mediante el empleo de **bplot** de **CSAD** o **freqrp** de **ACSP.**

Los resultados en la tabla 10-2 muestran que el margen de ganancia siempre es infinito, y por tanto, la estabilidad relativa se mide mediante el margen de fase. Éste es un ejemplo en donde el margen de ganancia no es una medida efectiva de la estabilidad relativa del sistema. Cuando $K_D = 0.00177$, lo que corresponde a amortiguamiento crítico, el margen de fase es 82.92°, el pico de resonancia M_r es 1.025, y el BW es 1669 rad/s. Todos los requisitos de desempeño en el dominio de la frecuencia son satisfechos. Otros efectos del control PD es que incrementa el BW y la frecuencia de cruce de ganancia. En este caso, la frecuencia de cruce de fase siempre es infinita. ▲

Ejemplo 10-2

Considere el sistema de tercer orden de control de altitud de un aeronave estudiado en el Cap. 7 con la función de transferencia de la trayectoria directa dada en la ecuación (7-137):

$$G(s) = \frac{1.5 \times 10^7 K}{s(s^2 + 3408.3s + 1\ 204\ 000)} \qquad (10\text{-}19)$$



Se emplearán el mismo conjunto de especificaciones en el dominio del tiempo dado en el ejemplo 10-1. En el Cap. 7 se demostró que cuando $K = 181.17$, el sobrepaso máximo del sistema es 78.88 porciento.

Se intentarán cumplir los requisitos de respuesta transitoria mediante el empleo de un controlador PD con la función de transferencia dada en la ecuación (10-2). La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema con el controlador PD y $K = 181.17$ es:

$$G(s) = \frac{2.718 \times 10^9 (K_P + K_D s)}{s(s^2 + 3408.3s + 1\,204\,000)} \tag{10-20}$$

Diseño en el dominio del tiempo

Al hacer que $K_P = 1$ en forma arbitraria, la ecuación característica del sistema en lazo cerrado se escribe como:

$$s^3 + 3408.3s^2 + (1\,204\,000 + 2.718 \times 10^9 K_D)s + 2.718 \times 10^9 = 0 \tag{10-21}$$

Para aplicar el método de los contornos de las raíces, se condiciona la última ecuación como:

$$1 + G_{eq}(s) = 1 + \frac{2.718 \times 10^9 K_D s}{s^3 + 3408.3s^2 + 1\,204\,000s + 2.718 \times 10^9} = 0 \tag{10-22}$$

en donde:

$$G_{eq}(s) = \frac{2.718 \times 10^9 K_D s}{(s + 3293.3)(s + 57.49 + j906.6)(s + 57.49 - j906.6)} \tag{10-23}$$

▲ Si un sistema tiene amortiguamiento muy bajo o es inestable, el control PD puede no ser efectivo para mejorar la estabilidad del sistema.

Los contornos de las raíces de la ecuación (10-21) se dibujan en la Fig. 10-12, con base en la configuración de polos y ceros de $G_{eq}(s)$. Los contornos de la raíces de la Fig. 10-12 revelan la efectividad del controlador PD para mejorar la estabilidad relativa del sistema. Observe que conforme el valor de K_D se incrementa, una raíz de la ecuación característica se mueve desde −3293.3 hacia el origen, mientras que las dos raíces complejas comienzan a la izquierda y eventualmente se aproximan a la asíntota vertical que intersecta en $s = -1704$. La aseveración inmediata de esta situación es que si el valor de K_D es muy grande, *las dos raíces complejas reducirán el amortiguamiento, mientras incrementan la frecuencia natural del sistema.* Parece ser que la ubicación ideal de las dos raíces complejas de la ecuación característica, desde el punto de vista de la estabilidad relativa, es cerca de la curva de los contornos de las raíces, donde el factor de amortiguamiento relativo es aproximadamente 0.707. Los contornos de las raíces de la Fig. 10-12 muestran claramente que si el sistema original tuviera amortiguamiento bajo, o fuera inestable, el cero introducido por el controlador PD pudiera no ser capaz de añadir suficiente amortiguamiento, o aún más, estabilizar el sistema.

La tabla 10-3 proporciona los resultados del sobrepaso máximo, tiempo de levantamiento, tiempo de asentamiento y las raíces de la ecuación característica como funciones del parámetro K_D. Se obtienen las siguientes conclusiones sobre los efectos del controlador PD sobre el sistema de tercer orden.

1. El valor mínimo del sobrepaso máximo, 11.37%, ocurre cuando K_D es aproximadamente 0.002.
2. El tiempo de levantamiento se mejora (reduce) con el incremento de K_D.

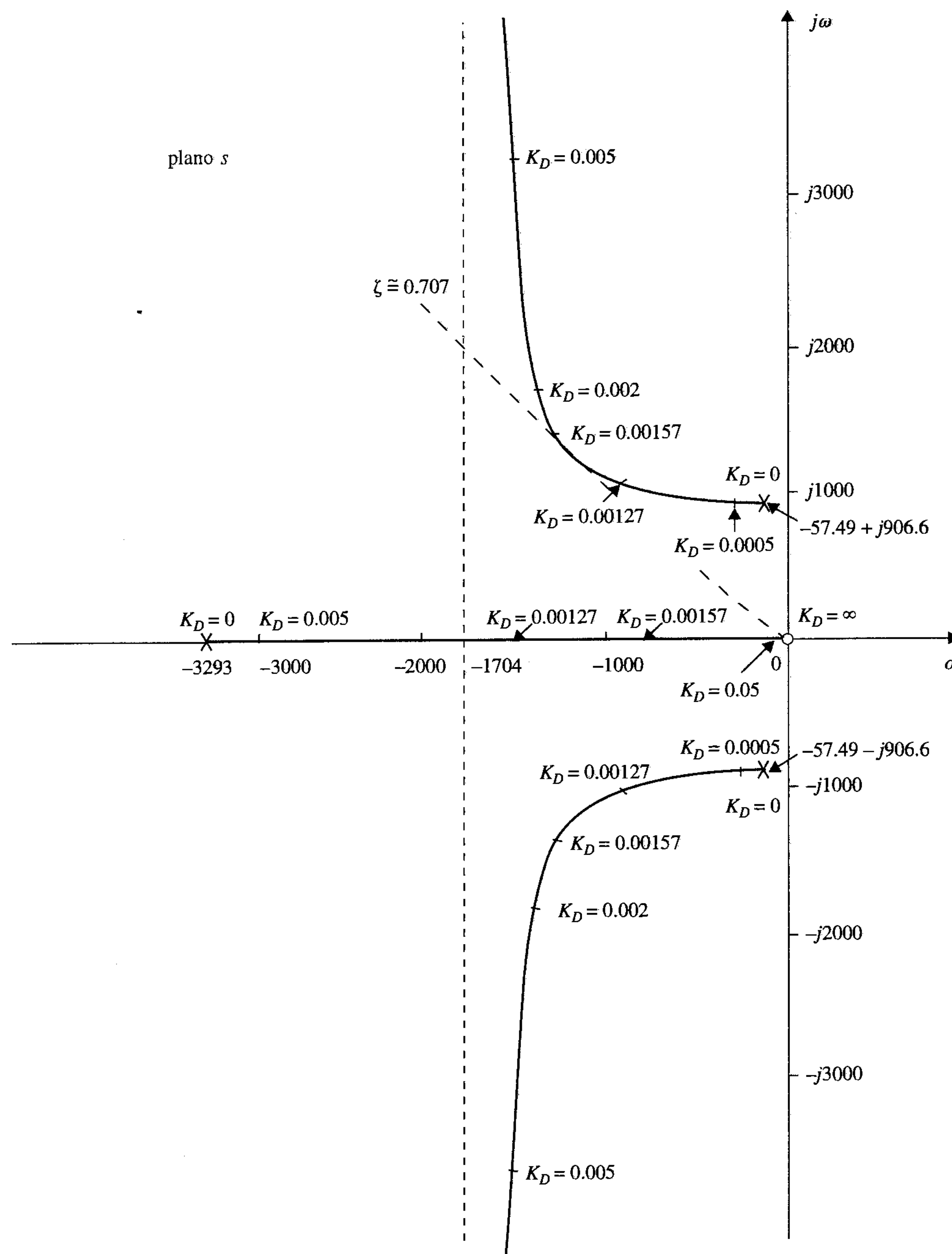


Figura 10-12 Contornos de las raíces de $s^3 + 3408.3s^2 + (1\ 204\ 000 + 2.718 \times 10^9\ K_D)s + 2.718 \times 10^9 = 0$.

Tabla 10-3 Atributos en el dominio del tiempo del sistema de tercer orden del ejemplo 10-2 con el control PD

K_D	Sobrepaso máximo (%)	t_r (s)	t_s (s)	Raíces de la ecuación característica	
0	78.88	0.00125	0.0495	−3293.3,	$-57.49 \pm j906.6$
0.0005	41.31	0.00120	0.0106	−2843.07,	$-282.62 \pm j936.02$
0.00127	17.97	0.00100	0.00398	−1523.11,	$-942.60 \pm j946.58$
0.00157	14.05	0.00091	0.00337	−805.33,	$-1301.48 \pm j1296.59$
0.00200	11.37	0.00080	0.00255	−531.89,	$-1438.20 \pm j1744.00$
0.00500	17.97	0.00042	0.00130	−191.71,	$-1608.29 \pm j3404.52$
0.01000	31.14	0.00026	0.00093	−96.85,	$-1655.72 \pm j5032$
0.05000	61.80	0.00010	0.00144	−19.83,	$-1694.30 \pm j11583$

3. Un valor grande de K_D incrementará el sobrepaso máximo y el tiempo de asentamiento en forma sustancial. Este último se debe a la reducción del amortiguamiento conforme K_D se incrementa en forma indefinida.

La Fig. 10-13 muestra las respuestas al escalón unitario del sistema con el controlador PD para varios valores de K_D. La conclusión es que mientras el control PD mejora el amortiguamiento del sistema, no cumple el requisito del sobrepaso máximo.

Diseño en el dominio de la frecuencia

Las trazas de Bode de la ecuación (10-20) se emplean para realizar el diseño en el dominio de la frecuencia del controlador PD. La Fig. 10-14 muestran las trazas de Bode para $K_P = 1$ y $K_D = 0$. Se obtienen los siguientes datos de desempeño para el sistema no compensado:

Margen de ganancia = 3.6 dB — Ancho de banda BW = 1408.83 rad/s
Margen de fase = 7.77° — Cruce de ganancia = 888.94 rad/s
Pico de resonancia M_r = 7.62 — Cruce de fase = 1103.69 rad/s

▲ Para el control PD, se debe primero examinar la cantidad de fase necesaria para realizar el PM deseado.

Se emplea el mismo conjunto de requisitos de desempeño en el dominio de la frecuencia listados en el ejemplo 10-1. La forma lógica de enfocar este problema es primero examinar cuánta fase adicional se necesita para alcanzar el margen de fase de 80°. Ya que el sistema no compensado con la ganancia puesta para cumplir el requisito de estado estable es sólo de 7.77°, el controlador PD debe proveer una fase adicional de 72.23°. Esta fase adicional se debe colocar en la frecuencia de cruce de ganancia del sistema compensado para alcanzar un margen de fase de 80°. Con referencia a las trazas de Bode del controlador PD de la Fig. 10-6, se observa que la fase adicional está siempre acompañada por una ganancia en la curva de magnitud. Como resultado, el cruce de ganancia del sistema compensado será empujado a una frecuencia más alta en la cual la fase del sistema no compensado corresponderá a un margen de fase más pequeño. Por tanto, se puede correr dentro del problema con regresos disminuidos.

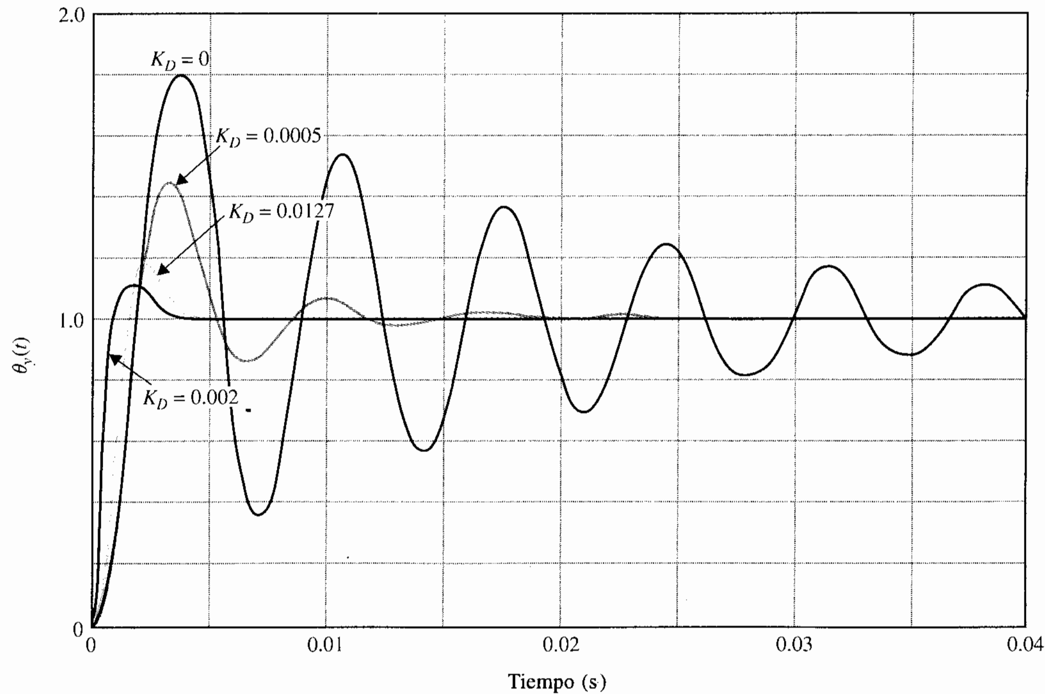


Figura 10-13 Respuestas al escalón unitario del sistema del ejemplo 10-2 con el controlador PD.

Este síntoma es paralelo a la situación ilustrada por los contornos de las raíces de la Fig. 10-12, en la que el valor grande de K_D empujaría simplemente las raíces a una frecuencia más alta, y el amortiguamiento se reduciría.

Los datos de desempeño en el dominio de la frecuencia del sistema compensado junto con los valores de K_D empleados en la tabla 10-3 se obtienen de las trazas de Bode para cada caso, y los resultados se muestran en la tabla 10-4. Las trazas de Bode de algunos de estos casos se muestran en la Fig. 10-14. Observe que el margen de ganancia se vuelve infinito cuando se añade el controlador PD, el margen de fase se vuelve la medida dominante de la estabilidad relativa. Esto es porque la curva de fase del sistema compensado PD permanece abajo del eje de −180°, y el cruce de fase está en el infinito. Cuando $K_D = 0.002$, el margen de fase está en un máximo de 58.42°, y M_r está en un mínimo de 1.07, lo cual concuerda con el valor óptimo obtenido en el diseño en el dominio del tiempo resumido en la tabla 10-3. Cuando el valor de K_D se incrementa más allá de 0.002, el margen de fase se reduce , lo que concuerda con lo encontrado en el diseño en el domino del tiempo que para valores grandes de K_D se reduce el amortiguamiento. Sin embargo, el BW y el cruce de ganancia se incrementan en forma continua al incrementar K_D. El diseño en el dominio de la frecuencia prueba otra vez que el controlador PD no cumple los requisitos de desempeño impuestos al sistema. Al igual que en el diseño en el dominio del tiempo, se ha demostrado que si el sistema original tiene muy poco amortiguamiento, o es inestable, el control PD puede no ser efectivo para mejorar la estabilidad del sistema. Otra situación bajo la cual el control PD puede no ser efectivo es si la pendiente de la curva de fase cerca de la frecuencia de cruce de ganancia es grande; entonces la rápida disminución del margen de fase debido al incremento del cruce de ganancia de la ganancia añadida por el controlador PD puede hacer que la fase adicional no sea efectiva. ▲

▲ Si la pendiente de la curva de fase cerca del cruce de ganancia está muy empinada, el control PD puede no ser efectivo.

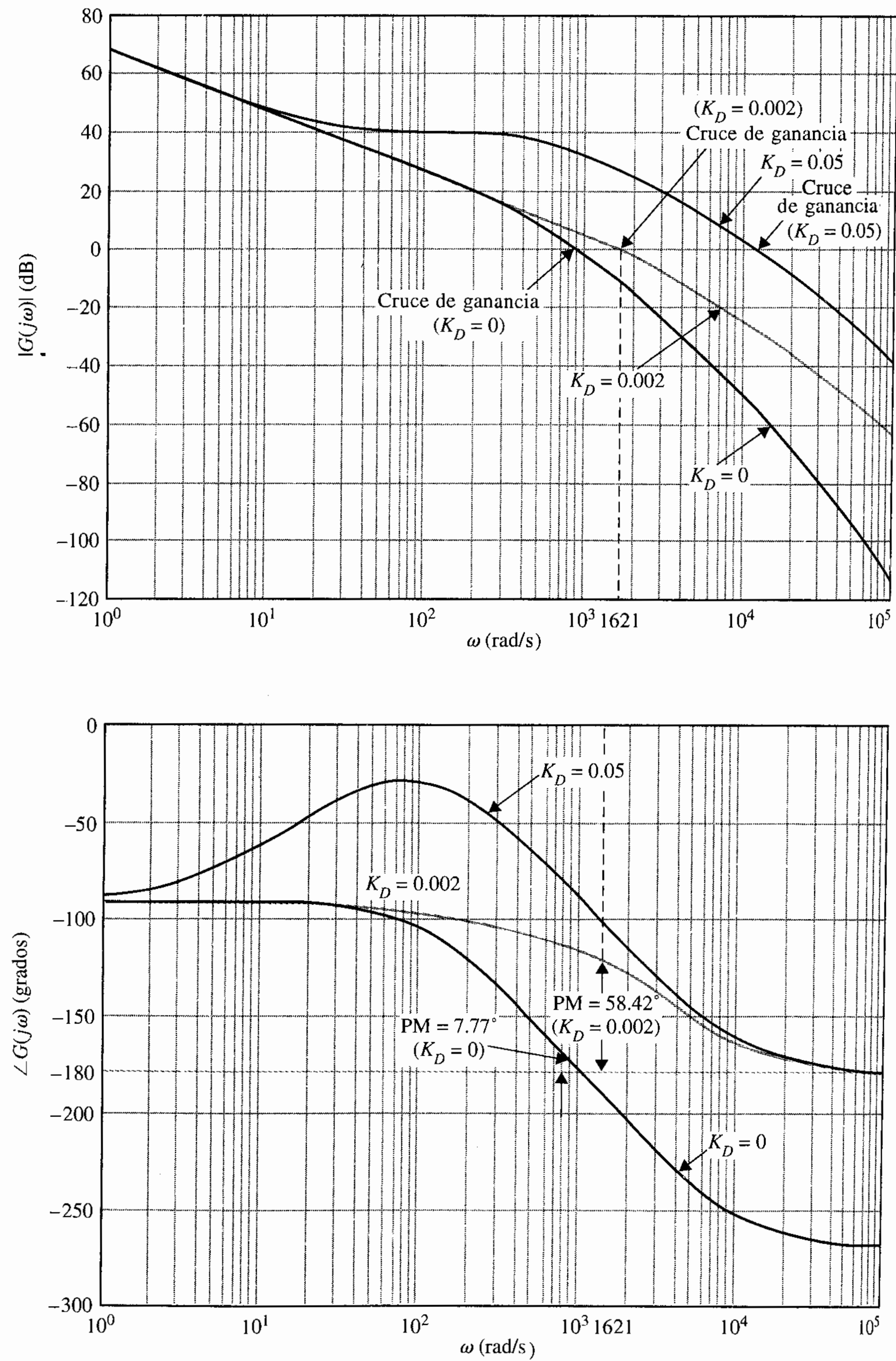


Figura 10-14 Trazas de Bode de $G(s)$ del sistema del ejemplo 10-2 con el control PD.

Tabla 10-4 Características en el dominio de la frecuencia del sistema de tercer orden del ejemplo 10-2 con el controlador PD

K_D	MG (dB)	MF (grados)	M_r	BW (rad/s)	Cruce de ganancia (rad/s)	Cruce de fase (rad/s)
0	3.6	7.77	7.62	1408.83	888.94	1103.69
0.0005	∞	30.94	1.89	1485.98	935.91	∞
0.00127	∞	53.32	1.19	1939.21	1210.74	∞
0.00157	∞	56.83	1.12	2198.83	1372.30	∞
0.00200	∞	58.42	1.07	2604.99	1620.75	∞
0.00500	∞	47.62	1.24	4980.34	3118.83	∞
0.01000	∞	35.71	1.63	7565.89	4789.42	∞
0.0500	∞	16.69	3.34	17989.03	11521.00	∞

10-3 Diseño con el controlador PI

▲ Dada K_P, el valor de K_I no debe ser demasiado pequeño, o el capacitor de la implementación del circuito con amplificador operacional será demasiado grande.

En la Sec. 10-2 se vio que el controlador PD puede mejorar el amortiguamiento y el tiempo de levantamiento de un sistema de control a expensas del ancho de banda más alto y la frecuencia de resonancia, y el error en estado estable no es afectado a menos que varíe con el tiempo, lo cual no es típico para el caso de entradas función escalón. Por tanto, en muchas situaciones el controlador PD puede no llenar los objetivos de compensación.

La parte integral del controlador PID produce una señal que es proporcional a la integral con respecto al tiempo de la entrada del controlador. La Fig. 10-5 ilustra un sistema prototipo de segundo orden con un controlador PI en serie. La función de transferencia del controlador PI es:

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} \tag{10-24}$$

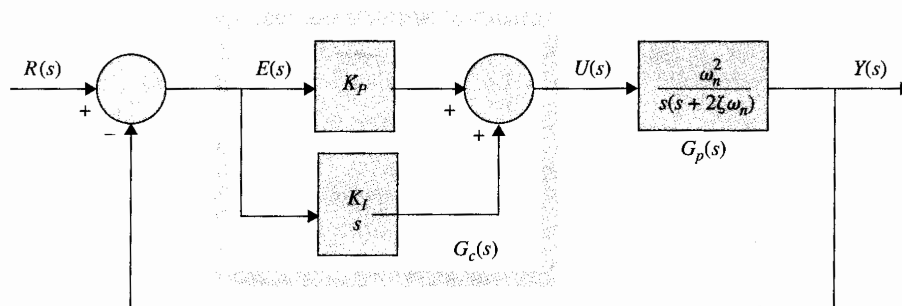


Figura 10-15 Sistema de control con el control PI.

Al emplear los elementos de los circuitos de la tabla 4-1, las realizaciones con dos amplificadores operacionales de la ecuación (10-24) se muestran en la Fig. 10-16. La función de transferencia del circuito de dos amplificadores operacionales en la Fig. 10-16(a) es:

$$G_c(s) = \frac{E_o(s)}{E_{in}(s)} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_1 C_2 s} \tag{10-25}$$

Al comparar la ecuación (10-24) con la (10-25), se tiene:

$$K_P = \frac{R_2}{R_1} \qquad K_I = \frac{R_2}{R_1 C_2} \tag{10-26}$$

La función de transferencia del circuito de tres amplificadores operacionales de la Fig. 10-16(b) es:

$$G_c(s) = \frac{E_o(s)}{E_{in}(s)} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{R_i C_i s} \tag{10-27}$$

Por tanto, los parámetros del controlador PI están relacionados con los parámetros del circuito como:

$$K_P = \frac{R_2}{R_1} \qquad K_I = \frac{1}{R_i C_i} \tag{10-28}$$

▲ El valor del capacitor en el circuito PI con amplificadores operacionales es inversamente proporcional a K_I.

La ventaja con el circuito de la Fig. 10-16(b) es que los valores de K_P y K_I están relacionados en forma independiente de los parámetros del circuito. Sin embargo, K_I es inversamente proporcional al valor del capacitor. Desafortunadamente, los diseños efectivos del control PI resultan en valores pequeños de K_I, y por tanto, se debe tener cuidado de los valores no realistas del capacitor.

La función de transferencia de la trayectoria directa de sistema compensado es:

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{\omega_n^2(K_P s + K_I)}{s^2(s + 2\zeta\omega_n)} \tag{10-29}$$

▲ El control PI incrementa el tipo de sistema por uno, por lo que mejora el error en estado estable por orden uno.

Es claro que los efectos inmediatos del controlador PI son:

1. Añada un cero en $s = -K_I/K_P$ a la función de transferencia de la trayectoria directa.
2. Añada un polo en $s = 0$ a la función de transferencia de la trayectoria directa. Esto significa que el tipo de sistema se incrementa en uno a un sistema tipo 2. Por tanto,

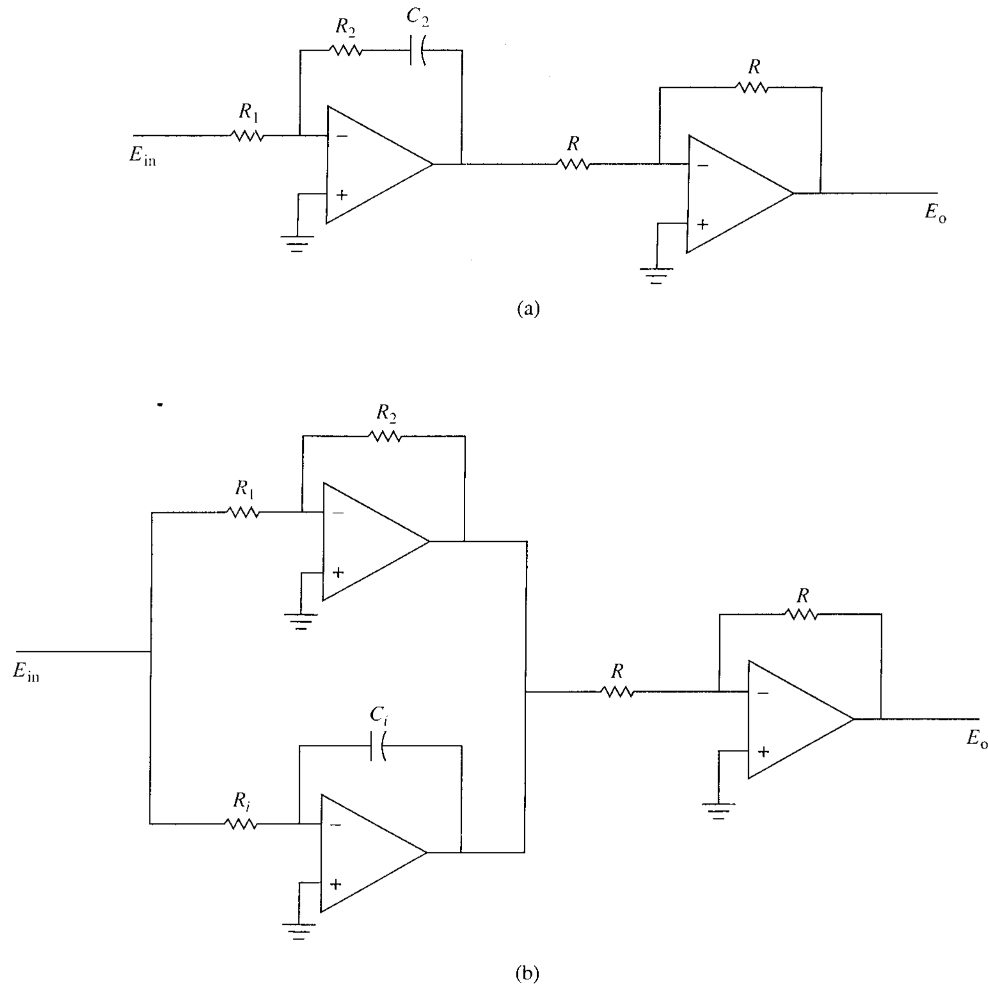


Figura 10-16 Realización del circuito con amplificadores operacionales del controlador PI, $G_c(s) = K_P + K_I/s$. (a) Circuito con dos amplificadores operacionales. (b) Circuito con tres amplificadores operacionales.

el error en estado estable del sistema original se mejora en un orden; es decir, si el error en estado estable a una entrada dada es constante, el control PI lo reduce a cero (considerando que el sistema compensado permanece estable).

Para el sistema de la Fig. 10-15 con la función de transferencia de la trayectoria directa de la ecuación (10-29), el sistema no tendrá un error en estado estable cero cuando la entrada de referencia es una función rampa. Sin embargo, si ahora el sistema es de tercer orden, *puede*

ser menos estable que el sistema de segundo orden original o hasta *inestable* si los parámetros K_P y K_I no se han escogido adecuadamente.

En el caso de un sistema tipo 1 con un control PD, el valor de K_P es importante porque la constante de error rampa K_v es directamente proporcional a K_P, y por tanto, la magnitud del error en estado estable es inversamente proporcional a K_P cuando la entrada es una rampa. Por otro lado, si K_P es muy grande, el sistema puede ser inestable. En forma similar, para un sistema tipo 0, el error en estado estable debido a una entrada escalón será inversamente proporcional a K_P.

▲ El controldor PI es en esencia un filtro paso bajas.

Cuando un sistema tipo 1 se convierte en un sistema tipo 2 mediante un controlador PI, K_P ya no afecta el error en estado estable, y este último siempre es cero para un sistema estable con una entrada rampa. El problema es escoger la combinación adecuada de K_P y K_I para que la respuesta transitoria sea satisfactoria.

▲ Por diseño propio el control PI puede mejorar el desempeño de la transitoria y el estado estable.

10-3-1 Interpretación en el dominio del tiempo y diseño del control PI

La configuración de polos y ceros del controlador PI en la ecuación (10-24) se muestra en la Fig. 10-17. A primera vista se puede observar que el control PI mejorará el error en estado estable a costa de la estabilidad. Sin embargo, se mostrará que si la ubicación del cero de $G_c(s)$ se selecciona adecuadamente, tanto el amortiguamiento como el error en estado estable se

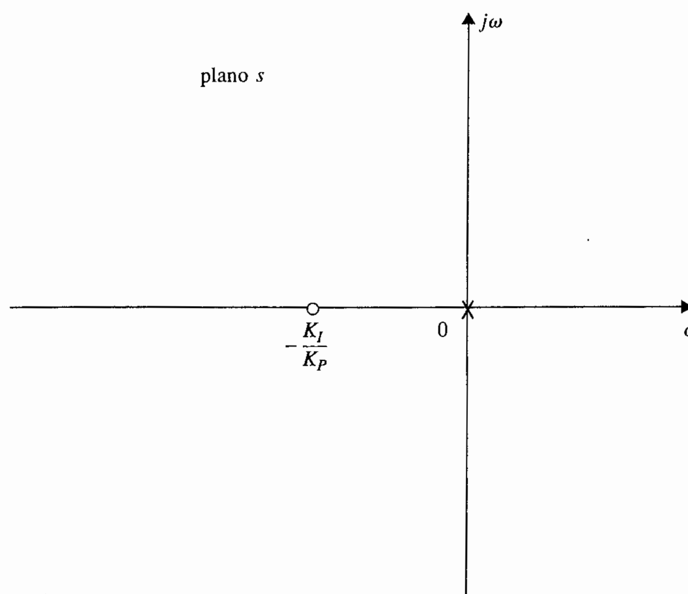


Figura 10-17 Configuración de polos y ceros de un controlador PI.

pueden mejorar. Ya que el controlador PI es en esencia un filtro paso bajas, el sistema compensado tendrá un tiempo de levantamiento más bajo y un tiempo de asentamiento más largo. *Un método factible para diseñar un controlador PI es seleccionar el cero en* $s = -K_I/K_P$ *relativamente cerca del origen y lejos de los polos más significativos del proceso, y los valores de* K_P *y* K_I *deben ser relativamente pequeños.*

10-3-2 Interpretación en el dominio de la frecuencia y diseño del control PI

Para el diseño en el dominio de la frecuencia la función de transferencia del controlador PI se escribe como:

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_I[1 + (K_P/K_I)s]}{s} \tag{10-30}$$

Las trazas de Bode de $G_c(j\omega)$ se muestran en la Fig. 10-18. Observe que la magnitud de $G_c(j\omega)$ en $\omega = \infty$ es $20 \log_{10} K_P$ dB, lo cual representa una atenuación si el valor de K_P es menor que 1. Esta atenuación se puede utilizar para mejorar la estabilidad del sistema. La fase de $G_c(j\omega)$ es siempre negativa, lo cual perjudica la estabilidad. Por tanto se debe poner la frecuencia de corte del controlador, $\omega = K_I/K_P$, tan lejos a la izquierda como el requisito del ancho de banda lo permita, para que las propiedades de atraso de fase de $G_c(j\omega)$ no degraden el margen de fase alcanzado por el sistema.

El procedimiento de diseño en el dominio de la frecuencia para el control PI para obtener un margen de fase dado se describe como sigue:

1. Las trazas de Bode de la función de transferencia de la trayectoria directa $G_p(s)$ del sistema no compensado se hace con la ganacia del lazo puesta de acuerdo con el requisito del desempeño en estado estable.
2. Los márgenes de fase y ganancia del sistema no compensado se determinan de las trazas de Bode. Para un cierto requisito de margen de fase especificado, la nueva frecuencia de cruce de ganancia ω'_g correspondiente a este margen de fase se localiza sobre las trazas de Bode. La traza de magnitud de la función de transferencia del sistema compensado debe pasar a través del eje de 0 dB en esta nueva frecuencia de cruce de ganancia para obtener el margen de fase deseado.
3. Para llevar la curva de magnitud de la función de transferencia del sistema no compensado a 0 dB en la nueva frecuencia de cruce de ganancia ω'_g, el controlador PI debe proveer la cantidad de atenuación igual a la ganancia de la curva de magnitud en la nueva frecuencia de cruce de ganancia. En otras palabras, al hacer que:

$$\left|G_p(j\omega'_g)\right|_{dB} = -20\log_{10} K_P \text{ dB} \qquad K_P < 1 \tag{10-31}$$

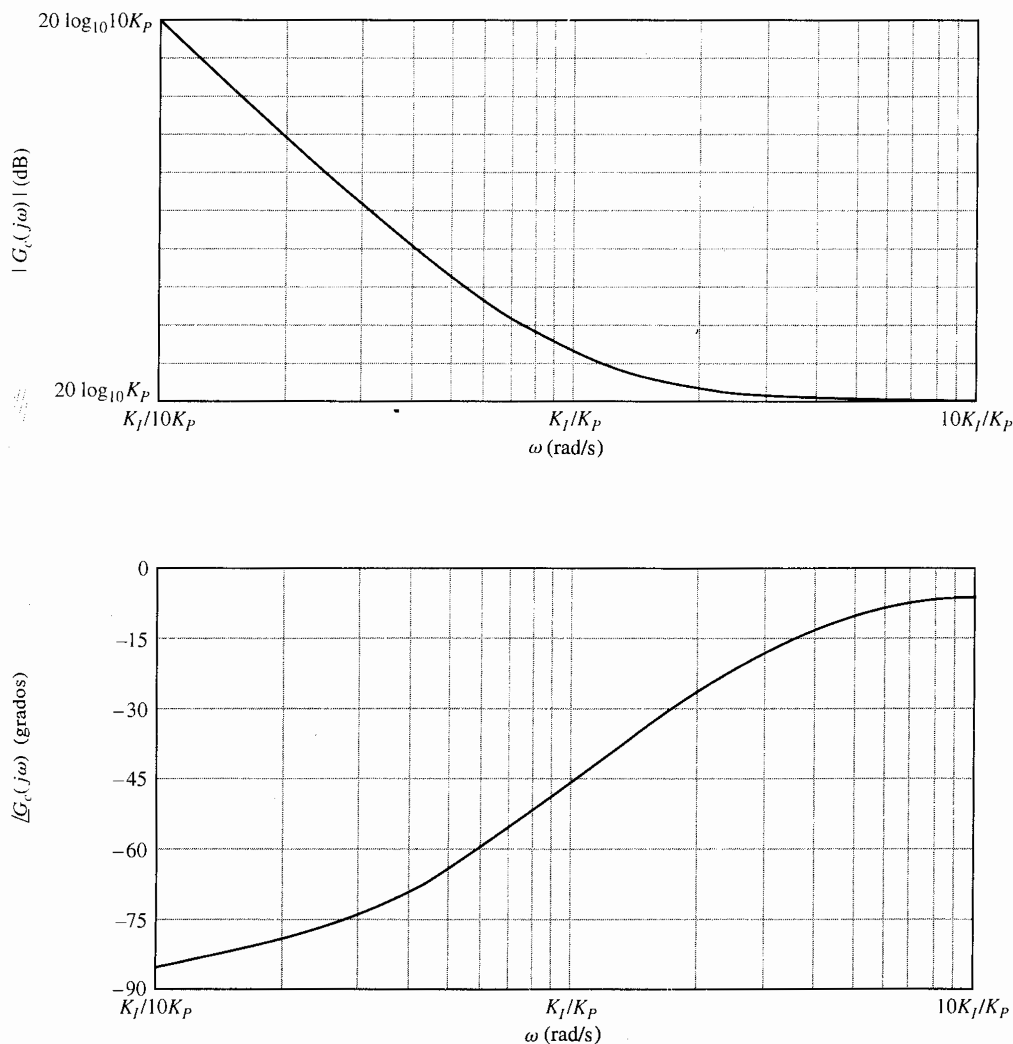


Figura 10-18 Trazas de Bode del controlador PI. $G_c(s) = K_P + K_I/s$.

de donde se tiene:

$$K_P = 10^{-|G_P(j\omega'_g)|_{dB}/20} \qquad K_P < 1 \qquad (10\text{-}32)$$

Una vez que se determina el valor de K_P, sólo es necesario seleccionar el valor adecuado de K_I para completar el diseño. Hasta este punto, se ha supuesto que aunque la frecuencia de cruce de ganancia es alterada para atenuar la magnitud de

$G_c(j\omega)$ en ω'_g, la fase original no es afectada por el controlador PI. Sin embargo, esto no es posible, ya que, como se muestra en la Fig. 10-18, la propiedad de atenuación del controlador PI está acompañada con un atraso de fase que perjudica el margen de fase. Si la frecuencia de corte $\omega = K_I/K_P$ está colocada lejos por debajo de ω'_g, el atraso de fase del controlador PI tendrá un efecto despreciable sobre la fase del sistema compensado cerca de ω'_g. Por otro lado, el valor de K_I/K_P no debe ser muy pequeño o el ancho de banda del sistema será muy bajo, provocando que el tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamiento sean muy largos. Como una guía general, K_I/K_P debe corresponder a una frecuencia que es al menos una década, algunas veces hasta dos décadas, abajo de ω'_g. Esto es:

$$\frac{K_I}{K_P} = \frac{\omega'_g}{10} \quad \text{rad/s} \tag{10-33}$$

Dentro de la guía general, la selección del valor de K_I/K_P se deja a la discreción del diseñador, considerando su efecto sobre el BW y la implementación práctica con un circuito de amplificadores operacionales.

4. Las trazas de Bode del sistema compensado se investigan para ver si todas las especificaciones de desempeño se cumplen.
5. Los valores de K_I y K_P se sustituyen en la ecuación (10-30) para dar la función de transferencia deseada del controlador PI.

Si el proceso controlado $G_P(s)$ es tipo 0, el valor de K_I puede seleccionarse con base en el requisito de constante de a error a rampa, y entonces sólo habrá una parámetro, K_P a determinar. Al calcular el margen de fase, el margen de ganancia, M_r y BW del sistema en lazo cerrado con un intervalo de valores de K_P, se puede seleccionar el mejor valor de K_P.

Con base en la discusión anterior, se pueden resumir las ventajas y desventajas del controlador PI diseñado adecuadamente como:

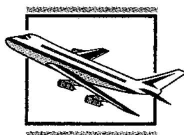
1. Mejora el amortiguamiento y reduce el sobrepaso máximo.
2. Incrementa el tiempo de levantamiento.
3. Disminuye el ancho de banda.
4. Mejora el margen de ganancia, el margen de fase y M_r.
5. Filtra el ruido de alta frecuencia.
6. El problema de seleccionar una combinación adecuada de K_I y K_P para que el capacitor en la implementación del circuito del controlador no sea excesivamente grande, es más agudo que en el caso del controlador PD.

Los siguientes ejemplos ilustrarán cómo se diseña el control PI y cuáles son sus efectos.

Ejemplo 10-3

Considere el sistema de control de altitud de segundo orden estudiado en el ejemplo 10-1. Al aplicar el controlador PI de la ecuación (10-24), la función de transferencia de la trayectoria directa del sistema se convierte en:

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{4500KK_P(s + K_I/K_P)}{s^2(s + 361.2)} \tag{10-34}$$



Diseño en el dominio del tiempo

Considere los siguientes requisitos de desempeño en el dominio del tiempo:

Error en estado estable debido a una entrada parábola $t^2 u_s(t)/2 \le 0.2$
Sobrepaso máximo $\le$ 5 porciento
Tiempo de levantamiento $t_r \le 0.01$ s
Tiempo de asentamiento ≤ 0.02 s

Se tendrán que relajar los requisitos de tiempo de levantamiento y tiempo de asentamiento a los del ejemplo 10-1 para que se tenga un diseño razonable para este sistema. El significado del requisito sobre el error en estado estable debido a una entrada parabólica es que indirectamente establece un requisito mínimo sobre la velocidad de la respuesta transitoria.

La constante de error a parábola es:

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s) = \lim_{s\to 0} s^2\frac{4500KK_P(s + K_I/K_P)}{s^2(s + 361.2)}$$
$$= \frac{4500KK_I}{361.2} = 12.46KK_I \tag{10-35}$$

El error en estado estable debido a la entrada parábola $t^2 u_s(t)/2$ es:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{0.08026}{KK_I} (\le 0.2) \tag{10-36}$$

Considere $K = 181.17$, ya que éste fue el valor usado en el ejemplo 10-1. Aparentemente, para satisfacer un requisito de error en estado estable dado para una entrada parábola, mientras más grande sea K, más pequeño puede ser K_I. Al sustituir $K = 181.17$ en la ecuación (10-36) y al resolver para K_I para obtener el requisito del error en estado estable mínimo de 0.2, se obtiene el valor de K_I como 0.002215. Si es necesario, el valor de K se puede ajustar posteriormente.

Con $K = 181.17$, la ecuación característica del sistema en lazo cerrado es:

$$s^3 + 361.2s^2 + 815\,265K_Ps + 815\,265K_I = 0 \tag{10-37}$$

Al aplicar la prueba de Routh a la ecuación (10-37) se tiene que el sistema es estable si $0 < K_I/K_P < 361.2$. Esto significa que el cero de $G(s)$ en $s = -K_I/K_P$ no se puede colocar muy lejos a la izquierda en el semiplano izquierdo del plano s, o el sistema podría ser inestable. Se coloca el cero en $-K_I/K_P$ relativamente cerca del origen. Para este caso, el polo más significativo de $G_p(s)$, además del polo en

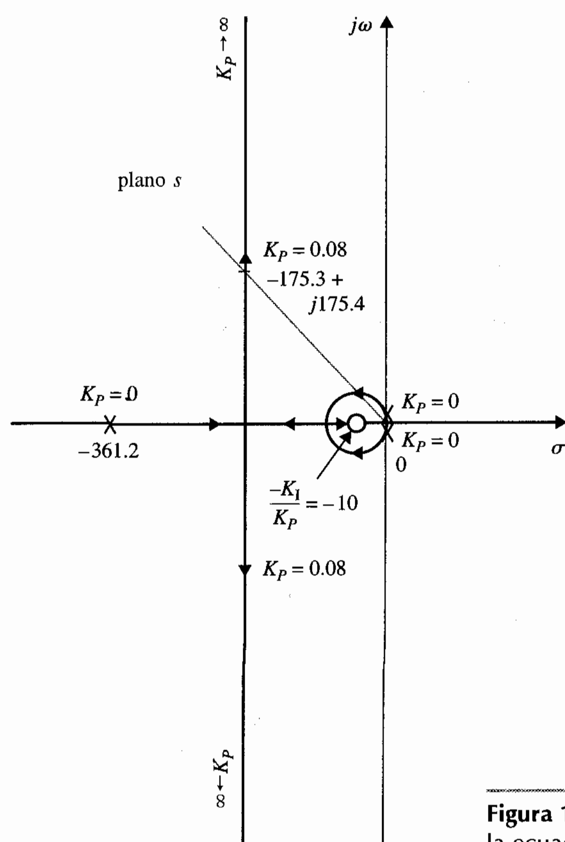


Figura 10-19 Lugar geométrico de las raíces de la ecuación (10-37) con $K_I/K_P = 10$; K_P varía.

$s = 0$, está en -361.2. Por tanto, K_I/K_P se debe escoger para satisfacer la siguiente condición:

$$\frac{K_I}{K_P} << 361.2 \tag{10-38}$$

El lugar geométrico de las raíces de la ecuación (10-37) con $K_I/K_P = 10$ se muestra en la Fig. 10-19. Observe que quitando el lazo pequeño alrededor del cero en $s = -10$, este lugar geométrico de las raíces es muy similar al mostrado en la Fig. 10-7, el cual es para la ecuación (10-16). Con la condición de la ecuación (10-38) satisfecha, la ecuación (10-34) se puede aproximar por:

$$G(s) \cong \frac{815\,265K_P}{s(s + 361.2)} \tag{10-39}$$

En donde el término K_I/K_P en el numerador es despreciado comparado con la magnitud de s, que toma valores a lo largo de puntos de operación sobre la porción compleja del lugar geométrico de las raíces que corresponde a un factor de amortiguamiento relativo de $0.7 < \zeta < 1.0$. Se considera que se desea tener un factor de amortiguamiento relativo de 0.707. De la ecuación (10-39), el valor requerido de K_P

para este factor de amortiguamiento relativo es 0.08. Esto debe ser cierto para el sistema de tercer orden con el controlador PI si el valor de K_I/K_P satisface la ecuación (10-38). Por tanto con $K_P = 0.08$, $K_I = 0.8$; el lugar geométrico de las raíces de la Fig. 10-19 muestra que el factor de amortiguamiento relativo de las dos raíces complejas es aproximadamente de 0.707. De hecho, las tres raíces de la ecuación característica están en:

$$s = -10.605 \quad -175.3 + j175.4 \text{ y } -175.3 - j175.4$$

La razón de esto es que si cuando nos "paramos" en la raíz en $-175.3 + j175.4$ y "miramos" hacia la vecindad cerca del origen, vemos que el cero en $s = -10$ está relativamente cerca al origen y por tanto prácticamente cancela uno de los polos en $s = 0$. De hecho, se puede mostrar que mientras $K_P = 0.08$ y el valor de K_I se escoja de tal forma que la ecuación (10-38) sea satisfecha, el factor de amortiguamiento relativo de las raíces complejas estará muy cerca de 0.707. Por ejemplo, se selecciona $K_I/K_P = 5$; las tres raíces de la ecuación característica están en:

$$s = -5.145 \qquad -178.03 + j178.03 \qquad \text{y} \qquad -178.03 - j178.03$$

y el factor de amortiguamiento relativo sigue siendo 0.707. Aunque el polo real de la función de transferencia en lazo cerrado se mueve, está muy cerca al cero en $s = -K_I/K_P$, por lo que el transitorio debido al polo real es despreciable. Por ejemplo, cuando $K_P = 0.08$ y $K_I = 0.4$, la función de transferencia del sistema compensado es:

$$\frac{\Theta_y(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{65\,221.2(s+5)}{(s+5.145)(s+178.03+j178.03)(s+178.03-j178.03)} \tag{10-40}$$

Ya que el polo en $s = -5.145$ está muy cerca al cero en $s = -5$, la respuesta transitoria debida a este polo es despreciable, y la dinámica del sistema está dominada esencialmente por los dos polos complejos.

La tabla 10-5 proporciona los atributos de las respuestas al escalón unitario del sistema con el control PI para varios valores de K_I/K_P, con $K_P = 0.08$, lo que corresponde a un factor de amortiguamiento relativo de 0.707.

Los resultados en la tabla 10-5 verifican el hecho de que el control PI reduce el sobrepaso pero a expensas de aumentar el tiempo de levantamiento. Para $K_I \leq 1$, el tiempo de asentamiento de la tabla 10-5 muestra una reducción abrupta, que es despreciada. Esto es porque los tiempos de asentamiento para este caso se miden en los puntos en donde las respuestas entran a la banda entre 0.95 y 1.00, ya que el sobrepaso máximo es menor que 5 por ciento.

El sobrepaso máximo del sistema se puede reducir aún más que los que se muestran en la tabla 10-5 al emplear valores más pequeños de K_P que 0.08. Sin embargo, el tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamiento serán excesivos. Por ejemplo, con $K_P = 0.04$ y $K_I = 0.04$, el sobrepaso máximo es 1.1%, pero el tiempo de levantamiento se incrementa a 0.0182 s y el tiempo de asentamiento es 0.024 s.

Para el sistema considerado, el mejoramiento del sobrepaso máximo, lo hace más lento para K_I menor que 0.08, a menos que K_P también se reduzca. Como se mencionó anteriormente, el valor del capacitor del circuito con amplificadores operacionales es inversamente proporcional a K_I. Por tanto, por razones prácticas, existe un valor límite del valor de K_I.

La Fig. 10-20 muestra las respuestas al escalón unitario del sistema de control de altitud con el control PI, con $K_P = 0.08$ y varios valores de K_P. La respuesta al escalón unitario del mismo sistema con el controlador PD diseñado en el ejemplo 10-1, $K_P = 1$ y $K_D = 0.00177$, se dibuja en la misma figura para fines de comparación.

Tabla 10-5 Atributos de las respuestas al paso unitario del sistema en el ejemplo 10-3 con el control PI

K_I/K_P	K_I	K_P	Sobrepaso máximo (%)	t_r (s)	t_s (s)
0	0	1.00	52.7	0.00135	0.015
20	1.60	0.08	15.16	0.0074	0.049
10	0.8	0.08	9.93	0.0078	0.0294
5	0.40	0.08	7.17	0.0080	0.023
2	0.16	0.08	5.47	0.0083	0.0194
1	0.08	0.08	4.89	0.0084	0.0114
0.5	0.04	0.08	4.61	0.0084	0.0114
0.1	0.008	0.08	4.38	0.0084	0.0115

Diseño en el dominio de la frecuencia

La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema no compensado se obtiene al hacer a $K_P = 1$ y $K_I = 0$ en la $G(s)$ de la ecuación (10-34), y las trazas de Bode se muestran en la Fig. 10-21. El margen de fase es 22.68° y la frecuencia de cruce de ganancia es 868 rad/s.

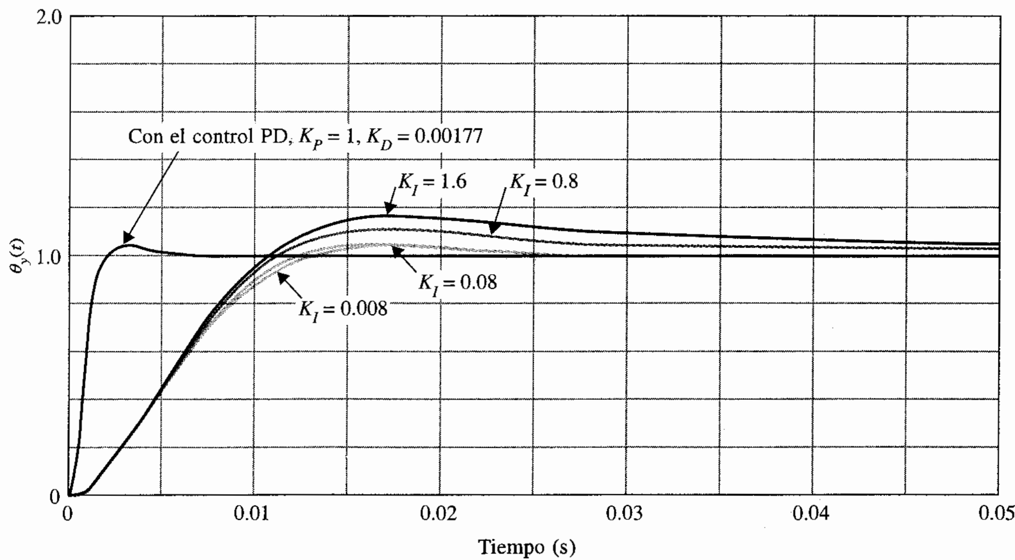


Figura 10-20 Respuestas al escalón unitario del sistema en el ejemplo 10-3 con el control PI. También, respuesta al escalón unitario del sistema del ejemplo 10-1 con el control PD.

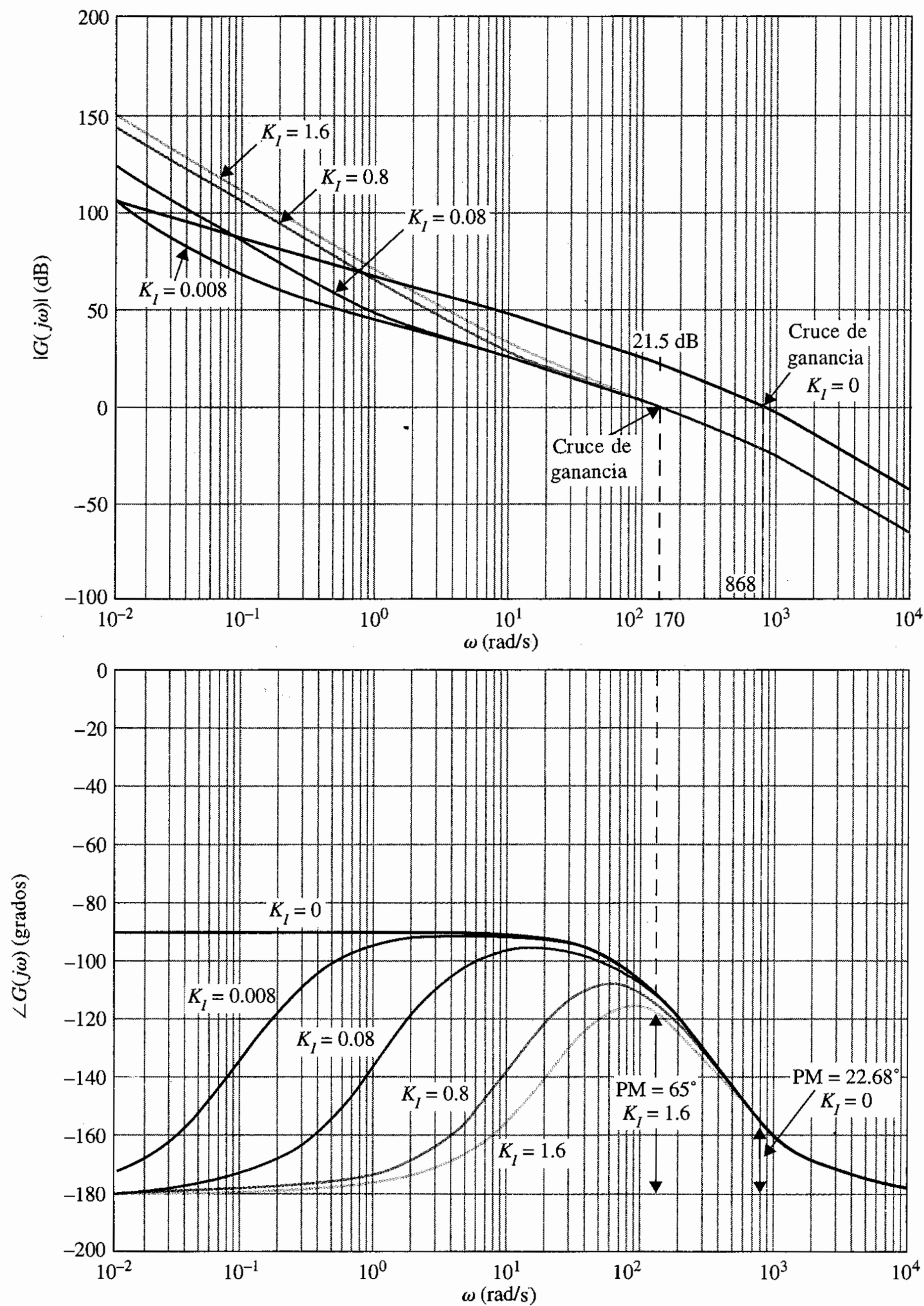


Figura 10-21 Trazas de Bode del sistema de control del ejemplo 10-3 con el control PI.

$$G(s) = \frac{815\,265K_P(s + K_I/K_P)}{s^2(s + 361.2)} \qquad K_P = 0.08$$

Se especifica que el margen de fase requerido debe ser al menos de 65° y éste se debe lograr con el controlador PI de la ecuación (10-30). Al seguir el procedimiento descrito en las ecuaciones (10-31) a la (10-33) sobre el diseño del controlador PI, se realizan los siguientes pasos:

1. Buscar la nueva frecuencia de cruce de ganancia ω'_g en la que se alcanza el margen de fase de 65°. De la Fig. 10-21, ω'_g se encuentra como 170 rad/s. La magnitud de $G(j\omega)$ en esta frecuencia es 21.5 dB. Por tanto, el controlador PI debe proveer una atenuación de –21.5 dB en ω'_g = 170 rad/s. Al sustituir $|G(j\omega'_g)|$ = 21.5 dB en la ecuación (10-32) y al resolver para K_P, se obtiene:

$$K_P = 10^{-|G(j\omega'_g)|_{dB}/20} = 10^{-21.5/20} = 0.084 \tag{10-41}$$

Observe que el diseño en el dominio del tiempo realizado anteriormente, K_P fue seleccionado como 0.08, por lo que el factor de amortiguamiento relativo de las raíces complejas de la ecuación característica será de aproximadamente 0.707. (Quizá se ha hecho una pequeña trampa al escoger el margen de fase como 65°. Esto podría no ser una coincidencia. ¿Puede creer que no se tenía un conocimiento a priori de que en este caso, $\zeta = 0.707$ corresponde a un margen de fase de 65°?)

2. Se escoge $K_P = 0.08$, por lo que se pueden comparar los resultados de diseño en el dominio de la frecuencia con los del dominio del tiempo obtenidos anteriormente. La ecuación (10-33) proporciona la guía general para encontrar K_I una vez que se ha determinado K_P. Por tanto:

$$K_I = \frac{\omega'_g K_P}{10} = \frac{170 \times 0.08}{10} = 1.36 \tag{10-42}$$

Como se señaló anteriormente, el valor de K_I no es rígido mientras la relación K_I/K_P sea suficientemente más pequeña que la magnitud del polo de $G(s)$ en –361.2. Como se observa, el valor de K_I dado por la ecuación (10-42) no es suficientemente pequeño para este sistema.

Las trazas de Bode de la función de transferencia de la trayectoria directa para $K_P = 0.08$ y $K_I = 0$, 0.008, 0.08, 0.8 y 1.6 se muestran en la Fig. 10-21. La tabla 10-6 muestra las propiedades en el dominio de la frecuencia del sistema no compensado y del sistema compensado con varios valores de K_I. Observe que para valores de K_I/K_P que son suficientemente pequeños, el margen de fase, M_r, BW y la frecuencia de cruce de ganancia varían un poco.

Tabla 10-6 Datos de desempeño en el dominio de la frecuencia del sistema en el ejemplo 10-3 con el control PI

K_I/K_P	K_I	K_P	MG (dB)	MF (grados)	M_r	BW (rad/s)	Cruce de ganancia (rad/s)	Cruce de fase (rad/s)
0	0	1.00	∞	22.6	2.55	1390.87	868	∞
20	1.6	0.08	∞	58.45	1.12	268.92	165.73	∞
10	0.8	0.08	∞	61.98	1.06	262.38	164.96	∞
5	0.4	0.08	∞	63.75	1.03	258.95	164.77	∞
1	0.08	0.08	∞	65.15	1.01	256.13	164.71	∞
0.1	0.008	0.08	∞	65.47	1.00	255.49	164.70	∞

Se debe señalar que el margen de fase del sistema se puede mejorar posteriormente al reducir el valor de K_P por abajo de 0.08. Sin embargo, el ancho de banda del sistema se reducirá. Por ejemplo, para $K_P = 0.04$ y $K_I = 0.04$, el margen de fase se incrementa a 75.7° y $M_r = 1.01$, pero el BW se reduce a 117.3 rad/s. ▲

Ejemplo 10-4

Ahora se considera emplear el control PI para el sistema de control de altitud de tercer orden descrito por la ecuación (10-19). Primero se desarrolla el diseño en el dominio del tiempo como sigue.

Diseño en el dominio del tiempo

Considere las especificaciones en el dominio del tiempo:

Error en estado estable debido a una entrada parábola $t^2 u_s(t)/2 \leq 0.2$
Sobrepaso máximo ≤ 5 porciento
Tiempo de levantamiento $t_r \leq 0.01$ s
Tiempo de asentamiento $t_s \leq 0.02$ s

Éstas son idénticas a las especificaciones dadas para el sistema de segundo orden del ejemplo 10-3.

Al aplicar el controlador PI de la ecuación (10-24), la función de transferencia de la trayectoria directa del sistema se convierte en:

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{1.5 \times 10^9 KK_P(s + K_I/K_P)}{s^2(s^2 + 3408.3s + 1{,}204{,}000)} = \frac{1.5 \times 10^9 KK_P(s + K_I/K_P)}{s^2(s + 400.26)(s + 3008)} \qquad (10\text{-}43)$$

Se puede mostrar que el error en estado estable debido a la entrada parábola está dado otra vez por la ecuación (10-36) y al hacer a $K = 181.17$ en forma arbitraria, el valor mínimo de K_I es 0.002215.

La ecuación característica del sistema en lazo cerrado con $K = 181.17$ es:

$$s^4 + 3408.3s^3 + 1\,204\,000s^2 + 2.718 \times 10^9 K_P s + 2.718 \times 10^9 K_I = 0 \qquad (10\text{-}44)$$

La tabla de Routh para la última ecuación se realiza como sigue:

s^4	1	$1{,}204{,}000$	$2.718 \times 10^9 K_I$
s^3	3408.3	$2.718 \times 10^9 K_P$	0
s^2	$1{,}204{,}000 - 797{,}465K_P$	$2.718 \times 10^9 K_I$	0
s^1	$\dfrac{1{,}204{,}000K_P - 797{,}465K_P^2 - 3408.3K_I}{1{,}204{,}000 - 797{,}465K_P}$	0	
s^0	$2.718 \times 10^9 K_I$	0	

Los requisitos de estabilidad son:

$$K_I > 0$$
$$K_P < 1.5098 \qquad (10\text{-}45)$$
$$K_I < 353.255K_P - 233.98K_P^2$$

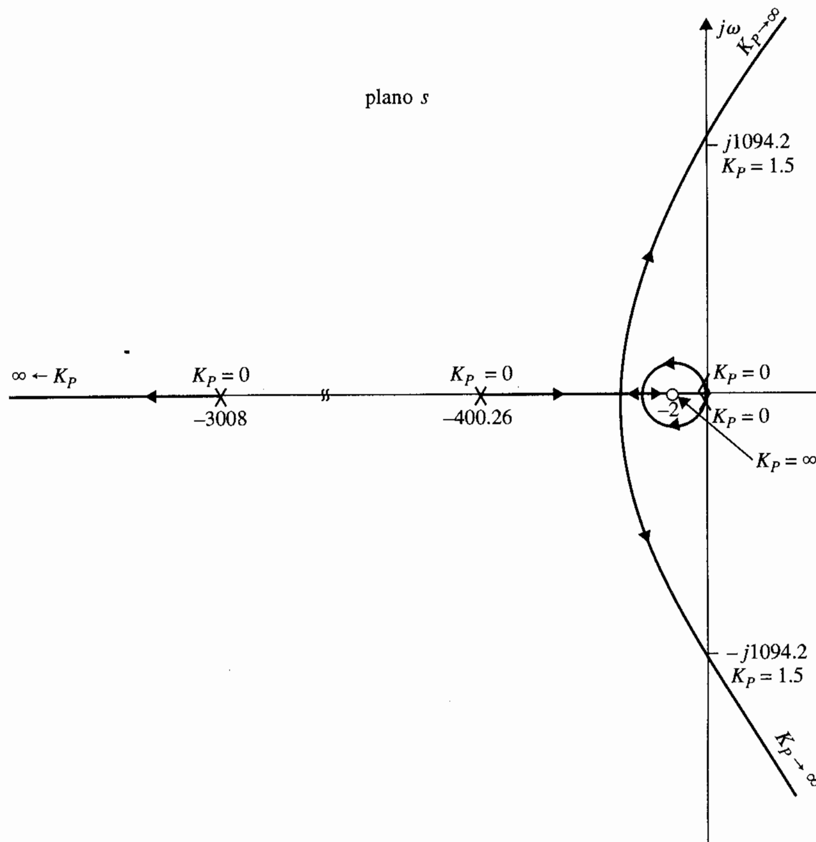


Figura 10-22 (a) Lugar geométrico de las raíces del sistema de control del ejemplo 10-4 con el control PI, $K_I/K_P = 2$, $0 \leq K_P < \infty$.

El diseño del controlador PI necesita un valor pequeño para K_I/K_P, relativamente cercano al polo de $G(s)$ al origen, el cual está en –400.26. El lugar geométrico de las raíces de la ecuación (10-44) se dibuja mediante el empleo de la configuración de polos y ceros de la ecuación (10-43). La Fig. 10-22(a) muestra el lugar geométrico de las raíces cuando K_P varía para $K_I/K_P = 2$. El lugar geométrico de las raíces cerca del origen debido al polo y el cero del controlador PI forma otra vez un pequeño lazo, y el lugar geométrico de las raíces lejos del origen será muy similar al del sistema no compensado, el cual se muestra en la Fig. 7-28. Al seleccionar el valor de K_P en forma adecuada a lo largo del lugar geométrico de las raíces, es posible satisfacer las especificaciones de desempeño dadas anteriormente. Para minimizar el tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamiento, se debe seleccionar K_P para que las raíces dominantes sean complejas conjugadas. La tabla 10-7 muestra los atributos de desempeño para varias combinaciones de K_I/K_P y K_P. Observe que aunque varias combinaciones de estos parámetros corresponden a sistemas que satisfacen las especificaciones de desempeño, aquellas con $K_P = 0.075$ y $K_I = 0.15$ producen los mejores tiempos de levantamiento y asentamiento.

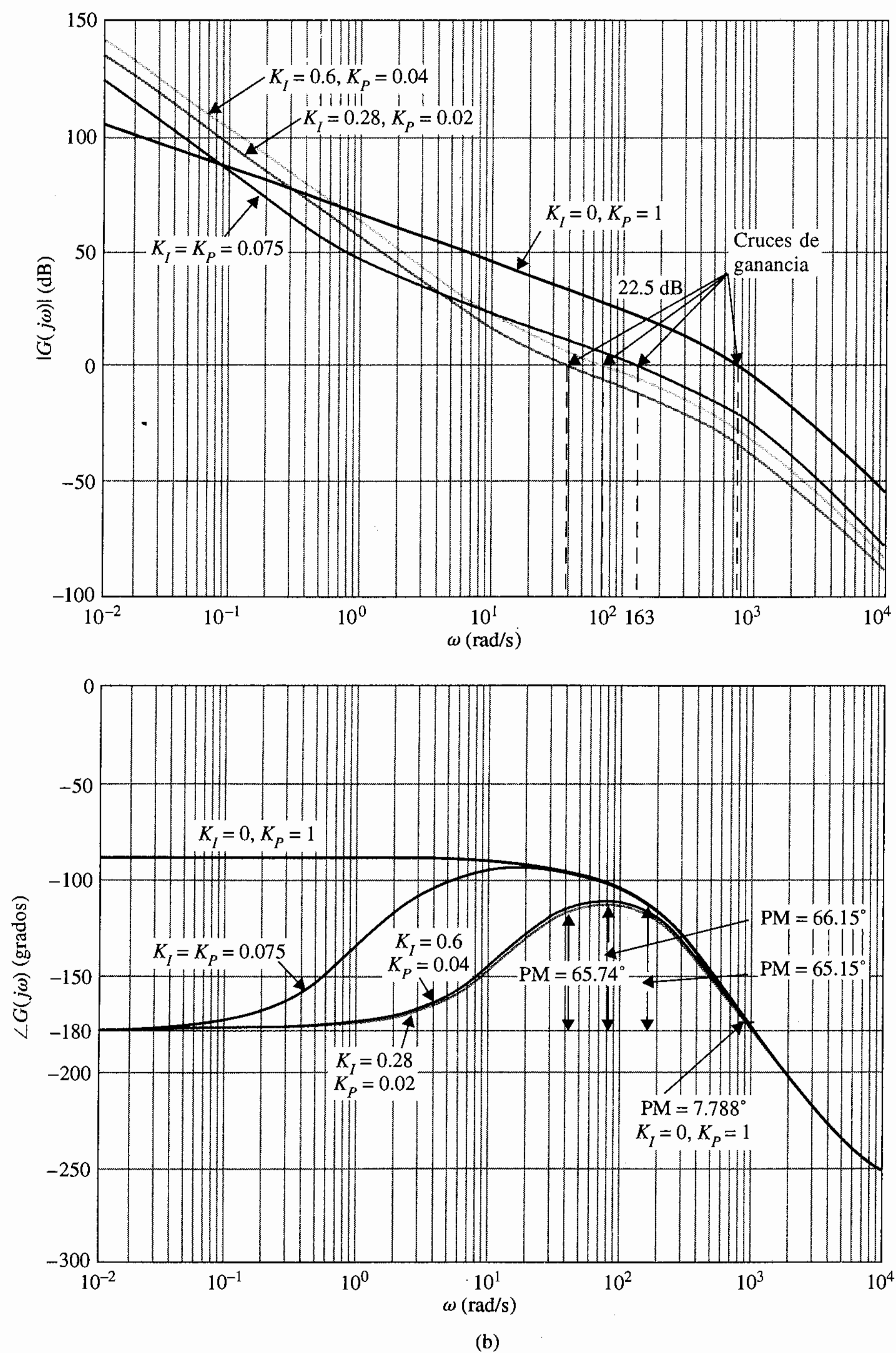


Figura 10-22 (b) Trazas de Bode del sistema de control del ejemplo 10-4 con el control PI.

$$G(s) = \frac{2.718 \times 10^9 K_P(s + K_I/K_P)}{s^2(s + 400.26)(s + 3008)}$$

Diseño en el dominio de la frecuencia

Las trazas de Bode de la ecuación (10-43) para $K = 181.17$, con $K_P = 1$ y $K_I = 0$ se muestran en la Fig. 10-22(b). Los datos de desempeño del sistema no compensado son:

Margen de ganancia = 3.578 dB	$M_r = 6.572$
Margen de fase = 7.788°	BW = 1378 rad/s

Se requiere que el sistema compensado tenga un margen de fase de al menos 65°, y éste será alcanzado con el controlador PI de la ecuación (10-30). Al seguir el procedimiento descrito en las ecuaciones de la (10-31) a la (10-33) sobre el diseño del controlador PI, se realizan los siguientes pasos:

1. Buscar la nueva frecuencia de cruce de ganancia ω_g' en la que se logra el margen de fase de 65°. De la Fig. 10-20, ω_g' se encuentra como 163 rad/s, y la magnitud de $G(j\omega)$ en esta frecuencia es 22.5 dB. Por tanto, el controlador debe proveer una atenuación de −22.5 dB en $\omega_g' = 163$ rad/s. Al sustituir $|G(j\omega_g')| = 22.5$ dB en la ecuación (10-32) y al resolver para K_P, se obtiene:

$$K_P = 10^{-|G(j\omega_g')|_{dB}/20} = 10^{-22.5/20} = 0.075 \qquad (10\text{-}46)$$

Éste es exactamente el resultado que fue seleccionado para el diseño en el dominio del tiempo que produce un sistema con un sobrepaso máximo de 4.9% cuando $K_I = 0.15$ o $K_I/K_P = 2$.

2. El valor sugerido para K_I se encuentra de la ecuación (10-33) como:

$$K_I = \frac{\omega_g' K_P}{10} = \frac{163 \times 0.075}{10} = 1.222 \qquad (10\text{-}47)$$

Tabla 10-7 Atributos de las respuestas al escalón unitario del sistema en el ejemplo 10-4 con el control PI

K_I/K_P	K_I	K_P	Sobrepaso máximo (%)	t_r (s)	t_s (s)	Raíces de la ecuación característica
0	0	1	76.2	0.00158	0.0487	−3293, 3, −57.5 ± j906.6
20	1.6	0.08	15.6	0.0077	0.0471	−3035, −22.7, −175.3 ± j180.3
20	0.8	0.04	15.7	0.0134	0.0881	−3021.6, −259, −99, − 28
5	0.4	0.08	6.3	0.00883	0.0202	−3035, −5.1, −184 ± j189.2
2	0.08	0.04	2.1	0.02202	0.01515	−3021.7, −234.6, −149.9, −2
5	0.2	0.04	4.8	0.01796	0.0202	−3021.7, −240, −141.2, −5.3
2	0.16	0.08	5.8	0.00787	0.01818	−3035.2, −185.5 ± j190.8, −2
1	0.08	0.08	5.2	0.00792	0.01616	−3035.2, −186 ± j191.4, −1
2	0.15	0.075	4.9	0.0085	0.01010	−3033.5, −187.2 ± j178, −1
2	0.14	0.070	4.0	0.00917	0.01212	−3031.8, −187.2 ± j164, −1

Por tanto $K_I/K_P = 16.3$. Sin embargo, el margen de fase del sistema con estos parámetros de diseño es solamente de 59.52.

Para realizar el MF deseado de 65°, se puede reducir el valor de K_P o de K_I. La tabla 10-8 proporciona los resultados de varios diseños con diferentes combinaciones de K_P y K_I. Observe que los tres últimos diseños en la tabla satisfacen el requisito del margen de fase. Sin embargo, las ramificaciones del diseño muestran que:

El reducir K_P podría reducir el BW e incrementar M_r.
El reducir K_I podría incrementar el valor del capacitor en el circuito.

De hecho, sólo el caso de $K_I = K_P = 0.075$ produce el mejor desempeño global tanto en el dominio de la frecuencia como en el del tiempo. Al intentar incrementar K_I, el sobrepaso máximo se vuelve excesivo. Éste es un ejemplo que muestra lo inadecuado de especificar solamente el margen de fase. El propósito de este ejemplo es mostrar las propiedades del controlador PI y las consideraciones importantes en su diseño. No se exploran con más detalle.

La Fig. 10-23 muestra las respuestas al escalón unitario del sistema no compensado y varios sistemas con el control PI.

10-4 Diseño con el controlador PID

De las discusiones anteriores se observa que el controlador PD puede añadir amortiguamiento a un sistema, pero no afecta la respuesta en estado estable. El controlador PI puede mejorar la estabilidad relativa y el error en estado estable al mismo tiempo, pero el tiempo de levantamiento se incrementa. Esto conduce a emplear un controlador PID para que se empleen las mejores características de los controladores PI y PID.

Tabla 10-8 Resumen del desempeño del sistema del ejemplo 10-4 con el control PI

K_I/K_P	K_I	K_P	MG (dB)	MF (grados)	M_r	BW (rad/s)	Sobrepaso máximo (%)	t_r (s)	t_s (s)
0	0	1	3.578	7.788	6.572	1378	77.2	0.0015	0.0490
16.3	1.222	0.075	25.67	59.52	1.098	264.4	13.1	0.0086	0.0478
1	0.075	0.075	26.06	65.15	1.006	253.4	4.3	0.0085	0.0116
15	0.600	0.040	31.16	66.15	1.133	134.6	12.4	0.0142	0.0970
14	0.280	0.020	37.20	65.74	1.209	66.34	17.4	0.0268	0.1616

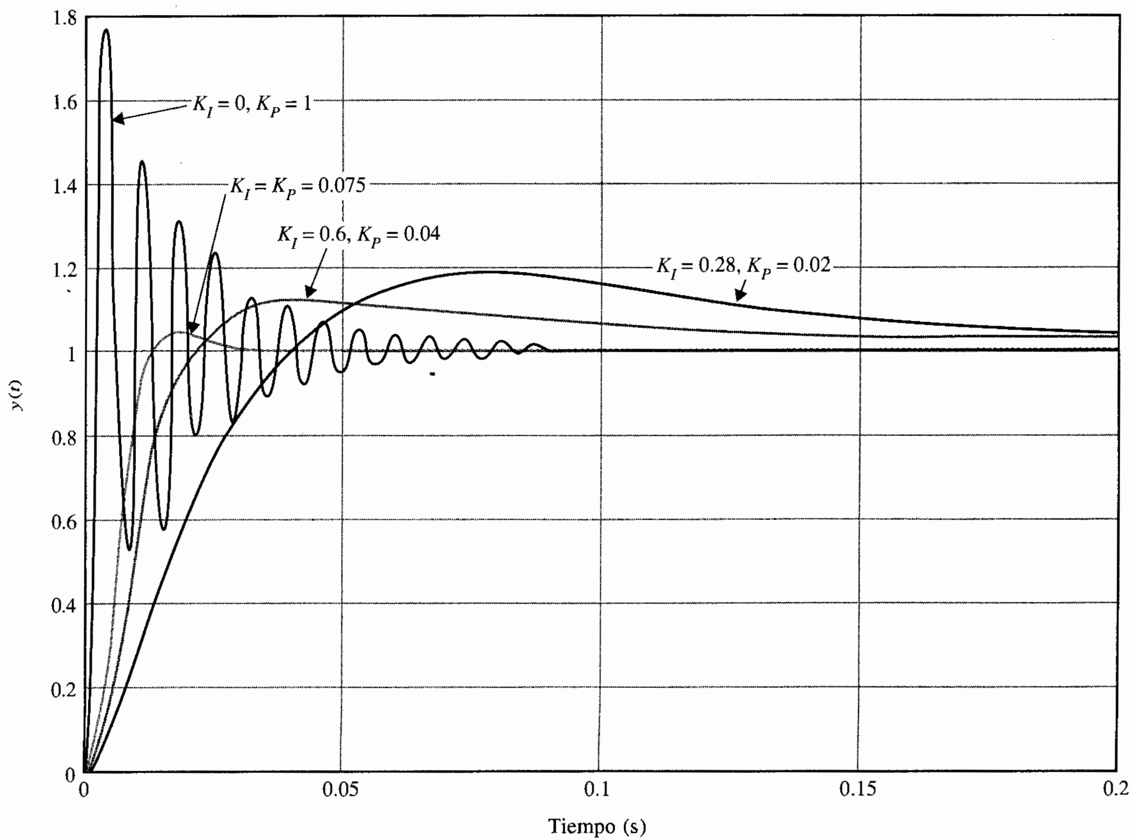


Figura 10-23 Respuestas al escalón unitario del sistema con el control PI del ejemplo 10-4.

$$G(s) = \frac{2.718 \times 10^9 K_P(s + K_I/K_P)}{s^2(s + 400.26)(s + 3008)}$$

Se puede describir el siguiente procedimiento para el diseño del controlador PID.

1. Considere que el controlador PID consista de una parte PI conectada en cascada con una parte PD. La función de transferencia del controlador PID se escribe como:

$$G_c(s) = K_P + K_D s + \frac{K_I}{s} = (1 + K_{D1}s)\left(K_{P2} + \frac{K_{I2}}{s}\right) \tag{10-48}$$

La constante proporcional de la parte PD se hace unitaria, ya que sólo se necesitan tres parámetros en el controlador PID. Al igualar ambos miembros de la ecuación (10-48), se tiene:

$$K_P = K_{P2} + K_{D1}K_{I2} \quad (10\text{-}49)$$

$$K_D = K_{D1}K_{P2} \quad (10\text{-}50)$$

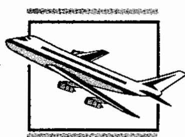
$$K_I = K_{I2} \quad (10\text{-}51)$$

2. Considere que sólo la parte PD está operando. Seleccione el valor de K_{D1} para lograr una parte de la estabilidad relativa deseada. En el dominio del tiempo, esta estabilidad relativa se puede medir mediante el sobrepaso máximo, y en el dominio de la frecuencia con el margen de fase.
3. Seleccione los parámetros K_{I2} y K_{P2} para que el requisito de la estabilidad relativa sea satisfecho.

Como una opción, la porción PI del controlador se puede diseñar primero para una parte del requisito sobre la estabilidad relativa y finalmente se diseña la parte PD.

El siguiente ejemplo ilustra cómo se diseña un controlador PID en los dominios del tiempo y de la frecuencia.

Ejemplo 10-5



Considere el sistema de control de altitud de tercer orden representado por la función de transferencia de la trayectoria directa dada en la ecuación (10-19). Con $K = 181.17$, la función de transferencia es:

$$G_p(s) = \frac{2.718 \times 10^9}{s(s + 400.26)(s + 3008)} \quad (10\text{-}52)$$

Diseño en el dominio el tiempo

Considere las especificaciones de desempeño en el dominio del tiempo:

Error en estado estable debido a una entrada rampa $t^2 u_s(t)/2 \le 0.2$	tiempo de levantamiento $t_r \le 0.005$ s
Sobrepaso máximo ≤ 5 por ciento	tiempo de asentamiento $t_s \le 0.005$ s

Mediante los ejemplos 10-2 y 10-4 se pudo observar que estos requisitos no pueden ser cumplidos por los controladores PI y PD actuando por separado. Se aplica el control PD con la función de transferencia $(1 + K_{D1} s)$. La función de transferencia de la trayectoria directa se convierte en:

$$G(s) = \frac{2.718 \times 10^9(1 + K_{D1}s)}{s(s + 400.26)(s + 3008)} \quad (10\text{-}53)$$

La tabla 10-3 muestra que el mejor controlador PD que se puede obtener desde el punto de vista del sobrepaso máximo tiene un $K_{D1} = 0.002$, y el sobrepaso máximo es 11.37%. Los tiempos de levan-

tamiento y de asentamiento están dentro de los valores requeridos. A continuación se añade el controlador PI, y la función de transferencia directa se convierte en:

$$G(s) = \frac{5.436 \times 10^6 K_{P2}(s + 500)(s + K_{I2}/K_{P2})}{s^2(s + 400.26)(s + 3008)} \tag{10-54}$$

Al seguir la guía sobre la selección de un valor relativamente pequeño de K_{I2} / K_{P2}, se escoge el valor de $K_{I2}/K_{P2} = 15$. La ecuación (10-54) se convierte en:

$$G(s) = \frac{5.436 \times 10^6 K_{P2}(s + 500)(s + 15)}{s^2(s + 400.26)(s + 3008)} \tag{10-55}$$

La tabla 10-9 proporciona las características de desempeño en el dominio del tiempo junto con las raíces de la ecuación característica para varios valores de K_{P2}. Aparentemente, el valor óptimo de K_{P2} está en la vecindad de 0.2 a 0.4.

Al seleccionar $K_{P2} = 0.3$ y con $K_{D1} = 0.002$ y $K_{I2} = 15\ K_{P2}, = 4.5$, se obtienen los siguientes resultados para los parámetros del controlador PID mediante el empleo de las ecuaciones (10-49) a (10-51):

$$\begin{aligned} K_I &= K_{I2} = 4.5 \\ K_P &= K_{P2} + K_{D1}K_{I2} = 0.3 + 0.002 \times 4.5 = 0.309 \\ K_D &= K_{D1}K_{P2} = 0.002 \times 0.3 = 0.0006 \end{aligned} \tag{10-56}$$

Observe que el diseño del PID resultó en una K_D pequeña y una K_I grande, lo cual corresponde a capacitores más pequeños en la implementación del circuito.

La Fig. 10-24 muestra las respuestas al escalón unitario del sistema con el controlador PID, así como aquellas con los controles PD y PI diseñados en los ejemplos 10-2 y 10-4, respectivamente. Observe que el control PID, cuando se diseña adecuadamente, captura las ventajas de los controladores PD y PI.

Tabla 10-9 Características de desempeño en el dominio del tiempo del sistema de control de altitud de tercer orden con el control PID diseñado en el ejemplo 10-5

K_{P2}	Sobrepaso máximo (%)	t_r (s)	t_s (s)	Raíces de la ecuación característica		
1.0	11.1	0.00088	0.0025	−15.1,	−533.2,	−1430 ± j1717.5
0.9	10.8	0.00111	0.00202	−15.1,	−538.7,	−1427 ± j1571.5
0.8	9.3	0.00127	0.00303	−15.1,	−546.5,	−1423 ± j1385.6
0.7	8.2	0.00130	0.00303	−15.1,	−558.4,	−1417 ± j1168.7
0.6	6.9	0.00155	0.00303	−15.2,	−579.3,	−1406 ± j897.1
0.5	5.6	0.00172	0.00404	−15.2,	−629,	−1382 ± j470.9
0.4	5.1	0.00214	0.00505	−15.3,	−1993,	−700 ± j215.4
0.3	4.8	0.00271	0.00303	−15.3,	−2355,	−519 ± j263.1
0.2	4.5	0.00400	0.00404	−15.5,	−2613,	−390 ± j221.3
0.1	5.6	0.00747	0.00747	−16.1,	−284,	−284 ± j94.2
0.08	6.5	0.00895	0.04545	−16.5,	−286.3,	−266 ± j4.1

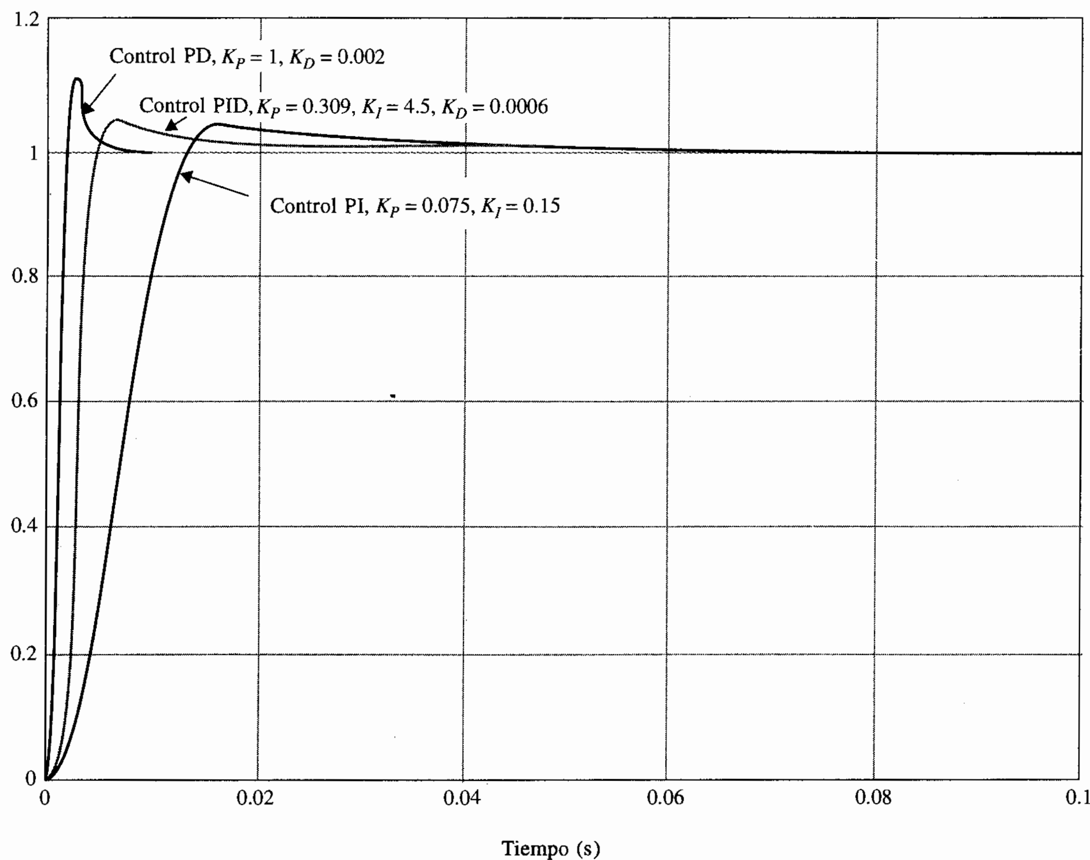


Figura 10-24 Respuestas al escalón del sistema del ejemplo 10-5 con los controles PD, PI y PID.

Diseño en el dominio de la frecuencia

El control PD del sistema de control de altitud de tercer orden fue realizado en el ejemplo 10-2, y los resultados fueron tabulados en la tabla 10-3. Cuando $K_P = 1$ y $K_D = 0.002$, el sobrepaso máximo es 11.37%, pero éste es el mejor valor que se puede obtener con el control PD. Mediante el empleo del controlador PD, la función de transferencia de la trayectoria directa del sistema es:

$$G(s) = \frac{2.718 \times 10^9(1 + 0.002s)}{s(s + 400.26)(s + 3008)} \tag{10-57}$$

y sus trazas de Bode se muestran en la Fig. 10-25. Se estima el siguiente conjunto de criterios en el dominio de la frecuencia correspondientes a especificaciones en el dominio de tiempo dadas en este problema.

$$\text{Margen de fase} \geq 70^\circ \qquad \text{BW} \geq 1000 \text{ rad/s}$$
$$M_r \leq 1.1$$

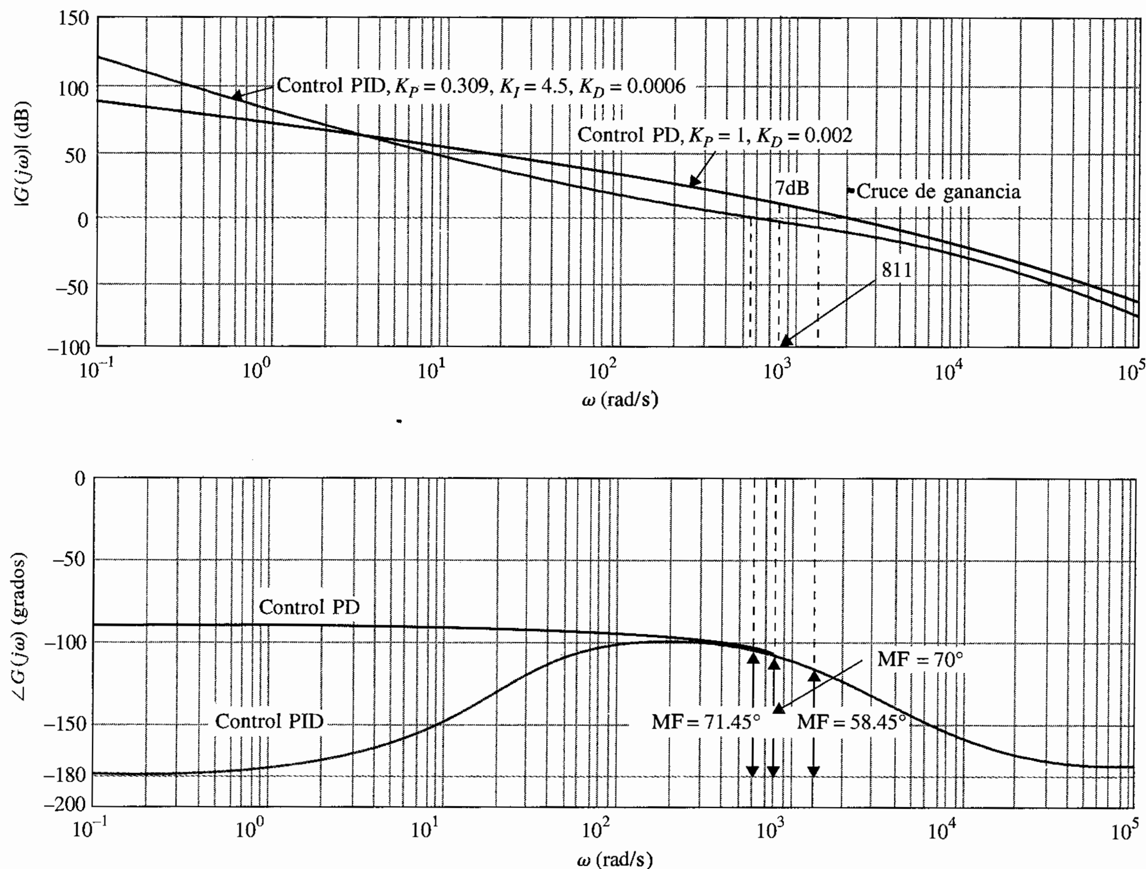


Figura 10-25 Trazas de Bode del sistema del ejemplo 10-5 con los controles PD y PID.

De las trazas de Bode de la Fig. 10-25 se observa que para alcanzar un margen de fase de 70°, la nueva frecuencia de cruce de ganancia $\omega'_g = 811$ rad/s, en la que la magnitud de $G(j\omega)$ es 7 dB. Por tanto, al emplear la ecuación (10-32), el valor de K_{P2} se calcula como:

$$K_{P2} = 10^{-7/20} = 0.45 \qquad (10\text{-}58)$$

Observe que el intervalo deseable de K_{P2} se encuentra del diseño en el dominio del tiempo con $K_{I2}/K_{P2} = 15$ es de 0.2 a 0.4. El resultado dado en la ecuación (10-58) está ligeramente fuera del intervalo. La tabla 10-10 muestra los resultados del desempeño en el dominio de la frecuencia con $K_D = 0.002$, $K_{I2}/K_{P2} = 15$ y varios valores de K_{P2} a partir de 0.45. Es interesante notar que cuando K_{P2} continúa aumentando, el margen de fase se incrementa en forma monotónica, pero por abajo de $K_{P2} = 0.2$, el sobrepaso máximo se incrementa. En este caso, los resultados sobre el margen de fase son confusos, pero el pico de resonancia M_r es una indicación más exacta de esto. ▲

Tabla 10-10 Desempeño en el dominio de la frecuencia del sistema del ejemplo 10-5 con el control PID

K_{P2}	K_{I2}	MG (dB)	MF (grados)	M_r	BW (rad/s)	t_r (s)	t_s (s)	Sobrepaso máximo (%)
1.00	0.	∞	58.45	1.07	2607	0.0008	0.00255	11.37
0.45	6.75	∞	68.5	1.03	1180	0.0019	0.0040	5.6
0.40	6.00	∞	69.3	1.027	1061	0.0021	0.0050	5.0
0.30	4.50	∞	71.45	1.024	1024	0.0027	0.00303	4.8
0.20	3.00	∞	73.88	1.031	528.8	0.0040	0.00404	4.5
0.10	1.5	∞	76.91	1.054	269.5	0.0076	0.0303	5.6
0.08	1.2	∞	77.44	1.065	216.9	0.0092	0.00469	6.5

10-5 Diseño con el controlador de adelanto de fase

El controlador PID y sus componentes en la forma de los controles PD y PI representan formas simples de controladores que emplean operaciones de derivación e integración en la compensación de sistemas de control. En general, el diseño de controladores en sistemas de control se puede ver como un problema de diseño de filtros; entonces existe un gran número de esquemas posibles. Desde el punto de vista de filtrado, el controlador PD es un filtro paso altas, el controlador PI es un filtro paso bajas y el controlador PID es un filtro paso banda o banda atenuada, en función de los valores de los parámetros del controlador. El filtro paso altas a menudo se denomina como **controlador de adelanto de fase** ya que se introduce fase positiva al sistema en algún intervalo de frecuencias. El filtro paso bajas también se conoce como **controlador de atraso de fase,** ya que la fase correspondiente introducida es negativa. Estas ideas relacionadas con el filtrado y corrimiento de fase son útiles si los diseños se realizan en el dominio de la frecuencia.

La función de transferencia de un controlador de adelanto o atraso sencillo se expresa como:

$$G_c(s) = K_c \frac{s + z_1}{s + p_1} \tag{10-59}$$

en donde el controlador es paso altas o de adelanto de fase si $p_1 > z_1$, y paso bajas o de atraso de fase si $p_1 < z_1$.

La implementación del circuito con amplificadores operacionales de la ecuación (10-59) se proporciona en la tabla 4-1(g) y se repite en la Fig. 10-26 con un amplificador inversor. La función de transferencia del circuito es:

$$G_c(s) = \frac{E_o(s)}{E_{in}(s)} = \frac{C_1}{C_2} \frac{s + 1/R_1C_1}{s + 1/R_2C_2} \tag{10-60}$$

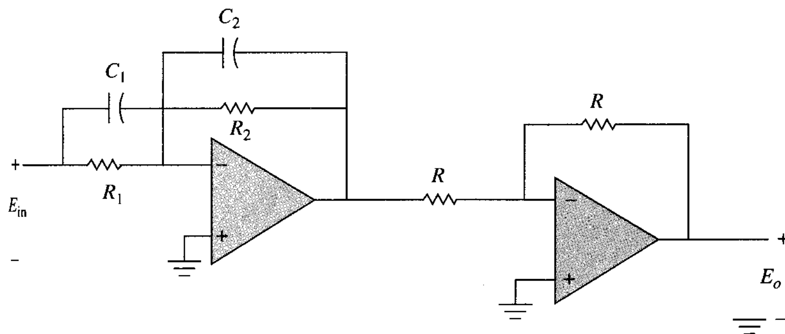


Figura 10-26 Implantación de $G(s) = \dfrac{s + z_1}{s + p_1}$ mediante un circuito con amplificadores operacionales.

Al comparar las dos últimas ecuaciones, se tiene:

$$K_c = C_1/C_2$$
$$z_1 = 1/R_1C_1$$
$$p_1 = 1/R_2C_2 \qquad (10\text{-}61)$$

Se puede reducir el número de parámetros de diseño de cuatro a tres al hacer que $C = C_1 = C_2$. Entonces, la ecuación (10-60) se escribe como:

$$G_c(s) = \frac{R_2}{R_1}\left(\frac{1 + R_1Cs}{1 + R_2Cs}\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{1 + aTs}{1 + Ts}\right) \qquad (10\text{-}62)$$

en donde:

$$a = \frac{R_1}{R_2} \qquad (10\text{-}63)$$
$$T = R_2C \qquad (10\text{-}64)$$

10-5-1 Interpretación y diseño en el dominio del tiempo del control de adelanto de fase

En esta sección se considera primero que las ecuaciones (10-60) y (10-62) representan un controlador de adelanto de fase ($z_1 < p_1$ o $a > 1$). Para que el controlador de adelanto de fase no degrade el error en estado estable, el factor a de la ecuación (10-62) debe ser absorbido por la

ganancia de la trayectoria directa K. Entonces, para propósitos de diseño, $G_c(s)$ se puede escribir como:

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \qquad (a > 1) \tag{10-65}$$

La configuración de polos y ceros de la ecuación (10-65) se muestra en la Fig. 10-27. Con base en la discusión dada en el Cap. 8 sobre los efectos de añadir un par polo-cero, con el cero cerca del origen, a la función de transferencia de la trayectoria directa, se observa que el controlador de adelanto de fase puede mejorar la estabilidad del sistema en lazo cerrado si sus parámetros se escogen en forma adecuada. En esencia, el diseño del control de adelanto de fase consiste en colocar el polo y el cero de $G_c(s)$ para que las especificaciones de diseño sean satisfechas. Se puede emplear el método de los contornos de las raíces para indicar los intervalos apropiados de los parámetros. Los programas de computadora **PIDESIGN** y **LLDESIGN** de **CSAD/MATLAB** se pueden emplear para agilizar el procedimiento de prueba y error en forma considerable. Las siguientes guías sirven para la selección de los parámetros a y T.

1. Al mover el cero en $-1/aT$ hacia el origen se deben mejorar los tiempos de levantamiento y asentamiento. Si el cero se mueve muy cerca del origen, el sobrepaso máximo se puede incrementar otra vez ya que $-1/aT$ también aparece como un cero de la función de transferencia en lazo cerrado.
2. Al mover el polo en $-1/T$ lejos del cero y el origen, se debe reducir el sobrepaso máximo, pero si el valor de T es muy pequeño, los tiempos de levantamiento y asentamiento se incrementarán otra vez.

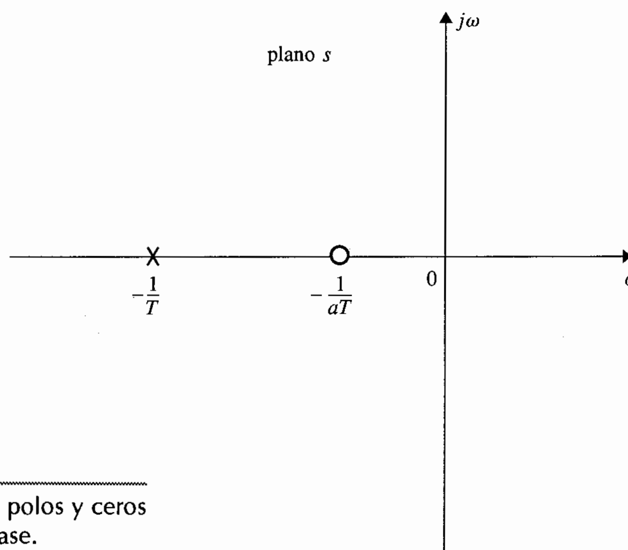


Figura 10-27 Configuración de polos y ceros del controlador de adelanto de fase.

Se pueden hacer los siguientes comentarios con respecto a los efectos del control de adelanto de fase sobre el desempeño en el dominio del tiempo de un sistema de control.

1. Cuando se emplea en forma adecuada, puede incrementar el amortiguamiento del sistema.
2. Mejora los tiempos de levantamiento y asentamiento.
3. En la forma de la ecuación (10-65), el control de adelanto de fase no afecta el error en estado estable, ya que $G_c(0) = 1$.

10-5-2 Interpretación y diseño en el dominio de la frecuencia del control de adelanto de fase

Las trazas de Bode del controlador de adelanto de fase de la ecuación (10-65) se muestran en la Fig. 10-28. Las dos frecuencias de corte están en $\omega = 1/aT$ y $\omega = 1/T$. El valor máximo de la fase, ϕ_m, y la frecuencia en la que ocurre, ω_m, se obtienen como sigue. Ya que ω_m es la media geométrica de las dos frecuencias de corte, se escribe:

$$\log_{10}\omega_m = \frac{1}{2}\left(\log_{10}\frac{1}{aT} + \log_{10}\frac{1}{T}\right) \tag{10-66}$$

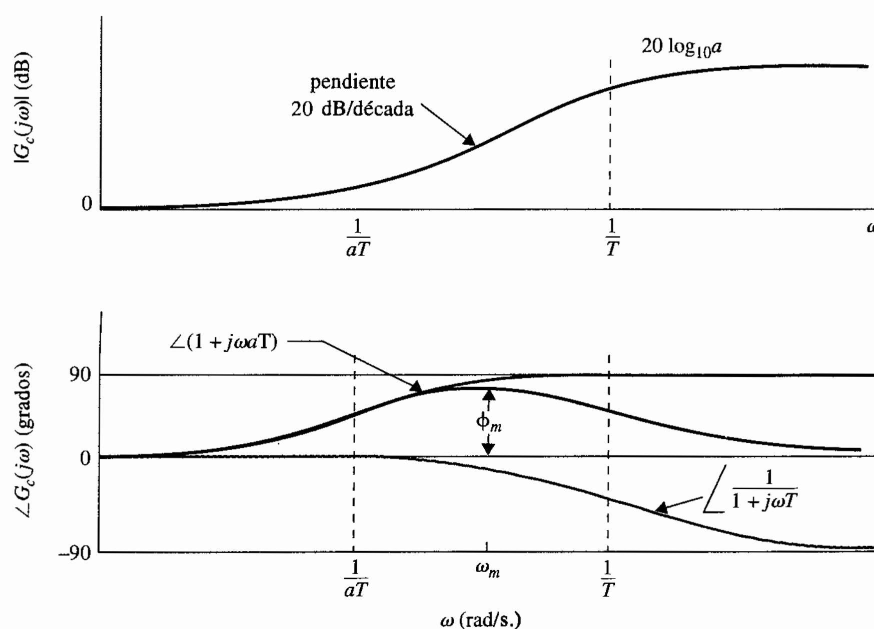


Figura 10-28 Trazas de Bode del controlador de adelanto de fase.

$$G_c(s) = a\frac{s + 1/aT}{s + 1/T} \qquad a > 1.$$

Por tanto:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a}\,T} \tag{10-67}$$

Para determinar la fase máxima ϕ_m, la fase de $G_c(j\omega)$ se escribe como:

$$\angle G_c(j\omega) = \phi(j\omega) = \tan^{-1}\omega aT - \tan^{-1}\omega T \tag{10-68}$$

de donde se obtiene:

$$\tan\phi(j\omega) = \frac{\omega aT - \omega T}{1 + (\omega aT)(\omega T)} \tag{10-69}$$

Al sustituir la ecuación (10-67) en la (10-68) para ω, se tiene:

$$\tan\phi_m = \frac{a-1}{2\sqrt{a}} \tag{10-70}$$

o

$$\operatorname{sen}\phi_m = \frac{a-1}{a+1} \tag{10-71}$$

Por tanto, al conocer ϕ_m, el valor de a se determina de:

$$a = \frac{1 + \operatorname{sen}\phi_m}{1 - \operatorname{sen}\phi_m} \tag{10-72}$$

La relación entre la fase ϕ_m y a y las propiedades generales de las trazas de Bode del controlador de adelanto de fase proveen una ventaja del diseño en el dominio de la frecuencia. La dificultad es, por supuesto, la correlación entre las especificaciones entre los dominios del tiempo y la frecuencia. El procedimiento general de diseño del controlador de adelanto de fase en el dominio de la frecuencia se proporciona a continuación. Se supone que las especificaciones de diseño incluyen simplemente los requisitos de error en estado estable y margen de fase.

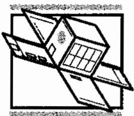
1. Las trazas de Bode del proceso no compensado $G_p(j\omega)$ se construye con la constante de ganancia K puesta de acuerdo con el requisito de error en estado estable. El valor de K tiene que ser ajustado una vez que se determinó el valor de a.

2. Se determina el margen de fase y el margen de ganancia del sistema no compensado y se calcula la cantidad de adelanto de fase adicional que se necesita para lograr el margen de fase. Del requisito de adelanto de fase adicional, se estima el valor deseado de ϕ_m, y el valor de a se calcula de la ecuación (10-72).
3. Una vez que se determinó el valor de a, es necesario solamente determinar el valor de T, y el diseño, en principio, está completo. Éste es completado al colocar las frecuencias de corte del controlador de adelanto de fase, $1/aT$ y $1/T$, tal que ϕ_m se localice en la nueva frecuencia de cruce de ganancia ω'_g, para que el margen de fase del sistema compensado sea beneficiado por ϕ_m. Se sabe que la ganancia de alta frecuencia del controlador de adelanto de fase es $20 \log_{10} a$ dB. Por tanto, para tener la nueva frecuencia de cruce de ganancia en ω_m, que es la media geométrica de $1/aT$ y $1/T$, se necesita colocar a ω_m en la frecuencia donde la magnitud del sistema no compensado $G_p(j\omega)$ sea $-10 \log_{10} a$ dB, por lo que al sumarle la ganancia del controlador de $10 \log_{10} a$ dB hace que la curva de magnitud pase por 0 dB en ω_m.
4. Las trazas de Bode de la función de transferencia de la trayectoria directa del sistema compensado se investigan para comprobar si todas las especificaciones de desempeño se cumplen; si no, se debe escoger un nuevo valor de ϕ_m y se repiten los pasos.
5. Si todas las especificaciones de diseño se satisfacen, se establece la función de transferencia del controlador de adelanto de fase a partir de los valores de a y T.

Si las especificaciones de diseño también incluyen M_r y/o BW, éstas se deben verificar con la carta de Nichols o los datos de salida de un programa de computadora.

Se emplea el siguiente ejemplo para ilustrar el diseño del controlador de adelanto de fase en los dominios del tiempo y de la frecuencia.

Ejemplo 10-6



El diagrama de bloques del sistema de control rastreador solar descrito en el ejemplo 4-7 se muestra otra vez en la Fig. 10-29. El sistema se puede instalar en un vehículo espacial para que siga al Sol con gran exactitud. La variable θ_r representa el ángulo de referencia del rayo de Sol, y θ_o denota el eje del vehículo. El objetivo del sistema rastreador solar es mantener el error entre θ_r y θ_o, α, cerca de cero. Los parámetros del sistema son los siguientes:

- ▲ $R_F = 10{,}000\ \Omega$
- ▲ $K_i = 0.0125$ N-m/A
- ▲ $J = 10^{-6}$ kg-m^2
- ▲ $K =$ a determinar
- ▲ $n = 800$
- ▲ $K_b = 0.0125$ V/rad/s
- ▲ $R_a = 6.25\ \Omega$
- ▲ $K_s = 0.1$ A/rad
- ▲ $B = 0$

La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema no compensado es:

$$G_p(s) = \frac{\Theta_o(s)}{A(s)} = \frac{K_s R_F K K_i / n}{R_a J s^2 + K_i K_b s} \tag{10-73}$$

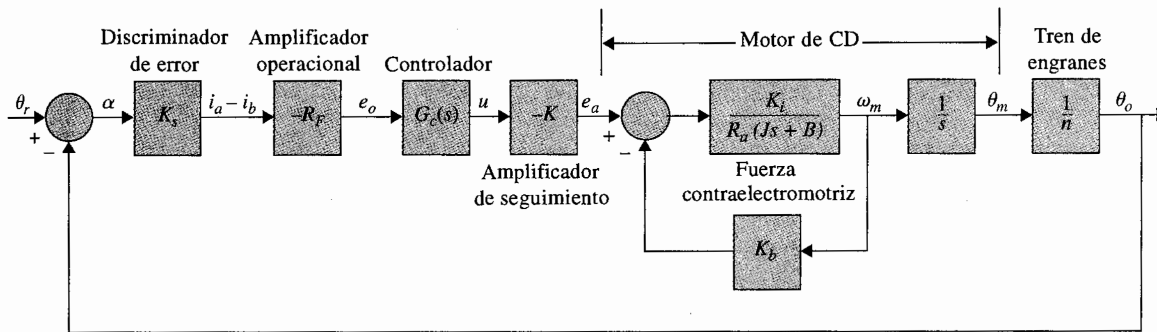


Figura 10-29 Diagrama de bloques del sistema de control rastreador solar.

en donde $\Theta_o(s)$ y $A(s)$ son las transformadas de Laplace de $\theta_o(t)$ y $\alpha(t)$, respectivamente. Al sustituir los valores numéricos de los parámetros del sistema en la ecuación (10-73), se obtiene:

$$G_p(s) = \frac{\Theta_o(s)}{A(s)} = \frac{2500K}{s(s+25)} \tag{10-74}$$

Diseño en el dominio del tiempo

Las especificaciones en el dominio del tiempo del sistema son las siguientes:

1. El error en estado estable de $\alpha(t)$ debido una entrada función rampa unitaria para $\theta_r(t)$ debe ser ≤ 0.01 rad por rad/s de la velocidad de salida en estado estable. En otras palabras, el error en estado estable debido a una entrada rampa debe ser ≤ 1 por ciento.
2. El sobrepaso máximo de la respuesta al escalón debe ser menor que 5%, o tan pequeño como sea posible.
3. Tiempo de levantamiento $t_r \leq 0.02$ s
4. Tiempo de asentamiento $t_s \leq 0.02$ s

El valor mínimo de la ganancia del amplificador, K, se determina inicialmente del requisito de error en estado estable. Al aplicar el teorema del valor final a $\alpha(t)$, se tiene:

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \lim_{s\to 0} sA(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s\Theta_r(s)}{1+G_p(s)} \tag{10-75}$$

Para una entrada rampa unitaria, $\Theta_r(s) = 1/s^2$. Al emplear la ecuación (10-74), la ecuación (10-75) conduce a:

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \frac{0.01}{K} \tag{10-76}$$

Por tanto, para que el valor en estado estable de $\alpha(t)$ sea ≤ 0.01, K debe ser ≥ 1. Se considera a $K = 1$, el peor caso desde el punto de vista del error en estado estable, la ecuación característica del sistema no

$\theta_o(t)$

Figur.
del ej

compensado es:

$$s^2 + 25s + 2500 = 0 \tag{10-77}$$

Se puede mostrar que el factor de amortiguamiento relativo del sistema no compensado con $K = 1$ es sólo de 0.25, lo cual corresponde a un sobrepaso máximo de 44.4 por ciento. La Fig. 10-30 muestra la respuesta al escalón unitario del sistema con $K = 1$.

Se ha reservado un espacio en la función de transferencia de la trayectoria directa del diagrama de bloques de la Fig. 10-29 para un controlador con función de transferencia $G_c(s)$. Se considera emplear el controlador de adelanto de fase de la ecuación (10-62), aunque en este caso, un controlador PD o uno de cualquier tipo de adelanto de fase puede ser efectivo en satisfacer los criterios de desempeño dados.

La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema compensado se escribe como:

$$G(s) = \frac{2500K(1 + aTs)}{as(s + 25)(1 + Ts)} \tag{10-78}$$

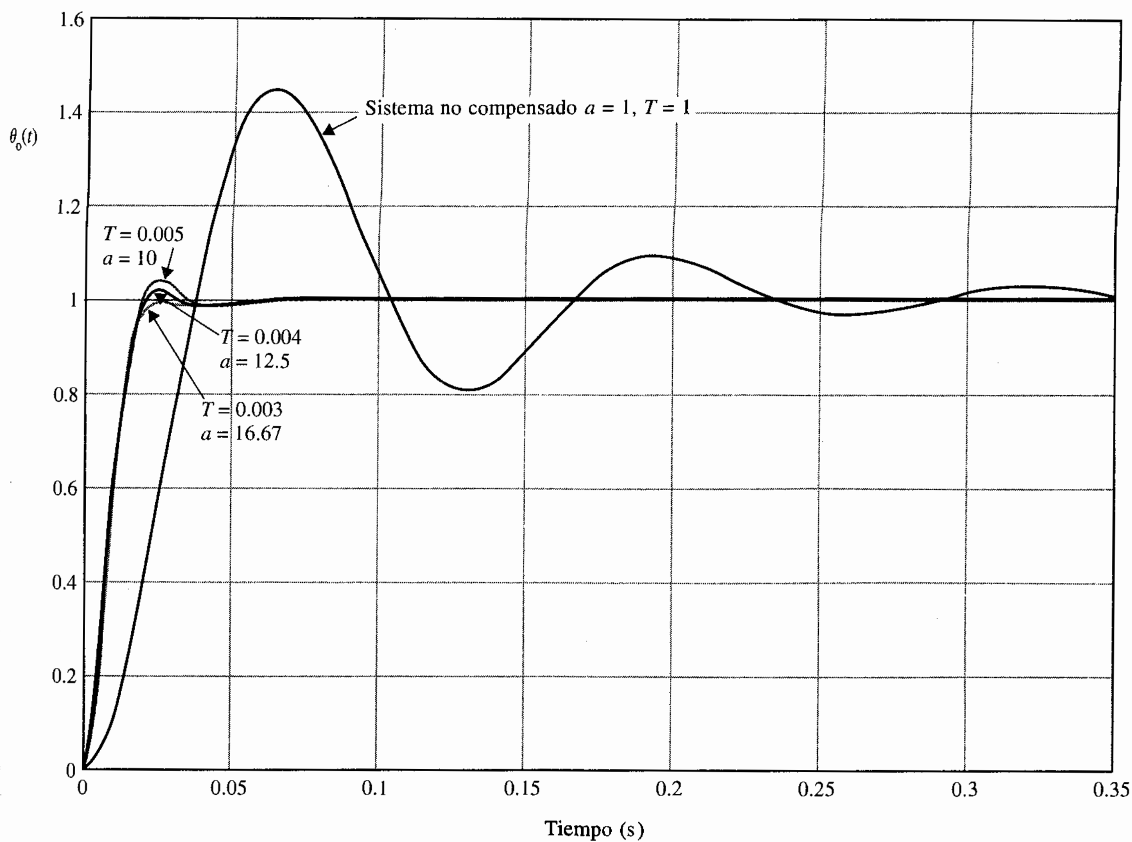


Figura 10-30 Respuestas al escalón unitario del sistema rastreador solar del ejemplo 10-6.

Para el sistema compensado para satisfacer el requisito de error en estado estable, K debe satisfacer:

$$K \geq a \tag{10-79}$$

Se considera a $K = a$. La ecuación característica del sistema es:

$$(s^2 + 25s + 2500) + Ts^2(s + 25) + 2500aTs = 0 \tag{10-80}$$

Se puede emplear el método de los contornos de las raíces para mostrar el efecto de variar a y T del controlador de adelanto de fase. Primero se considera $a = 0$. La ecuación característica de la ecuación (10-80) se convierte en:

$$s^2 + 25s + 2500 + Ts^2(s + 25) = 0 \tag{10-81}$$

Al dividir ambos miembros de la ecuación (10-81) entre los términos que no contienen a T, se obtiene:

$$1 + G_{eq1}(s) = 1 + \frac{Ts^2(s + 25)}{s^2 + 25s + 2500} = 0 \tag{10-82}$$

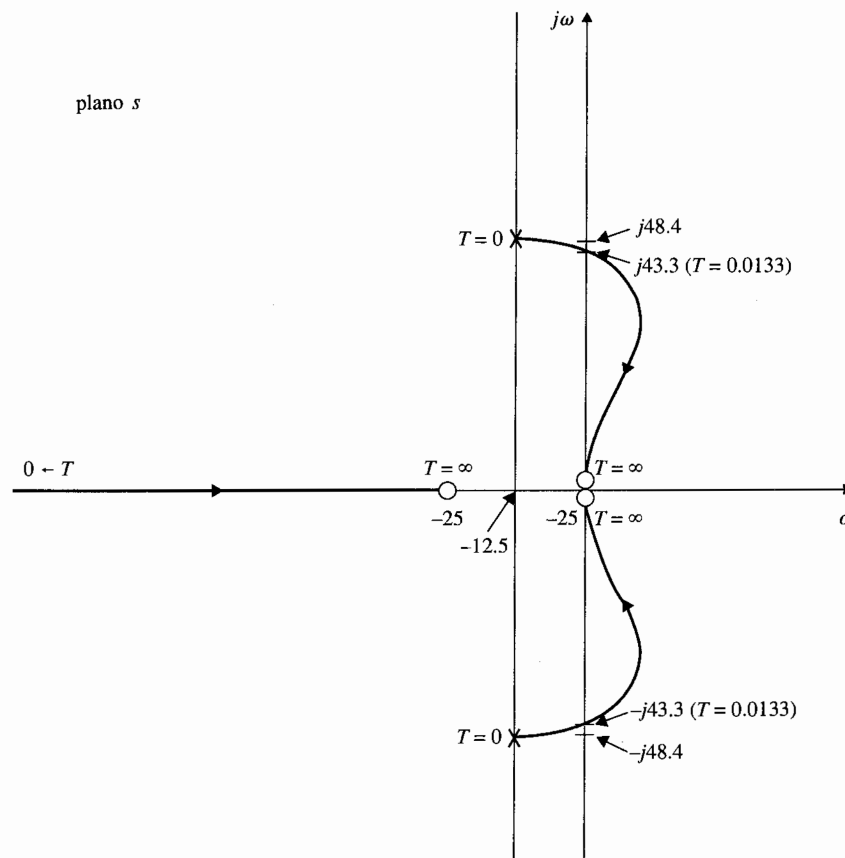


Figura 10-31 Contornos de las raíces del sistema rastreador solar con $a = 0$, y T varía desde 0 hasta ∞.

Por tanto, los contornos de las raíces de la ecuación (10-81) cuando T varía se determinan mediante la configuración de polos y ceros de $G_{eq1}(s)$ en la ecuación (10-82). Estos contornos de las raíces se dibujan como se muestra en la Fig. 10-31. Observe que los polos de $G_{eq1}(s)$ son las raíces de la ecuación característica cuando $a = 0$ y $T = 0$. Los contornos de las raíces de la Fig. 10-31 muestran claramente que al añadir solamente el factor $(1 + Ts)$ al denominador de la ecuación (10-74) no podría mejorar el desempeño del sistema, ya que las raíces de la ecuación característica son empujadas hacia el semiplano derecho del plano. De hecho, el sistema se vuelve inestable cuando T es mayor que 0.0133. Para alcanzar el efecto total del controlador de adelanto de fase, se debe restaurar el valor de a en la ecuación (10-80). Para preparar los contornos de las raíces con a como el parámetro variable, se dividen ambos miembros de la ecuación (10-80) entre los términos que no contengan a, y resulta la ecuación siguiente:

$$1 + aG_{eq2}(s) = 1 + \frac{2500aTs}{s^2 + 25s + 2500 + Ts^2(s + 25)} = 0 \qquad (10\text{-}83)$$

Para una T dada, los contornos de las raíces de la ecuación (10-80) cuando a varía se obtiene con base en los polos y ceros de $G_{eq2}(s)$. Observe que los polos de $G_{eq2}(s)$ son los mismos que las raíces de la ecuación (10-81). Por tanto, para una T dada, los contornos de las raíces de la ecuación (10-80) cuando a varía deben comenzar ($a = 0$) en los puntos sobre los contornos de las raíces de la Fig. (10-31). Estos contornos de las raíces terminan ($a = \infty$) en $s = 0, \infty, \infty$, que son los ceros de $G_{eq2}(s)$. Los contornos de las raíces completos de la ecuación (10-80) se muestran ahora en la Fig. 10-32 para varios valores de T, y a varía desde 0 hasta ∞.

▲ Para un efectivo control de adelanto de fase, el valor de T debe ser pequeño.

De los contornos de las raíces de la Fig. 10-32, se observa que para un control de adelanto de fase efectivo, el valor de T debe ser pequeño. Para valores grandes de T, la frecuencia natural del sistema se incrementa rápidamente conforme a se incrementa y se hace una ligera mejora en el amortiguamiento del sistema.

Se escoge $T = 0.01$ en forma arbitraria. La tabla 10-11 muestra los atributos de la respuesta al escalón unitario cuando el valor de aT varía desde 0.02 hasta 0.1. El programa **lldesign** de **CSAD/MATLAB** fue empleado para los cálculos de las respuestas en el tiempo. Estos resultados muestran que el sobrepaso máximo más pequeño se obtiene cuando $aT = 0.05$, aunque los tiempos de levantamiento y asentamiento disminuyen en forma continua conforme aT se incrementa. Sin embargo, el valor más pequeño del sobrepaso máximo es 16.2%, el cual excede la especificación de diseño. A continuación se hace que $aT = 0.05$ y T varíe desde 0.01 hasta 0.001. La tabla 10-12 muestra los atributos de las respuestas al escalón unitario. Conforme el valor de T disminuye, el sobrepaso máximo disminuye, pero los tiempos de levantamiento y asentamiento se incrementan. Los casos que satisfacen los requisitos de diseño se indican en la tabla. La Fig. 10.30 muestra las respuestas al escalón unitario del sistema compensado con adelanto de fase con tres conjuntos de parámetros del controlador.

El escoger $T = 0.004$, $a = 12.5$, la función de transferencia del controlador de adelanto de fase es:

$$G_c(s) = a\frac{s + 1/aT}{s + 1/T} = 12.5\frac{s + 20}{s + 250} \qquad (10\text{-}84)$$

La función de transferencia del sistema compensado es:

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{31{,}250(s + 20)}{s(s + 25)(s + 250)} \qquad (10\text{-}85)$$

Para encontrar las realización del circuito con amplificadores operacionales del controlador de adelanto de fase, se escoge en forma arbitraria $C = 0.1\ \mu$F. Los resistores del circuito se encuentran al emplear las ecuaciones (10-63) y (10-64) como, $R_1 = 500\,000\ \Omega$ y $R_2 = 40\,000\ \Omega$.

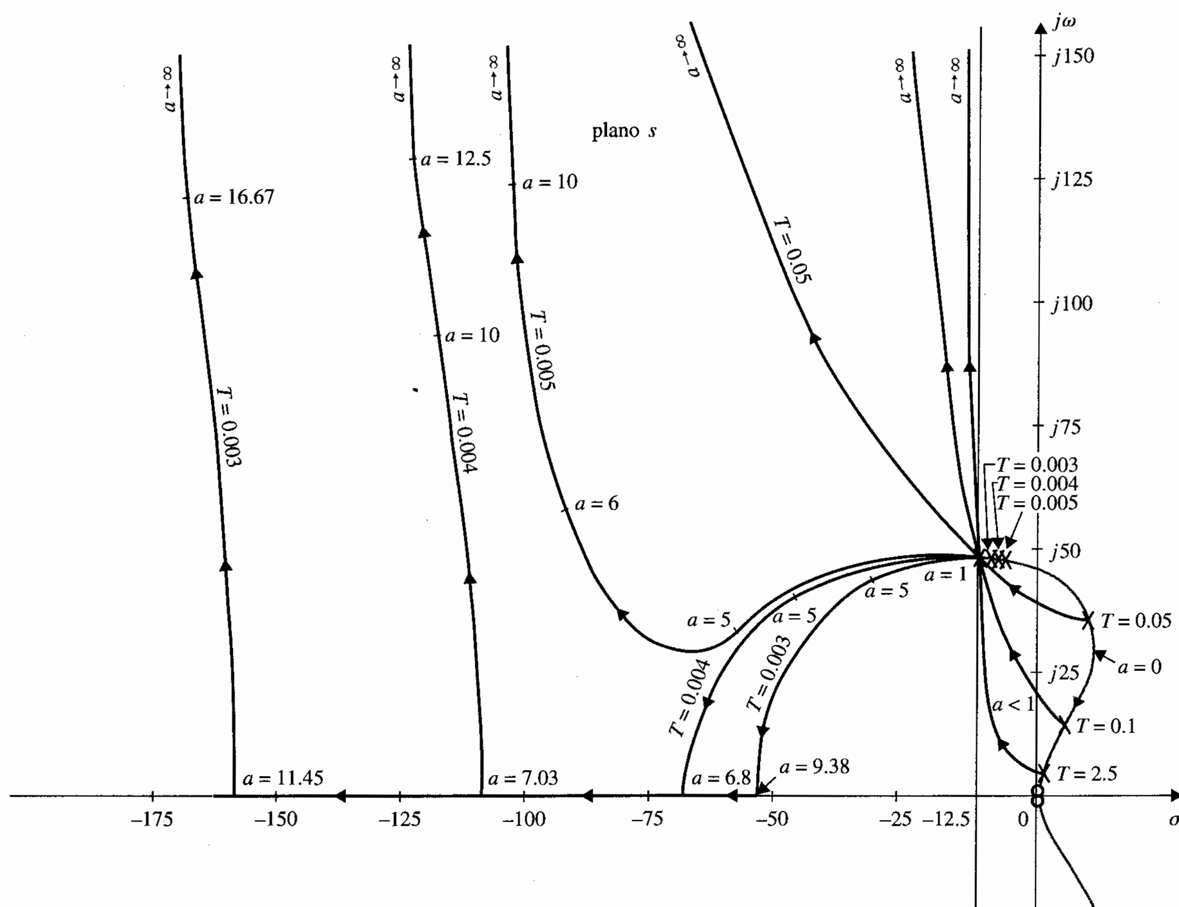


Figura 10-32 Contornos de las raíces del sistema rastreador solar con un controlador de adelanto de fase.

Diseño en el dominio de la frecuencia

Se especifica que el requisito de error en estado estable es el mismo que el dado anteriormente. Para el diseño en el dominio de la frecuencia, el margen de fase debe ser mayor que 45°. Se consideran los siguientes pasos de diseño:

1. Las trazas de Bode de la ecuación (10-74) con $K = 1$ se dibujan en la Fig. 10-33.
2. El margen de fase del sistema no compensado, leído en la frecuencia de cruce de ganancia, $\omega'_g = 47$ rad/s, es 32°. Ya que el margen de fase mínimo deseado es 45°, al menos se deben añadir 13 grados más de fase al lazo en la frecuencia de cruce de ganancia.

Tabla 10-11 Atributos de la respuesta al escalón unitario del sistema con el controlador de adelanto de fase del ejemplo 10-6: $T = 0.01$

aT	a	Sobrepaso máximo (%)	t_r (s)	t_s (s)
0.02	2	26.6	0.0222	0.0830
0.03	3	18.9	0.0191	0.0665
0.04	4	16.3	0.0164	0.0520
0.05	5	16.2	0.0146	0.0415
0.06	6	17.3	0.0129	0.0606
0.08	8	20.5	0.0112	0.0566
0.10	10	23.9	0.0097	0.0485

Tabla 10-12 Atributos de la respuestas al escalón unitario del sistema con el controlador de adelanto de fase del ejemplo 10-6: $aT = 0.05$

T	a	Sobrepaso máximo (%)	t_r (s)	t_s (s)
0.01	5.0	16.2	0.0146	0.0415
0.005	10.0	4.1	0.0133	0.0174
0.004	12.5	1.1	0.0135	0.0174
0.003	16.67	0	0.0141	0.0174
0.002	25.0	0	0.0154	0.0209
0.001	50.0	0	0.0179	0.0244

3. El controlador de adelanto de fase de la ecuación (10-65) debe proveer 17° adicionales en la frecuencia de cruce de ganancia del sistema compensado. Sin embargo, al aplicar el controlador de adelanto de fase la curva de magnitud de las trazas de Bode también se ve afectada en tal forma que la frecuencia de cruce de ganancia es corrida a una frecuencia más alta. Aunque es fácil ajustar las frecuencias de corte, $1/aT$ y $1/T$, del controlador para que la fase máxima del controlador, ϕ_m, caiga exactamente en la nueva frecuencia de cruce de ganancia, la curva de fase original en este punto ya no es 32°, y puede ser considerablemente menor, ya que la fase de la mayoría de lo procesos controlados disminuye conforme la frecuencia se incrementa. De hecho, si la fase del proceso no compensado disminuye rápidamente con el incremento en la frecuencia cerca de la frecuencia de cruce de ganancia, el controlador de adelanto de fase de una sola etapa ya no es efectivo.

En vista de la dificultad de estimar la cantidad necesaria de adelanto de fase, es esencial incluir algún margen de seguridad para considerar la inevitable caída de fase.

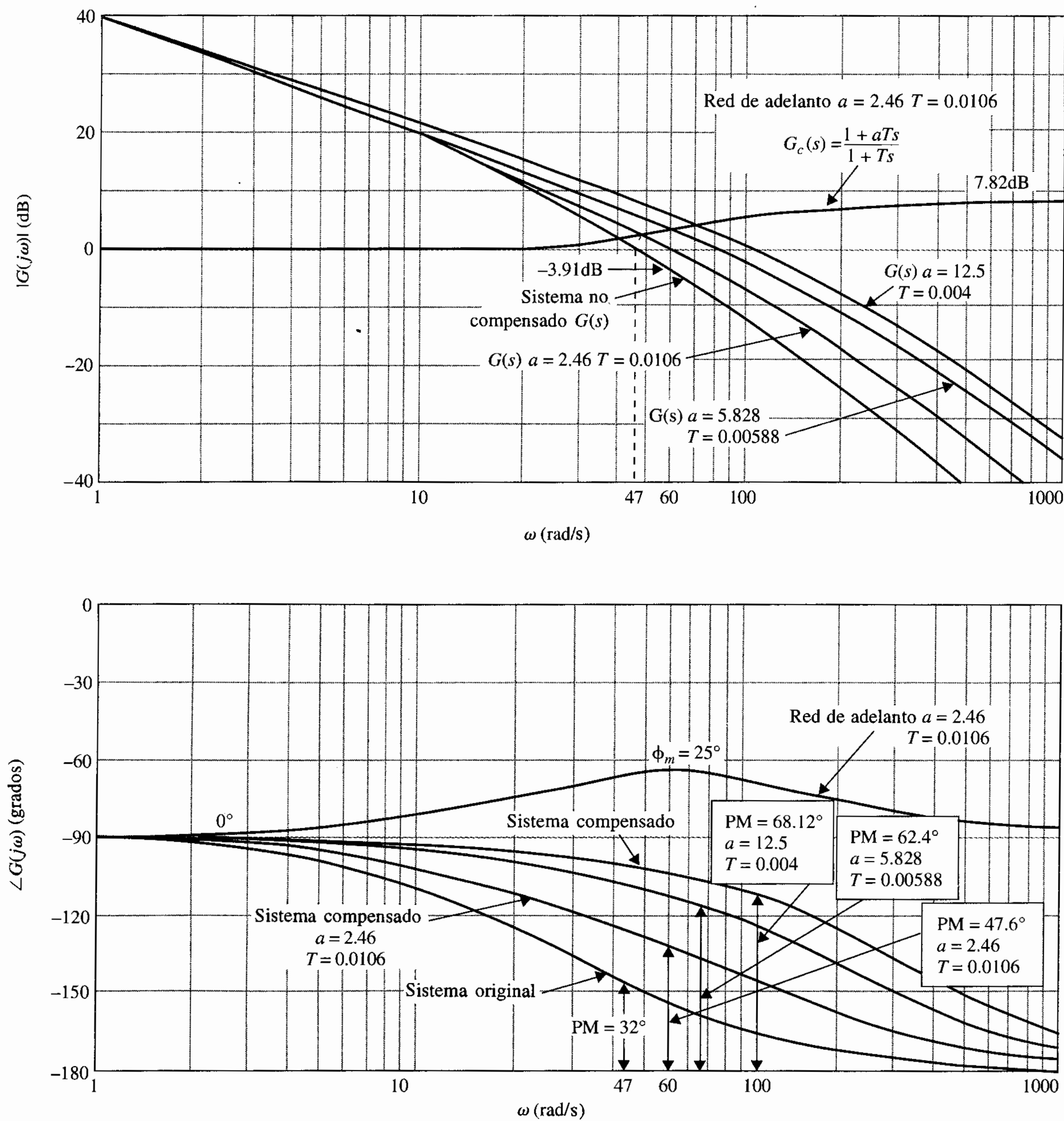


Figura 10-33 Trazas de Bode de los sistemas compensado y no compensado de adelanto de fase del ejemplo 10-6.

$$G(s) = \frac{2500(1 + aTs)}{s(s + 25)(1 + Ts)}$$

En consecuencia, en este caso, en lugar de seleccionar a ϕ_m de 13°, se considera ser de 25°. Mediante la ecuación (10-72), se tiene:

$$a = \frac{1 + \text{sen } 25^\circ}{1 - \text{sen } 25^\circ} = 2.46 \tag{10-86}$$

4. Para determinar la ubicación de las dos frecuencias de corte, $1/aT$ y $1/T$, del controlador, se sabe de la ecuación (10-67) que el adelanto de fase máximo ϕ_m ocurre en la media geométrica de las dos frecuencias de corte. Para alcanzar el margen de fase máximo con el valor de a determinado, ϕ_m debe ocurrir en la nueva frecuencia de cruce de ganancia ω'_g, que no es conocida. Los siguientes pasos se toman para asegurar que ϕ_m ocurre en ω'_g.
(a) La ganancia de alta frecuencia del controlador de adelanto de fase de la ecuación (10-65) es:

$$20 \log_{10} a = 20 \log_{10} 2.46 = 7.82 \text{ dB} \tag{10-87}$$

(b) La media geométrica ω_m de las dos frecuencias de corte $1/aT$ y $1/T$ debe estar ubicada en la frecuencia en la que la magnitud de la función de transferencia del proceso no compensado $G_p(j\omega)$ en dB es igual al valor negativo en dB de la mitad de esta ganancia. De esta forma, la curva de magnitud de la función de transferencia compensada pasará a través del eje de 0 dB en $\omega = \omega_m$. Por tanto, ω_m debe estar ubicada en la frecuencia donde:

$$|G_p(j\omega)| \text{ dB} = -10 \log_{10} 2.46 = -3.91 \text{ dB} \tag{10-88}$$

De la Fig. 10-33, esta frecuencia es $\omega_m = 60$ rad/s. Ahora al emplear la ecuación (10-67), se tiene:

$$\frac{1}{T} = \sqrt{a}\omega_m = \sqrt{2.46} \times 60 = 94.1 \text{ rad/s} \tag{10-89}$$

Entonces $1/aT = 94.1/2.46 = 38.21$ rad/s. La función de transferencia del controlador de adelanto de fase es:

$$G_c(s) = a\frac{s + 1/aT}{s + 1/T} = 2.46\frac{s + 38.21}{s + 94.1} \tag{10-90}$$

La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema compensado es:

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{6150(s + 38.21)}{s(s + 25)(s + 94.1)} \tag{10-91}$$

La Fig. 10-33 muestra que el margen de fase del sistema compensado es realmente de 47.6°.

Tabla 10-13 Atributos del sistema con el control de adelanto de fase del ejemplo 10-6

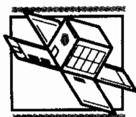
a	T	MF (grados)	M_r	Cruce de ganancia (rad/s)	BW (rad/s)	Sobrepaso máximo (%)	t_r (s)	t_s (s)
1	1	28.03	2.06	47.0	74.3	44.4	0.0255	0.2133
2.46	0.0106	47.53	1.26	60.2	98.2	22.3	0.0204	0.0744
5.828	0.00588	62.36	1.03	79.1	124.7	7.7	0.0169	0.0474
12.5	0.0040	68.12	1.00	113.1	172.5	1.1	0.0135	0.0174

En la Fig. 10-34, la magnitud y fase de los sistemas original y compensado se dibujan sobre una carta de Nichols. Estas trazas se pueden hacer al tomar los datos directamente de las trazas de Bode de la Fig. 10-33. Los valores de M_r, ω_r y BW se pueden determinar de la carta de Nichols. Sin embargo, los datos de desempeño se obtienen más fácilmente con un programa de computadora tal como **bplot** o **lldesign** de **CSAD.** Al verificar el desempeño en el dominio del tiempo del sistema compensado, se tienen los siguientes resultados:

sobrepaso máximo = 22.3 por ciento $\quad t_r = 0.02045$ s $\quad t_s = 0.07439$ s

que caen muy cerca de las especificaciones en el dominio del tiempo listadas anteriormente. La Fig. 10-33 también muestran las trazas de Bode del sistema compensado con un controlador de adelanto de fase con $a = 5.828$ y $T = 0.00588$. El margen de fase se mejora a 62.4°. Al emplear la ecuación (10-71), se puede mostrar que el resultado de $a = 12.5$ obtenido en el diseño en el dominio del tiempo corresponde realmente a $\phi_m = 58.41$. Al añadir éste a la fase original de 28°, el margen de fase correspondiente sería de 86.41°. Los atributos en los dominios del tiempo y la frecuencia con los tres controladores de adelanto de fase se resumen en la tabla 10-13. Los resultados muestran que con $a = 12.5$ y $T = 0.004$, todavía el margen de fase proyectado es de 86.41°. El valor real es 68.12°, debido a la caída de la curva de fase en la nueva frecuencia de cruce de ganancia. ▲

Ejemplo 10-7



En este ejemplo se ilustra la aplicación del controlador de adelanto de fase a un sistema de tercer orden con una ganancia de lazo relativamente alta. Se considera que la inductancia del motor de cd del sistema rastreador solar descrito en la Fig. 10-29 no es cero. Se proporciona el siguiente conjunto de parámetros de diseño:

- ▲ $R_F = 10{,}000\ \Omega$ ▲ $K_b = 0.0125$ V/rad/s
- ▲ $K_i = 0.0125$ N-m/A ▲ $R_a = 0.625\ \Omega$
- ▲ $J = 10^{-6}$ kg-m^2 ▲ $K_s = 0.3$ A/rad
- ▲ K = a determinar ▲ $B = 0$
- ▲ $n = 800$ ▲ $L_a = 10^{-3}$ H

La función de transferencia del motor de cd se escribe como:

$$\frac{\Omega_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_i}{s(L_a J s^2 + J R_a s + K_i K_b)} \tag{10-92}$$

Fig

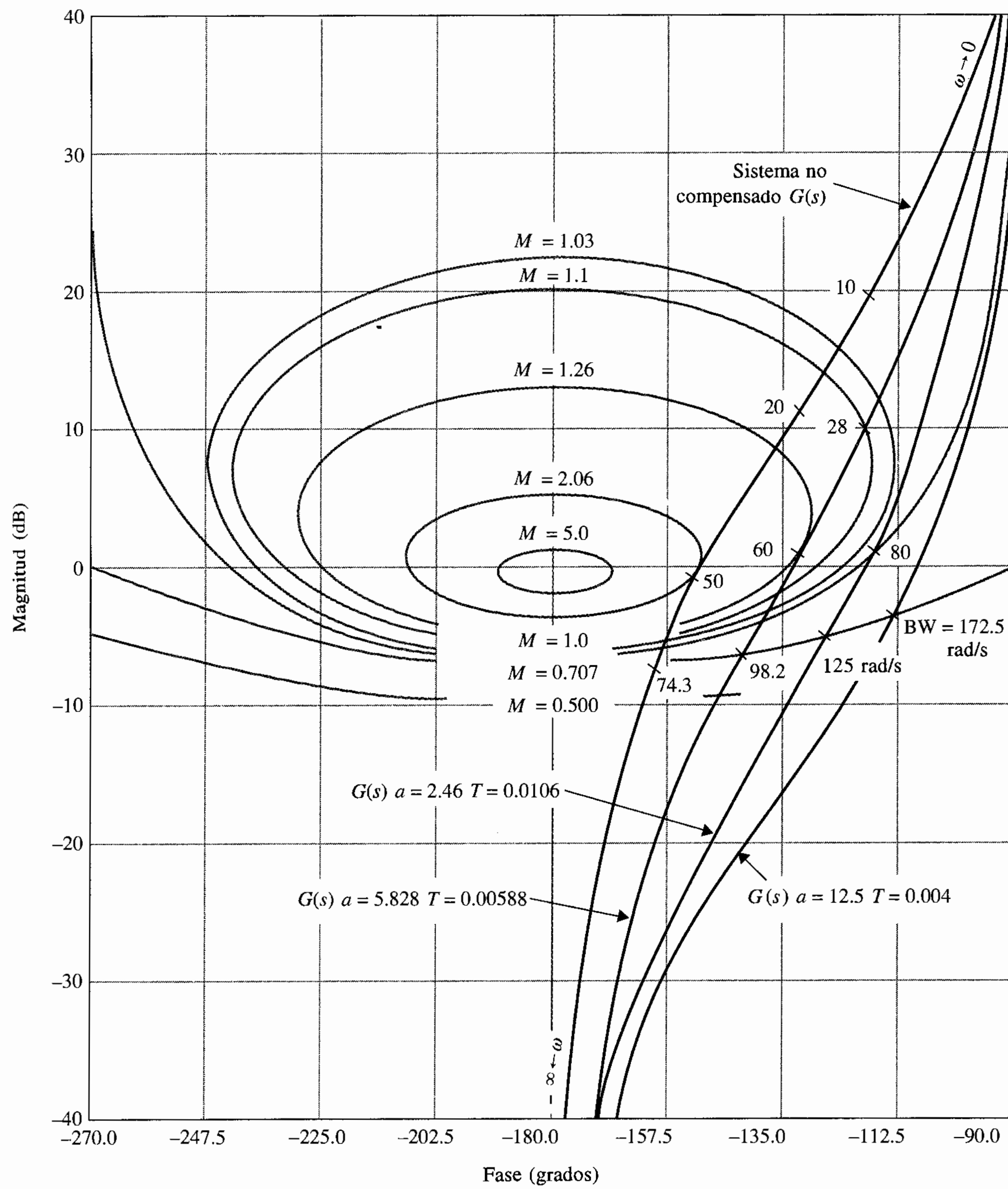


Figura 10-34 Trazas de $G(s)$ en la carta de Nichols para el sistema del ejemplo 10-6.

$$G(s) = \frac{2500(1 + aTs)}{s(s + 25)(1 + Ts)}$$

La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema es:

$$G_p(s) = \frac{\Theta_o(s)}{\mathrm{A}(s)} = \frac{K_s R_F K K_i}{s(L_a J s^2 + J R_a s + K_i K_b)} \tag{10-93}$$

Al sustituir los valores de los parámetros del sistema en la ecuación (10-93), se obtiene:

$$G_p(s) = \frac{\Theta_o(s)}{\mathrm{A}(s)} = \frac{4.6875 \times 10^7 K}{s(s^2 + 625s + 156\,250)} \tag{10-94}$$

Diseño en el dominio del tiempo

Las especificaciones en el dominio del tiempo del sistema se dan a continuación:

1. El error en estado estable de $\alpha(t)$ debido a una entrada función rampa unitaria para $\theta_r(t)$ debe ser $\leq$ 1/300 rad/rad/s de la velocidad de salida final en estado estable.
2. El sobrepaso máximo de la respuesta al escalón debe ser menor al 5%, o tan pequeño como sea posible.
3. Tiempo de levantamiento $t_r \leq 0.004$ s.
4. Tiempo de asentamiento $t_s \leq 0.02$ s.

El valor mínimo de la ganancia del amplificador K se determina inicialmente del requisito de error en estado estable. Al aplicar el teorema del valor final a $\alpha(t)$, se obtiene:

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \lim_{s\to 0} s\mathrm{A}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s\Theta_r(s)}{1 + G_p(s)} \tag{10-95}$$

Al sustituir la ecuación (10-94) en la (10-95) y $\Theta_r(s) = 1/s^2$, se tiene:

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \frac{1}{300K} \tag{10-96}$$

Por tanto, para que el valor en estado estable de $\alpha(t)$ sea $\leq$ 1/300, K debe ser ≥ 1. Se considera $K = 1$; la función de transferencia de la trayectoria directa de la ecuación (10-94) se convierte en:

$$G_p(s) = \frac{4.6875 \times 10^7}{s(s^2 + 625s + 156\,250)} \tag{10-97}$$

Se puede mostrar que el sistema rastreador solar en lazo cerrado con $K = 1$ tiene los siguientes atributos de respuesta al escalón unitario.

Sobrepaso máximo = 43% Tiempo de levantamiento $t_r = 0.004797$ s
Tiempo de asentamiento $t_s = 0.04587$ s

Para mejorar la respuesta del sistema, se selecciona el controlador de adelanto de fase descrito por la ecuación (10-62). La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema compensado es:

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{4.6875 \times 10^7 K(1 + aTs)}{as(s^2 + 625s + 156\,250)(1 + Ts)} \tag{10-98}$$

Ahora para satisfacer el requisito de error en estado estable, K debe ser reajustada para que $K \geq a$. Se considera $K = a$. La ecuación característica del sistema compensado con adelanto de fase se convierte en:

$$(s^3 + 625s^2 + 156\,250s + 4.6875 \times 10^7) + Ts^2(s^2 + 625s + 156\,250) + 4.6875 \times 10^7\,aTs = 0 \tag{10-99}$$

Se puede emplear el método de los contornos de las raíces para examinar los efectos de variar a y T del controlador de adelanto de fase. Primero se considera a igual a cero. La ecuación característica de la ecuación (10-99) se convierte en:

$$(s^3 + 625s^2 + 156\,250s + 4.6875 \times 10^7) + Ts^2(s^2 + 625s + 156\,250) = 0 \tag{10-100}$$

Al dividir ambos miembros de la ecuación (10-100) entre los términos que no contienen a T, se obtiene:

$$1 + G_{eq1}(s) = 1 + \frac{Ts^2(s^2 + 625s + 156\,250)}{s^3 + 625s^2 + 156\,250s + 4.6875 \times 10^7} = 0 \tag{10-101}$$

Los contornos de las raíces de la ecuación (10-100) cuando T varía se determinan de la configuración de polos y ceros de $G_{eq1}(s)$ en la ecuación (10-101), y se dibujan como se muestra en la Fig. 10-35. Cuando a varía desde 0 hasta ∞, se dividen ambos miembros de la ecuación (10-99) entre los términos que no contienen a a, y se tiene:

$$1 + G_{eq2}(s) = 1 + \frac{4.6875 \times 10^7\,aTs}{s^3 + 625s^2 + 156\,250s + 4.6875 \times 10^7 + Ts^2(s^2 + 625s + 156\,250)} = 0 \tag{10-102}$$

Para una T dada, los contornos de las raíces de la ecuación (10-99) cuando a varía se obtienen con base en la configuración de polos y ceros de $G_{eq2}(s)$. Los polos de $G_{eq2}(s)$ son los de las raíces de la ecuación (10-100). Por tanto, los contornos de las raíces cuando a varía comienzan en ($a = 0$) en los contornos de las raíces para la variable T. La Fig. 10-35 muestra las porciones dominantes de los contornos de las raíces cuando a varía y $T = 0.01$, 0.0045, 0.001, 0.0005, 0.0001 y 0.00001. Observe que debido al hecho de que el sistema no compensado está ligeramente amortiguado, para que el controlador de adelanto de fase sea efectivo, el valor de T debe ser muy pequeño. Aun para valores pequeños de T, existe un intervalo pequeño de valores de a que pueden incrementar el amortiguamiento, pero la frecuencia natural del sistema se incrementa conforme a se incrementa. Los contornos de las raíces de la Fig. 10-35 muestran las ubicaciones aproximadas de las raíces dominantes de la ecuación característica cuando se presenta el amortiguamiento máximo. La tabla 10-14 proporciona las raíces de la ecuación característica y los atributos de las respuestas al escalón para los casos que correspondan al sobrepaso máximo cercano al más pequeño para la T seleccionada. La Fig. 10-36 muestra la respuesta al escalón unitario cuando $a = 500$ y $T = 0.00001$. Aunque el sobrepaso máximo es sólo de 3.8%, el sobrepaso negativo en este caso es mayor que el sobrepaso positivo.

Diseño en el dominio de la frecuencia

Las trazas de Bode de $G_p(s)$ de la ecuación (10-97) se muestran en la Fig. 10-37. Los atributos de desempeño del sistema no compensado son:

$$\text{MF} = 29.74°$$
$$M_r = 2.156$$
$$\text{BW} = 426.5 \text{ rad/s}$$

Se quiere mostrar que el procedimiento de diseño en el dominio de la frecuencia descrito anteriormente no funciona en forma efectiva en este caso ya que la curva de fase de $G_p(j\omega)$ mostrada en la Fig. 10-37

Figura 10-35 Contornos de las raíces del sistema rastreador solar del ejemplo 10-7 con el control de adelanto de fase.

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$

tiene una pendiente muy inclinada cerca del cruce de ganancia. Por ejemplo, si se desea obtener un margen de fase de 65°, se necesita al menos 65 – 29.74 = 35.26° de adelanto de fase, o $\phi_m = 35.26°$. Al emplear la ecuación (10-72), el valor de a se calcula como:

$$a = \frac{1 + \operatorname{sen}\phi_m}{1 - \operatorname{sen}\phi_m} = \frac{1 + \operatorname{sen}35.26°}{1 - \operatorname{sen}35.26°} = 3.732 \tag{10-103}$$

Se escoge $a = 4$. En teoría, para maximizar el empleo de ϕ_m, ω_m debe estar ubicada en la nueva frecuencia de cruce de ganancia, la cual está localizada en la frecuencia en donde la magnitud de $G_p(j\omega)$ es

Tabla 10-14 Raíces de la ecuación característica y atributos de la respuesta en tiempo del sistema con el control de adelanto de fase del ejemplo 10-7

T	a	Raíces de la ecuación característica				Sobrepaso máximo (%)	t_r (s)	t_s (s)
0.001	4	−189.6,	−1181.6,	−126.9	± j439.5	21.7	0.0037	0.0184
0.0005	9	−164.6,	−2114.2,	−173.1	± j489.3	13.2	0.00345	0.0162
0.0001	50	−147,	−10 024,	−227	± j517	5.4	0.00348	0.0150
0.00005	100	−147,	−20 012,	−233	± j515	4.5	0.00353	0.0150
0.00001	500	−146.3,	-10^5,	−238	± j513.55	3.8	0.00357	0.0146

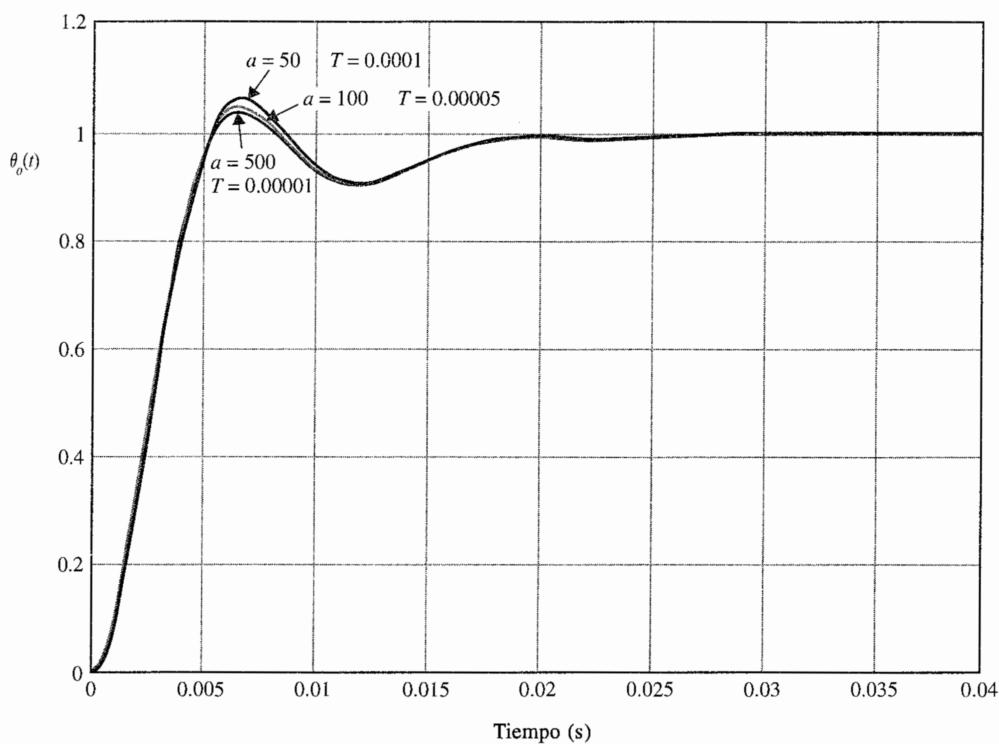


Figura 10-36 Respuestas al escalón unitario del sistema rastreador solar del ejemplo 10-7 con el controlador de adelanto de fase.

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$

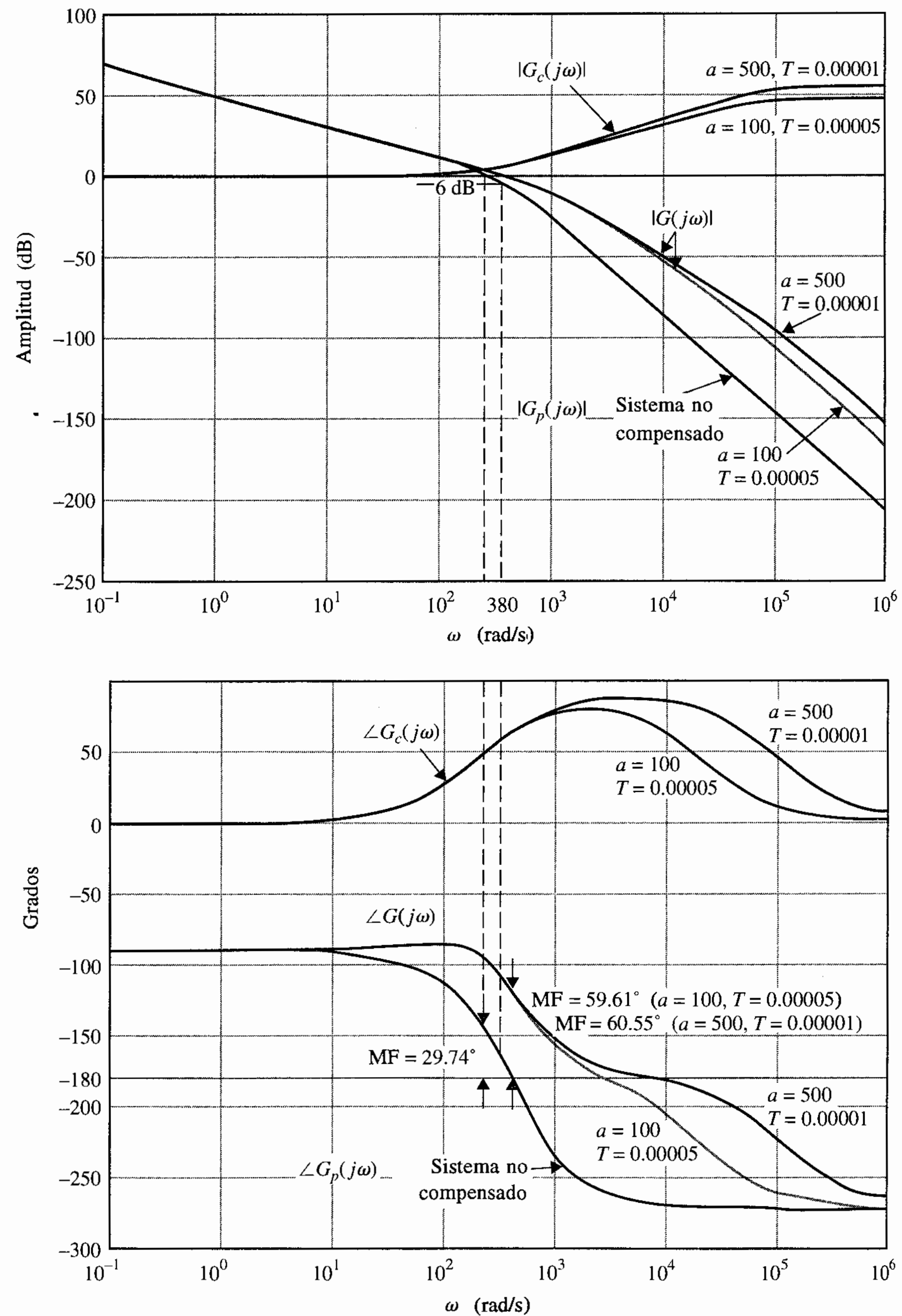


Figura 10-37 Trazas de Bode del controlador de adelanto de fase y de las funciones de transferencia de la trayectoria directa del sistema rastreador solar del ejemplo 10-7 con el control de adelanto de fase.

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$

$-10 \log_{10} a \text{dB} = -10 \log_{10} 4 = -6$ dB. De las trazas de Bode de la Fig. 10-37 esta frecuencia se encuentra ser de 380 rad/s. Por tanto, se considera que ω_m = 380 rad/s. El valor de T se encuentra mediante la ecuación (10-67):

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}} = \frac{1}{380\sqrt{4}} = 0.0013 \qquad (10\text{-}104)$$

Sin embargo, al verificar la respuesta en frecuencia del sistema compensado de adelanto de fase con $a = 4$ y $T = 0.0013$, se encuentra que el margen de fase solamente se mejora a 38.27° y $M_r = 1.69$. La razón se debe a la pendiente negativa de la curva de fase de $G_p(j\omega)$. El hecho es que en la nueva frecuencia de cruce de ganancia de 380 rad/s, la fase de $G_p(j\omega)$ es −170°, en contra de −150.26° en el cruce de ganacia original; ¡una caída de 20°!. Del diseño en el dominio del tiempo, la primera línea en la tabla 10-14 muestra que cuando $a = 4$ y $T = 0.001$, el sobrepaso máximo es 21.7 por ciento.

Al verificar la respuesta en frecuencia del sistema compensado en adelanto de fase con $a \doteq 500$ y $T = 0.00001$, se obtienen los siguientes datos de desempeño:

$$\text{MF} = 60.55° \qquad M_r = 1 \qquad \text{BW} = 664.2 \text{ rad/s}$$

Esto muestra que el valor de a tiene que ser incrementado en forma sustancial para contrarrestar la caída pronunciada de la característica de fase cuando el cruce de ganancia se mueve hacia adelante.

La Fig. 10-37 muestra los diagramas de Bode del controlador de adelanto de fase y de las funciones de transferencia de la trayectoria directa del sistema compensado con $a = 100$, $T = 0.0005$ y $a = 500$, $T = 0.00001$. Un resumen de los datos de desempeño se proporciona en la tabla 10-15.

Al seleccionar $a = 100$ y $T = 0.00005$, el controlador de adelanto de fase se describe mediante la función de transferencia:

$$G_c(s) = \frac{1}{a}\frac{1 + aTs}{1 + Ts} = \frac{1}{100}\frac{1 + 0.005s}{1 + 0.00005s} \qquad (10\text{-}105)$$

Al emplear las ecuaciones (10-63) y (10-64) y haciendo C = 0.01 μF, los parámetros del controlador de adelanto de fase se encuentran como:

$$R_2 = \frac{T}{C} = \frac{5 \times 10^{-5}}{10^{-8}} = 5000\ \Omega \qquad (10\text{-}106)$$

$$R_1 = aR_2 = 500\,000\ \Omega \qquad (10\text{-}107)$$

Tabla 10-15 Atributos del sistema con el controlador de adelanto de fase del ejemplo 10-7

T	a	MF (grados)	MG (dB)	M_r	BW (rad/s)	Sobrepaso máximo (%)	t_r (s)	t_s (s)
1	1	29.74	6.39	2.16	430.4	43	0.00478	0.0459
0.00005	100	59.61	31.41	1.009	670.6	4.5	0.00353	0.015
0.00001	500	60.55	45.21	1.000	664.2	3.8	0.00357	0.0146

La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema compensado es:

$$\frac{\Theta_o(s)}{A(s)} = \frac{4.6875 \times 10^7(1 + 0.005s)}{s(s^2 + 625s + 156\,250)(1 + 0.00005s)} \tag{10-108}$$

en donde la ganancia del amplificador K ha sido puesta a 100, para satisfacer el requisito de error en estado estable.

De los resultados de los dos últimos ejemplos ilustrativos, se pueden resumir los efectos y limitaciones del controlador de adelanto de fase de una sola etapa como sigue. ▲

10-5-3 Efectos de la compensación de adelanto de fase

1. El controlador de adelanto de fase añade un cero y un polo, con el cero a la derecha del polo, a la función de transferencia de la trayectoria directa. El efecto general es añadir más amortiguamiento al sistema en lazo cerrado. En general, los tiempos de levantamiento y asentamiento se reducen.
2. La fase de la función de transferencia de la trayectoria directa en la vecindad de la frecuencia de cruce de ganancia se incrementa. Esto mejora el margen de fase del sistema en lazo cerrado.
3. La pendiente de la curva de magnitud de las trazas de Bode de la función de transferencia de la trayectoria directa se reduce en la frecuencia de cruce de ganancia. Esto normalmente corresponde a una mejora de la estabilidad relativa del sistema en la forma de mejores márgenes de fase y magnitud.
4. El ancho de banda del sistema en lazo cerrado se incrementa. Esto corresponde a un tiempo de respuesta más rápido.
5. El error en estado estable del sistema no es afectado.

10-5-4 Limitaciones del control de adelanto de fase de una sola etapa

En general, el control de adelanto de fase no es adecuado para todos los sistemas. Las aplicaciones exitosas de la compensación de adelanto de fase de una etapa para mejorar la estabilidad de un sistema de control depende de las siguientes condiciones:

1. Consideraciones de ancho de banda: Si el sistema original es inestable o tiene un margen de estabilidad bajo, el adelanto de fase adicional requerido para obtener un cierto margen de fase deseado puede ser excesivo. Esto puede requerir un valor relativamente grande de a para el controlador, el cual, como resultado, incrementará el ancho de banda del sistema compensado y la transmisión de ruido de alta fre-

cuencia que se introduce al sistema por la entrada puede ser objetable. Sin embargo, si el ruido que se introduce al sistema cerca de la salida, el incremento en el ancho de banda puede beneficiar al rechazo de ruido. El ancho de banda grande también tiene la ventaja de robustez (es decir, el sistema es insensible a las variaciones de parámetros y al rechazo a ruido como se describió antes).

2. Si el sistema original es inestable o tiene un margen de estabilidad bajo, la curva de fase de las trazas de Bode de la función de transferencia de la trayectoria directa tiene una pendiente negativa cerca de la frecuencia de cruce de ganancia. Bajo esta condición, el controlador de adelanto de fase de una etapa puede no ser efectivo debido a que el adelanto de fase adicional en la nueva frecuencia de cruce de ganancia se suma a un ángulo de fase más pequeño que el de la frecuencia de cruce de ganancia anterior. El margen de fase deseado se puede obtener solamente al emplear un valor muy grande de a para el controlador. La ganancia del amplificador K se debe ajustar para compensar a, por lo que un valor grande de a requiere un amplificador de alta ganancia, el cual puede ser costoso.

   Como se muestra en el ejemplo 10-7, el sistema compensado puede tener mayor sobrepaso negativo que positivo. A menudo, una parte de la curva de fase puede estar por debajo del eje de 180°, provocando un **sistema condicionalmente estable,** aun cuando se satisface el margen de fase deseado.

3. El máximo adelanto de fase disponible de un controlador de adelanto de fase de una etapa es menor que 90°. Por tanto, si se requiere un adelanto de fase de más de 90°, se debe emplear un controlador de etapas múltiples.

10-5-5 Controlador de adelanto de fase de etapas múltiples

Cuando el diseño con un controlador de adelanto de fase requiere una fase adicional de más de 90°, se debe emplear un controlador de etapas múltiples. La Fig. 10-38 muestra un circuito con amplificadores operacionales de un controlador de adelanto de fase de dos etapas. La

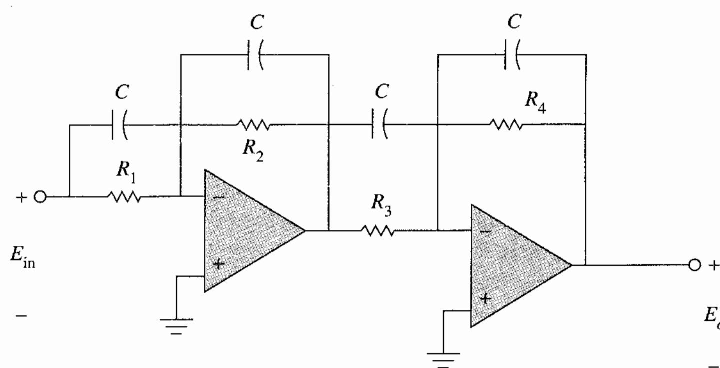


Figura 10-38 Controlador de adelanto de fase (atraso de fase) de dos etapas.

función de transferencia entrada-salida del circuito es:

$$G_c(s) = \frac{E_o(s)}{E_{in}(s)} = \left(\frac{s + 1/R_1C}{s + 1/R_2C}\right)\left(\frac{s + 1/R_3C}{s + 1/R_4C}\right)$$
$$= \frac{R_2R_4}{R_1R_3}\left(\frac{1 + R_1Cs}{1 + R_2Cs}\right)\left(\frac{1 + R_3Cs}{1 + R_4Cs}\right) \qquad (10\text{-}109)$$

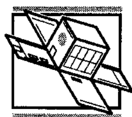
o:

$$G_c(s) = \frac{1}{a_1a_2}\left(\frac{1 + a_1T_1s}{1 + T_1s}\right)\left(\frac{1 + a_2T_2s}{1 + T_2s}\right) \qquad (10\text{-}110)$$

en donde $a_1 = R_1/R_2$, $a_2 = R_3/R_4$, $T_1 = R_2C$ y $T_2 = R_4C$.

El diseño de un controlador de adelanto de fase de etapas múltiples en el dominio del tiempo se vuelve muy engorroso ya que hay más polos y ceros a colocar. El método de los contornos de las raíces también se vuelve poco atractivo ya que hay más parámetros variables. El diseño en el dominio de la frecuencia en este caso representa una mejor elección del método de diseño. Por ejemplo, para un controlador de dos etapas, se pueden escoger los parámetros de la primera etapa para satisfacer el requisito de margen de fase, y entonces la segunda etapa cubrirá los requisitos restantes. En general, no existe una razón de por qué las dos etapas no son idénticas. El programa **freqcad** de **ACSP** tiene una función para seleccionar controladores de etapas múltiples. El siguiente ejemplo ilustra el diseño de un sistema con un controlador de adelanto de fase de dos etapas.

Ejemplo 10-8



Para el sistema rastreador solar descrito en el ejemplo 10-7, se alteran los requisitos de los tiempos de levantamiento y de asentamiento como:

Tiempo de levantamiento $t_r \leq 0.001$ s.
Tiempo de asentamiento $t_s \leq 0.005$ s.

Los otros requisitos no se alteran. Una forma de satisfacer los requisitos de los tiempos de levantamiento y asentamiento rápidos es incrementar la ganancia de la función de transferencia de la trayectoria directa. Se considera que la función de transferencia de la trayectoria directa es:

$$G_p(s) = \frac{\Theta_o(s)}{A(s)} = \frac{156\,250\,000}{s(s^2 + 625s + 156\,250)} \qquad (10\text{-}111)$$

Otra forma de interpretar el cambio en la ganancia de la trayectoria directa es que la constante de error a rampa se incrementa a 1000 (hasta 300 en el ejemplo 10-6). Las trazas de Bode de $G_p(s)$ se muestran en la Fig. 10-39. El sistema en lazo cerrado es inestable, con un margen de fase de −15.43°.

Para satisfacer el requisito de estabilidad relativa especificada, se considera un margen de fase de 80°. Aparentemente, este margen de fase no se puede alcanzar con un controlador de adelanto de fase de una etapa. Parece ser que un controlador de dos etapas sería adecuado. Si el programa **freqcad** de **ACSP** está disponible, el procedimiento de diseño podría simplificarse al introducir la función de transferencia de $G_p(s)$ de la ecuación (10-111) en el programa, seleccionar la opción del controlador

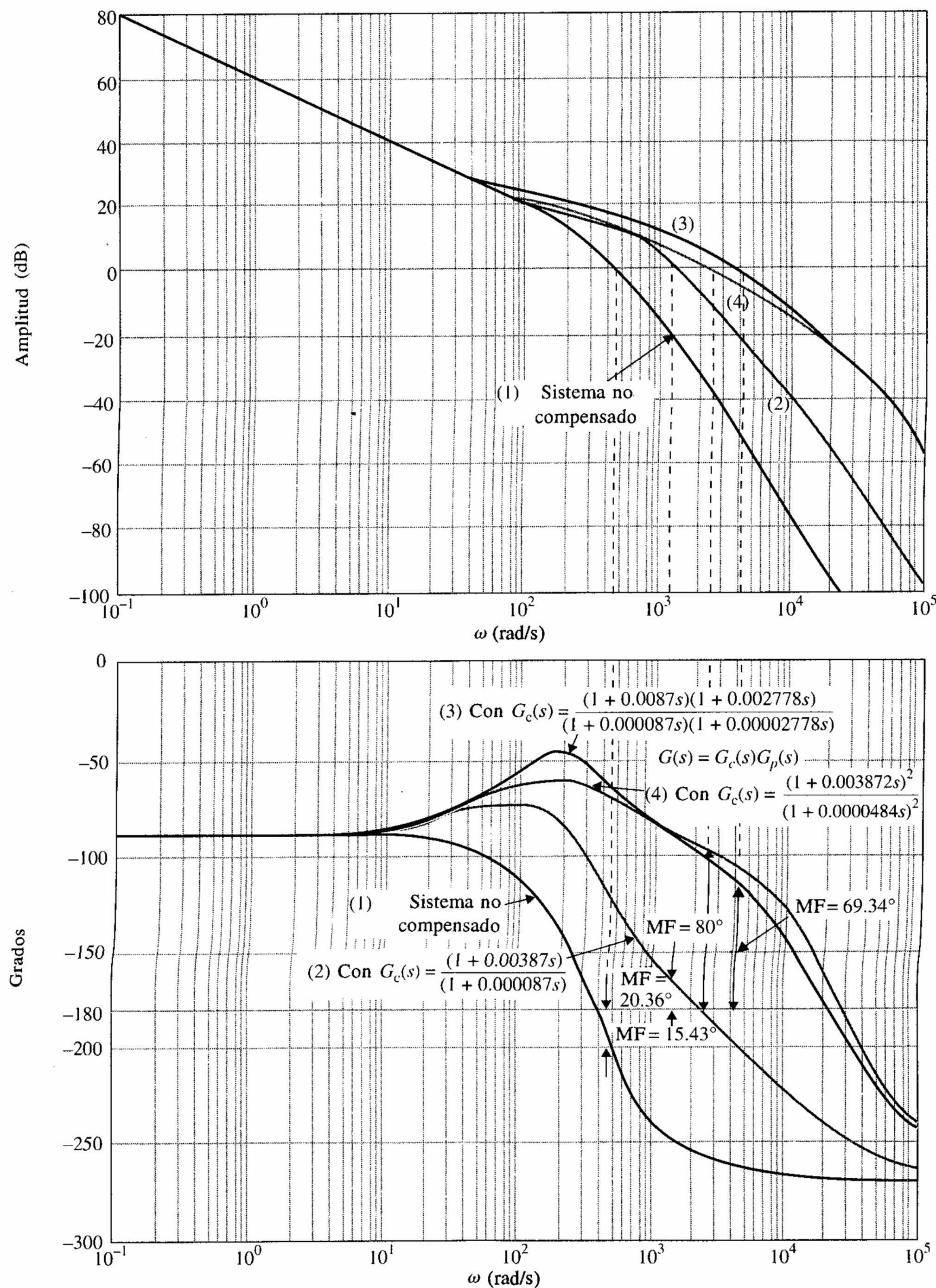


Figura 10-39 Trazas de Bode del sistema rastreador solar compensado y no compensado del ejemplo 10-7 con el controlador de adelanto de fase de dos etapas.

$$G_p(s) = \frac{156\,250\,000}{s(s^2 + 625s + 156\,250)}$$

de adelanto de fase de dos etapas y ajustar el margen de fase deseado a 80°. El programa regresa los parámetros de un controlador de dos etapas idénticas como:

$$a_1 = a_2 = 80 \qquad T_1 = T_2 = 0.0000484$$

Sin el programa **freqcad,** se tiene que pasar por un procedimiento de prueba y error para llegar a un controlador satisfactorio. Como se observa, puesto que se tiene un controlador de dos etapas a nuestra disposición, el diseño tiene una gran flexibilidad. En un intento de ser objetivos, se ignoran los resultados dados por el programa **freqcad** y se ajusta $a_1 = 100$ para la primera etapa del controlador de adelanto de fase. El adelanto de fase proporcionado por el controlador se obtiene de la ecuación (10-71):

$$\phi_m = \text{sen}^{-1}\left(\frac{a_1 - 1}{a_1 + 1}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{99}{101}\right) = 78.58° \tag{10-112}$$

El efecto máximo de ϕ_m, la nueva frecuencia de cruce de ganancia debe ser:

$$-10 \log_{10} a_1 = -10 \log_{10} 100 = -20 \text{ dB} \tag{10-113}$$

De la Fig. 10-39 la frecuencia que corresponde a esta ganancia sobre la curva de amplitud es aproximadamente de 1150 rad/s. Al sustituir $\omega_{m1} = 1150$ rad/s. y $a_1 = 100$ en la ecuación (10-67), se obtiene:

$$T_1 = \frac{1}{\omega_{m1}\sqrt{a_1}} = \frac{1}{1150\sqrt{100}} = 0.000087 \tag{10-114}$$

La función de transferencia de la trayectoria directa con el controlador de adelanto de fase de una etapa es:

$$G(s) = \frac{156\,250\,000(1 + 0.0087s)}{s(s^2 + 625s + 156\,250)(1 + 0.000087s)} \tag{10-115}$$

Las trazas de Bode de la última ecuación se dibuja como se muestra en la Fig. 10-39. Se observa que el margen de fase del diseño interino es sólo de 20.36°. A continuación, se ajusta en forma arbitraria el valor de a_2 de la segunda etapa a 100. De las trazas de Bode de la función de transferencia de la ecuación (10-115) de la Fig. 10-39, se encuentra que la frecuencia a la cual la magnitud de $G(j\omega)$ es –20 dB es de aproximadamente 3600 rad/s. Por tanto:

$$T_2 = \frac{1}{\omega_{m2}\sqrt{a_2}} = \frac{1}{3600\sqrt{100}} = 0.00002778 \tag{10-116}$$

La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema rastreador solar con el controlador de adelanto de fase de dos etapas es:

$$G(s) = \frac{156\,250\,000(1 + 0.0087s)(1 + 0.002778s)}{s(s^2 + 625s + 156\,250)(1 + 0.000087s)(1 + 0.00002778s)} \tag{10-117}$$

La Fig. 10-39 muestra las trazas de Bode del sistema rastreador solar con el controlador de adelanto de fase de dos etapas diseñado anteriormente y aquel obtenido con el programa **freqcad,** $a_1 = a_2 = 80$ y $T_1 = T_2 = 0.0000484$. Como se observa de la Fig. 10-39, el margen de fase del sistema con $G(s)$ de la ecuación (10-117) es solamente de 69.34°. Sin embargo, el sistema satisface las especificaciones en el dominio del tiempo.

Tabla 10-16 Atributos del sistema rastreador solar del ejemplo 10-8 con el controlador de adelanto de fase de dos etapas

$a_1 = a_2$	T_1	T_2	MF (grados)	M_r	BW (rad/s)	Sobrepaso máximo (%)	t_r (s)	t_s (s)
80	0.0000484	0.0000484	80	1	5686	0	0.00095	0.00475
100	0.000087	0.0000278	69.34	1	5686	0	0.000597	0.00404
70	0.0001117	0.000039	66.13	1	5198	0	0.00063	0.00404

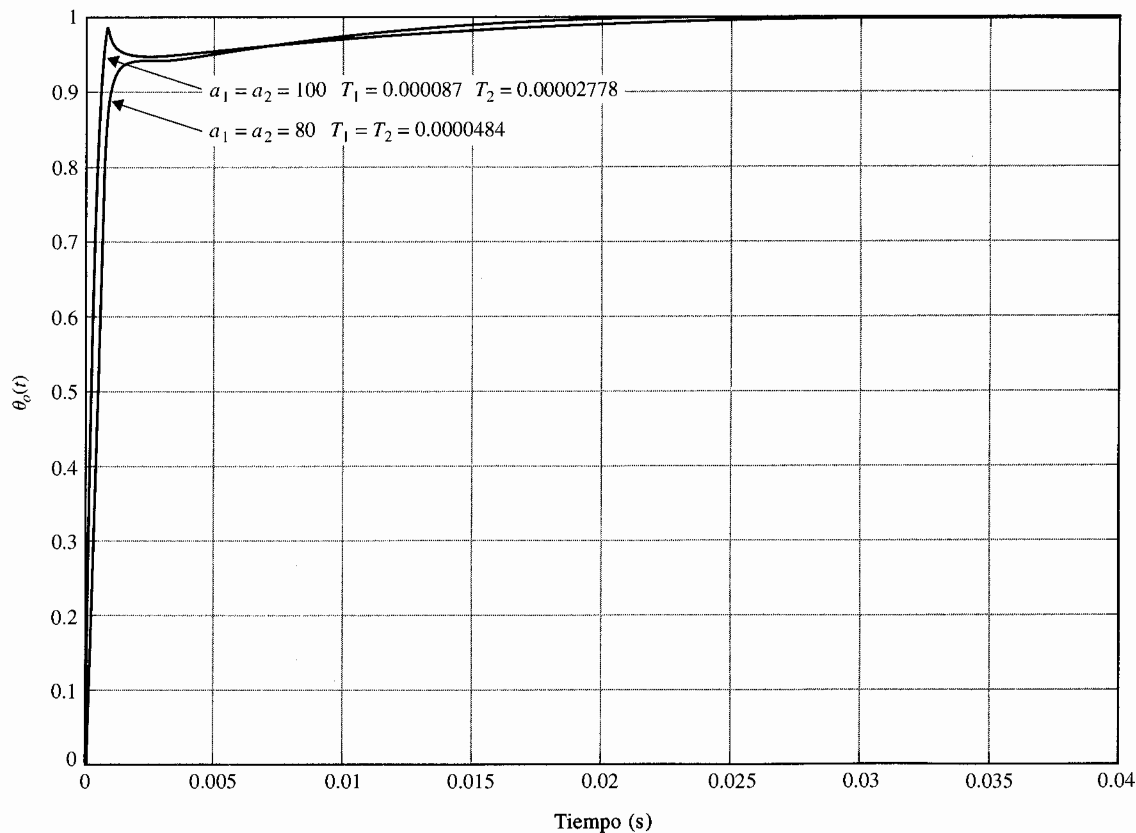


Figura 10-40 Respuestas al escalón unitario del sistema rastreador solar del ejemplo 10-7 con un controlador de adelanto de fase de dos etapas.

$$G_c(s) = \frac{1 + a_1 T_1 s}{1 + T_1 s}\frac{1 + a_2 T_2 s}{1 + T_s s} \qquad G_p(s) = \frac{156\,250\,000}{s(s^2 + 625s + 156\,250)}.$$

Por tanto, el margen de fase estimado de 80° fue demasiado exigente. Para mostrar que el diseño no es crítico, se puede seleccionar $a_1 = a_2 = 70$. Al seguir pasos de diseño similares a los anteriores, se llega a $T_1 = 0.0001117$ y $T_2 = 0.000039$. El margen de fase final es solamente de 66.13°, pero los requisitos en el dominio del tiempo todavía se satisfacen. La tabla 10-16 resume todos los atributos de desempeño del sistema con estos tres controladores. Las respuestas al escalón unitario del sistema con el controlador de adelanto de fase de dos etapas para $a_1 = a_2 = 80$ y 100 se muestran en la Fig. 10-40. ▲

10-5-6 Consideraciones sobre la sensibilidad

De la función de sensibilidad definida en la Sec. 9-23, la ecuación (9-181) se puede emplear como una especificación de diseño para indicar la robustez del sistema. En la ecuación (9-181), la sensibilidad de la función de transferencia en lazo cerrado con respecto a las variaciones de la función de transferencia de la trayectoria directa se define como:

$$S_G^M(s) = \frac{\partial M(s)/M(s)}{\partial G(s)/G(s)} = \frac{G^{-1}(s)}{1 + G^{-1}(s)} = \frac{1}{1 + G(s)} \tag{10-118}$$

Las trazas de $|S_G^M(j\omega)|$ contra la frecuencia dan una indicación sobre la sensibilidad del sistema como una función de la frecuencia. La situación robusta ideal es que $|S_G^M(j\omega)|$ adopte un valor pequeño (<<1) en un intervalo amplio de frecuencias. Como un ejemplo, la función de sensibilidad del sistema rastreador solar diseñado en el ejemplo 10-7 con un controlador de adelanto de fase de una etapa con $a = 100$ y $T = 0.00005$ se dibuja como se muestra en la Fig. 10-41. Observe que la función de sensibilidad es baja en frecuencias bajas y es menor que la unidad para $\omega < 400$ rad/s. Aunque el sistema rastreador solar del ejemplo 10-7 no necesita un controlador de adelanto de fase de etapas múltiples, se mostrará que si se emplea un controlador de adelanto de fase de dos etapas, no sólo el valor de a se reducirá sustancialmente, lo que resulta en ganancias bajas para los amplificadores operacionales, sino que el sistema será más robusto. Al seguir el procedimiento de diseño descrito en el ejemplo 10-8, se diseña un controlador de adelanto de fase de dos etapas para el sistema rastreador solar con la función de transferencia del proceso descrita por la ecuación (10-97). Los parámetros del controlador son: $a_1 = a_2 = 5.83$ y $T_1 = T_2 = 0.000673$. La función de

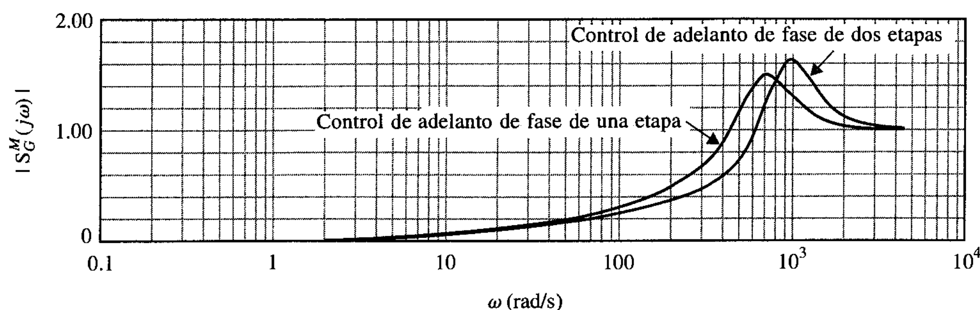


Figura 10-41 Funciones de sensibilidad del sistema rastreador solar del ejemplo 10-7.

▲ Los sistemas con control de adelanto de fase generalmente serán más robustos debido al incremento en el ancho de banda.

transferencia de la trayectoria directa del sistema compensado es:

$$G(s) = \frac{4.6875 \times 10^7(1 + 0.0039236s)^2}{s(s^2 + 625s + 156\,250)(1 + 0.000673s)^2} \qquad (10\text{-}119)$$

La Fig. 10-41 muestra que la función de sensibilidad del sistema con el controlador de adelanto de fase de dos etapas es menor que la unidad para $\omega < 600$ rad/s. Por tanto, el sistema con el controlador de adelanto de dos etapas es más robusto que el sistema con el controlador de una etapa. La razón de esto es que el sistema más robusto tiene un ancho de banda mayor. En general, los sistemas con un control de adelanto de fase serán más robustos debido al mayor ancho de banda. Sin embargo, la Fig. 10-41 muestra que el sistema con el controlador de adelanto de fase de dos etapas tiene una mayor sensibilidad en altas frecuencias.

10-6 Diseño con el controlador de atraso de fase

La función de transferencia de la ecuación (10-62) representa un controlador de atraso de fase o filtro paso bajas cuando $a < 1$. La función de transferencia se repite como sigue:

$$G_c(s) = \frac{1}{a}\left(\frac{1 + aTs}{1 + Ts}\right) \qquad a < 1 \qquad (10\text{-}120)$$

10-6-1 Interpretación y diseño en el dominio del tiempo del controlador de atraso de fase

La configuración de polos y ceros de $G_c(s)$ se muestra en la Fig. 10-42. Contrario al controlador PI, el cual provee un polo en $s = 0$, el controlador de atraso de fase afecta el error en estado estable solamente en el sentido de que la ganancia en frecuencia cero de $G_c(s)$ es mayor que la unidad.

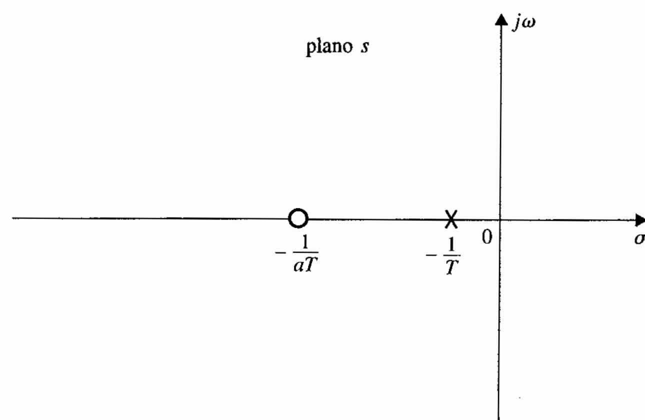


Figura 10-42 Configuración de polos y ceros del controlador de atraso de fase.

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \qquad a < 1$$

Por tanto, cualquier constante de error que sea finita y no cero será incrementada por el factor $1/a$ del controlador de atraso de fase.

Ya que el polo en $s = -1/T$ está a la derecha del cero en $-1/aT$, el empleo efectivo del controlador de atraso de fase para mejorar el amortiguamiento podría tener que seguir el mismo principio de diseño del control PI presentado en la Sec. 10-3. Por tanto, *la forma adecuada de aplicar el control de atraso de fase es colocar el polo y el cero muy cercanos. Para sistemas de tipo* 0 *y de tipo* 1 *la combinación debe estar ubicada cercana al origen en el plano s.* La Fig. 10-43 ilustra las estrategias de diseño en el plano s para sistemas tipo 0 y tipo 1. El control de atraso de fase no se debe aplicar a un sistema tipo 2.

El procedimiento de diseño descrito anteriormente se puede explicar al considerar que el proceso controlado de un sistema de control de tipo 0 es:

$$G_p(s) = \frac{K}{(s + p_1)(s + \overline{p}_1)(s + p_3)} \qquad (10\text{-}121)$$

en donde p_1 y $\overline{p}_1$ son polos complejos conjugados, tal como la situación mostrada en la Fig. 10-43.

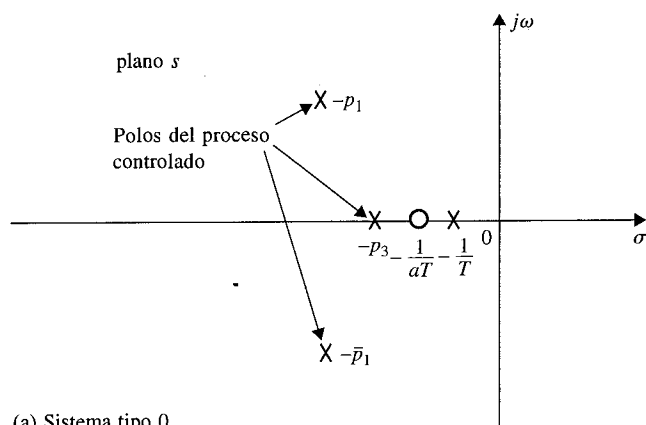
Al igual que en el caso del controlador de adelanto de fase, se puede omitir el factor de ganancia $1/a$ de la ecuación (10-120) ya que cualquiera que sea el valor de a, el valor de K puede ajustarse para compensar. Al aplicar el controlador de atraso de fase de la ecuación (10-120), sin el factor $1/a$, al sistema, la función de transferencia de la trayectoria directa se convierte en:

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{K(1 + aTs)}{(s + p_1)(s + \overline{p}_1)(s + p_3)(1 + Ts)} \qquad a < 1 \qquad (10\text{-}122)$$

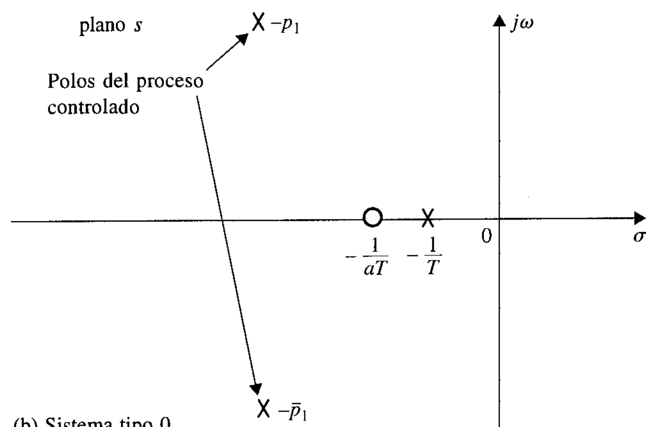
Se supone que el valor de K está ajustado para satisfacer el requisito de error en estado estable. También se supone que con el valor seleccionado de K, el sistema tiene bajo amortiguamiento o es inestable. Ahora considere que $1/T \cong 1/aT$ y se coloca el par polo-cero cerca del polo en $-1/p_3$, como se muestra en la Fig. 10-43. La Fig. 10-44 muestra el lugar geométrico de las raíces del sistema con y sin el controlador de atraso de fase. Ya que la combinación polo-cero del controlador está muy cerca del polo en $-p_3$, la forma del lugar geométrico de las raíces dominantes sin y con el controlador de atraso de fase será muy similar. Esto se explica fácilmente al escribir la ecuación (10-22) como:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Ka(s + 1/aT)}{(s + p_1)(s + \overline{p}_1)(s + p_3)(s + 1/T)} \\ &\cong \frac{Ka}{(s + p_1)(s + \overline{p}_1)(s + p_3)} \end{aligned} \qquad (10\text{-}123)$$

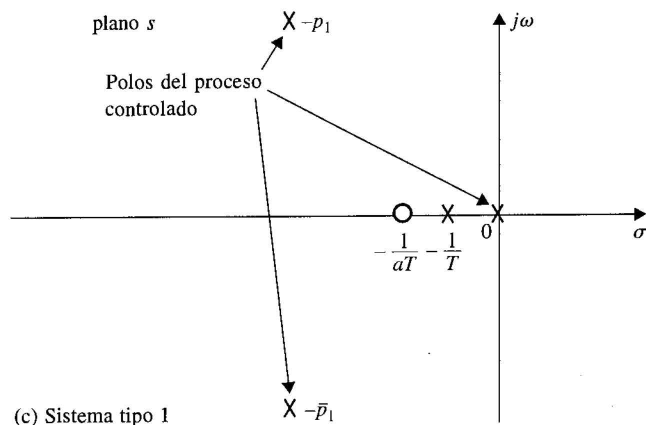
Ya que a es menor que 1, la aplicación del control de atraso de fase es equivalente a reducir la ganancia de la trayectoria directa de K a Ka, *mientras no se afecta el desempeño del sistema en estado estable*. La Fig. 10-44 muestra que el valor de a se puede escoger para que el amortiguamiento del sistema compensado sea satisfactorio. Aparentemente, la cantidad de amortiguamiento que se puede añadir está limitado si los polos $-p_1$ y $-\overline{p}_1$ están muy cerca del eje imaginario.



(a) Sistema tipo 0



(b) Sistema tipo 0



(c) Sistema tipo 1

Figura 10-43 Estrategias de diseño para el control de atraso de fase para sistemas de tipo 0 y de tipo 1.

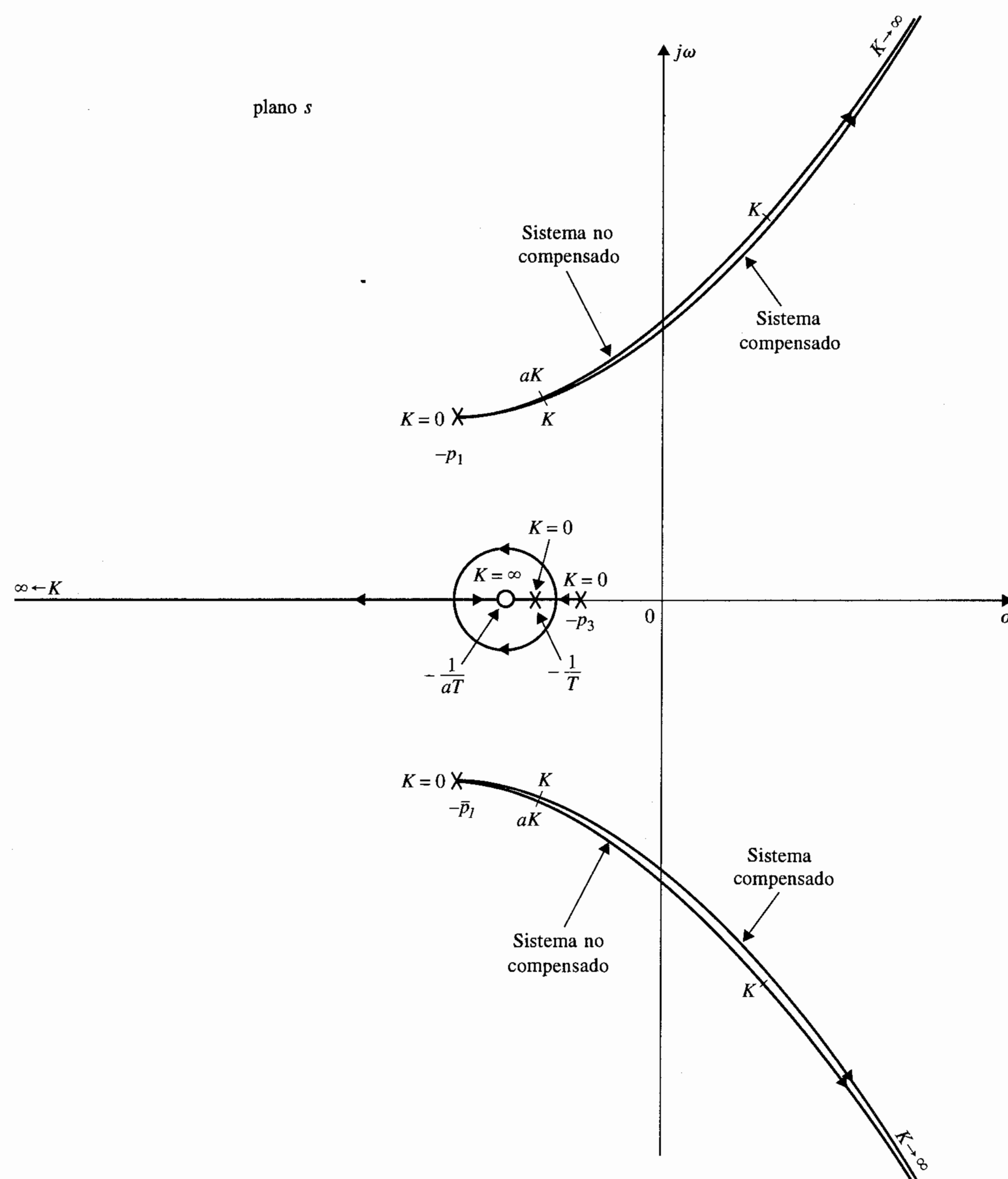


Figura 10-44 Lugar geométrico de las raíces del sistema no compensado y compensado con atraso de fase.

Fig
$G_c($

▲ El control de atraso de fase generalmente incrementará el tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamiento.

Por tanto, se puede seleccionar a con la siguiente ecuación:

$$a = \frac{K \text{ para obtener el amortiguamiento deseado}}{K \text{ para obtener el desempeño en estado estable}} \qquad (10\text{-}124)$$

El valor de T se debe escoger para que el polo y el cero del controlador estén muy cerca, y cerca de $-p_3$. En el dominio del tiempo, el controlador de atraso de fase generalmente tiene el efecto de incrementar los tiempos de levantamiento y de asentamiento.

10-6-2 Interpretación y diseño en el dominio de la frecuencia del control de atraso de fase

La función de transferencia del controlador de atraso de fase se puede escribir otra vez como:

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \qquad a < 1 \qquad (10\text{-}125)$$

al suponer que el factor de ganancia, $1/a$ es absorbido por la ganancia directa K. Las trazas de Bode de la ecuación (10-125) se muestra en la Fig. 10-45. La curva de magnitud tiene las

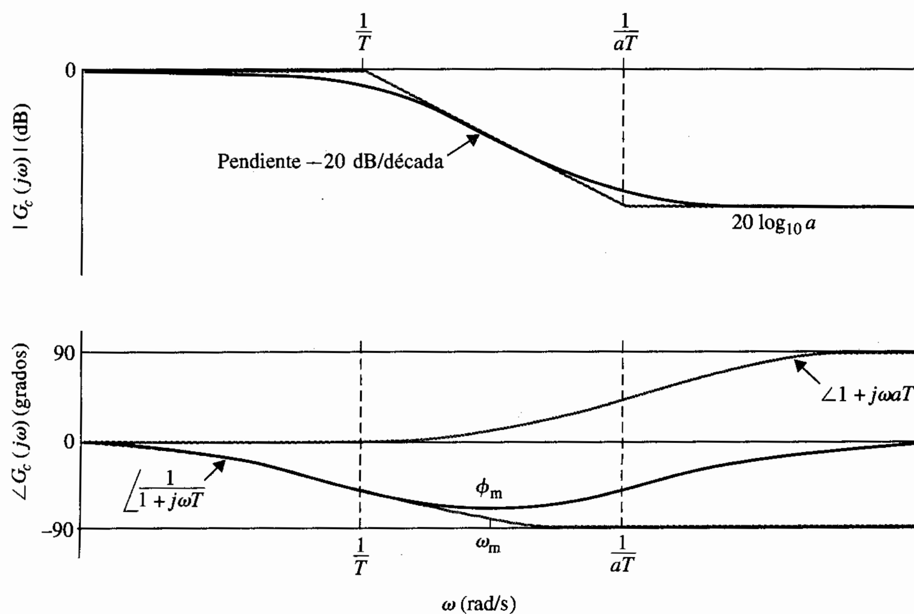


Figura 10-45 Trazas de Bode del controlador de atraso de fase, $G_c(s) = (1 + aTs)/(1 + Ts)$; $a < 1$.

▲ El objetivo del controlador de atraso de fase en el dominio de la frecuencia es mover el cruce de ganancia a la frecuencia donde el margen de fase deseado se realice, manteniendo la curva de fase relativa sin cambio en la nueva ganancia de cruce.

frecuencias de corte en $\omega = 1/aT$ y $1/T$. Ya que las funciones de transferencia de los controladores de adelanto y de atraso de fase son idénticas, excepto por el valor de a, el atraso de fase máximo ϕ_m de la curva de fase de la Fig. 10-45 está dado por:

$$\phi_m = \text{sen}^{-1}\left(\frac{a-1}{a+1}\right) \qquad a < 1 \qquad (10\text{-}126)$$

La Fig. 10-45 muestra que el controlador de atraso de fase en esencia provee una atenuación de $20 \log_{10} a$ en altas frecuencias. Por tanto, contrario al control de adelanto de fase que emplea el adelanto de fase máximo del controlador, *el control de atraso de fase emplea la atenuación del controlador en altas frecuencias*. Esto es paralelo a la situación de introducir una atenuación a en la ganancia de la trayectoria directa en el diseño del lugar de las raíces. Para el control de adelanto de fase, el objetivo del controlador es incrementar la fase del sistema en lazo abierto en la vecindad del cruce de ganancia mientras se intenta localizar el adelanto de fase máximo en la nueva frecuencia de cruce de ganancia. En el control de atraso de fase, el objetivo es mover el cruce de ganancia a una frecuencia más baja, en donde se alcanza el margen de fase deseado, mientras se mantiene la curva de fase de las trazas de Bode relativamente sin cambios en la nueva frecuencia de cruce de ganancia.

El procedimiento de diseño para el control de atraso de fase que emplea las trazas de Bode se describe a continuación:

1. Se dibujan las trazas de Bode de la función de transferencia de la trayectoria directa del sistema no compensado. La ganancia de la trayectoria directa K se ajusta de acuerdo con el requisito de desempeño en estado estable.
2. A partir de las trazas de Bode se determinan los márgenes de fase y ganancia.
3. Se localiza, sobre las trazas de Bode, la frecuencia en la que se obtiene el margen de fase deseado suponiendo que el margen de fase será incrementado. Esta frecuencia también es la nueva frecuencia de cruce de ganancia ω'_g, en donde la curva de magnitud compensada cruza al eje de 0 dB.
4. Para llevar a la curva de magnitud hacia abajo a 0 dB en la nueva frecuencia de cruce de ganancia ω'_g, el controlador de atraso de fase debe proveer la cantidad de atenuación igual al valor de la curva de magnitud en ω'_g. En otras palabras:

$$|G_p(j\omega'_g)| = -20 \log_{10} a \quad \text{dB} \qquad a < 1 \qquad (10\text{-}127)$$

Al resolver esta última ecuación para a, se obtiene:

$$a = 10^{-|G_p(j\omega'_g)|/20} \qquad a < 1 \qquad (10\text{-}128)$$

Una vez que se determina el valor de a, sólo es necesario seleccionar el valor adecuado de T para completar el diseño. De la característica de fase mostrada en la

Fig. 10-45, se observa que si la frecuencia de corte $1/aT$ está localizada lejos por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia ω'_g, el atraso de fase del controlador no afectará en forma apreciable la fase del sistema compensado cerca de la ω'_g. Por otro lado, el valor de $1/aT$ no debe ser muy pequeño debido a que el ancho de banda del sistema será muy bajo, causando que el sistema sea muy lento y menos robusto. Normalmente, como regla general, la frecuencia $1/aT$ debe estar una década abajo de ω'_g; esto es:

$$\frac{1}{aT} = \frac{\omega'_g}{10} \quad \text{rad/s} \qquad (10\text{-}129)$$

Entonces:

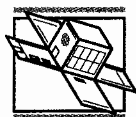
$$\frac{1}{T} = \frac{a\omega'_g}{10} \quad \text{rad/s} \qquad (10\text{-}130)$$

5. Se investigan las trazas de Bode del sistema compensado para ver si el requisito del margen de fase se cumple; si no, se reajustan los valores de a y T y se repite el procedimiento. Si las especificaciones de diseño involucran al margen de ganancia, o M_r o BW, éstas deben verificarse y satisfacerse.

Ya que el control de atraso de fase lleva más atenuación al sistema, si el diseño es adecuado, los márgenes de estabilidad serán mejorados, pero a expensas de un ancho de banda más bajo. El único beneficio de un ancho de banda bajo es el de reducir la sensibilidad al ruido de alta frecuencia y perturbaciones.

El siguiente ejemplo ilustra el diseño del controlador de atraso de fase y todas sus posibilidades.

Ejemplo 10-9



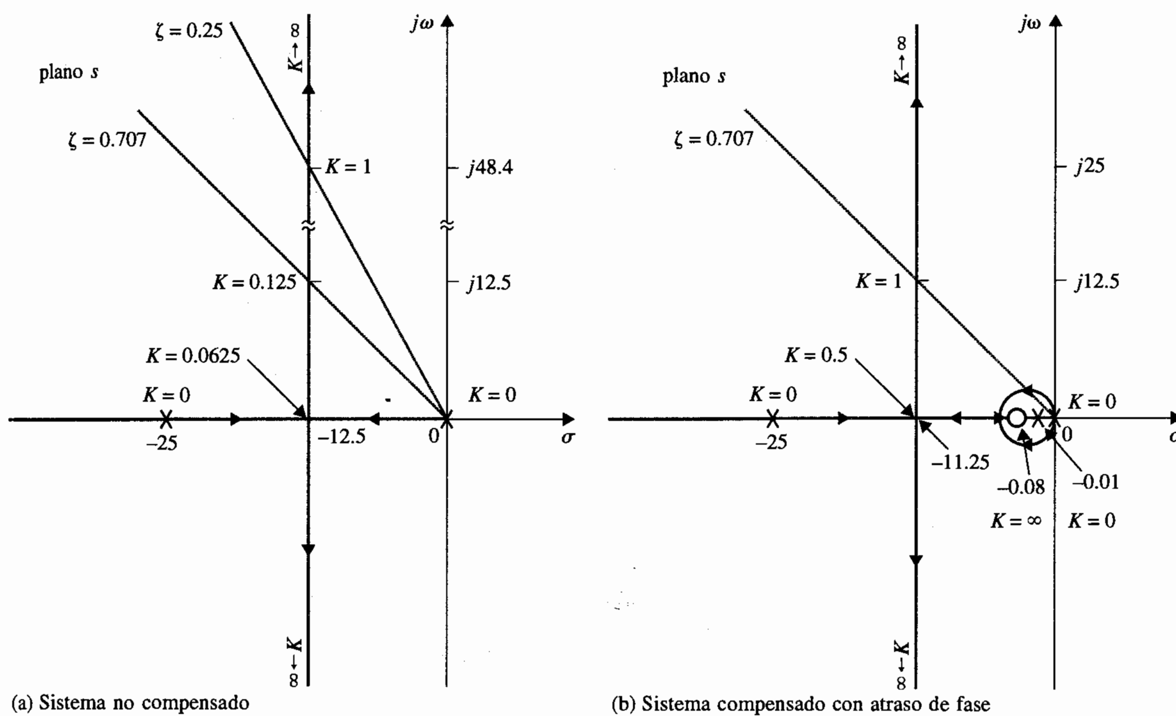
En este ejemplo se emplea el sistema de segundo orden rastreador solar descrito en el ejemplo 10-6 para ilustrar el principio de diseño del control de atraso de fase. La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema no compensado es:

$$G_p(s) = \frac{\Theta_o(s)}{A(s)} = \frac{2500K}{s(s+25)} \qquad (10\text{-}131)$$

Diseño en el dominio del tiempo

Las especificaciones del sistema en el dominio del tiempo son:

1. El error en estado estable de $\alpha(t)$ debido a una entrada función rampa unitaria para $\theta_r(t)$ debe ser ≤ 1 por ciento.
2. El sobrepaso máximo de la respuesta al escalón debe ser menor que el 5%, o tan pequeño como sea posible.



(a) Sistema no compensado

(b) Sistema compensado con atraso de fase

Figura 10-46 Lugar geométrico de las raíces del sistema rastreador solar del ejemplo 10-9.

$$G_p(s) = \frac{2500K}{s(s+25)} \qquad G_c(s) + \frac{1+aTs}{1+Ts} \qquad a = 0.125, \quad T = 100$$

3. Tiempo de levantamiento $t_r \leq 0.5$ s.
4. Tiempo de asentamiento $t_s \leq 0.5$ s.
5. Debido a problemas de ruido, el ancho de banda del sistema debe ser < 50 rad/s.

Observe que los requisitos de los tiempos de levantamiento y de asentamiento se han relajado en forma considerable del diseño de adelanto de fase del ejemplo 10-6. El lugar geométrico de las raíces del sistema no compensado se muestra en la Fig. 10-46(a).

Como en el ejemplo 10-6, se ajusta $K = 1$ en forma inicial. El factor de amortiguamiento relativo del sistema no compensado es 0.25 y el sobrepaso máximo es 44.4 por ciento. La Fig. 10-47 muestra la respuesta al escalón unitario del sistema con $K = 1$.

Se selecciona un controlador de atraso de fase con la función de transferencia dada en la ecuación (10-120). La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema compensado es:

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{2500K(s + 1/aT)}{s(s+25)(s+1/T)} \tag{10-132}$$

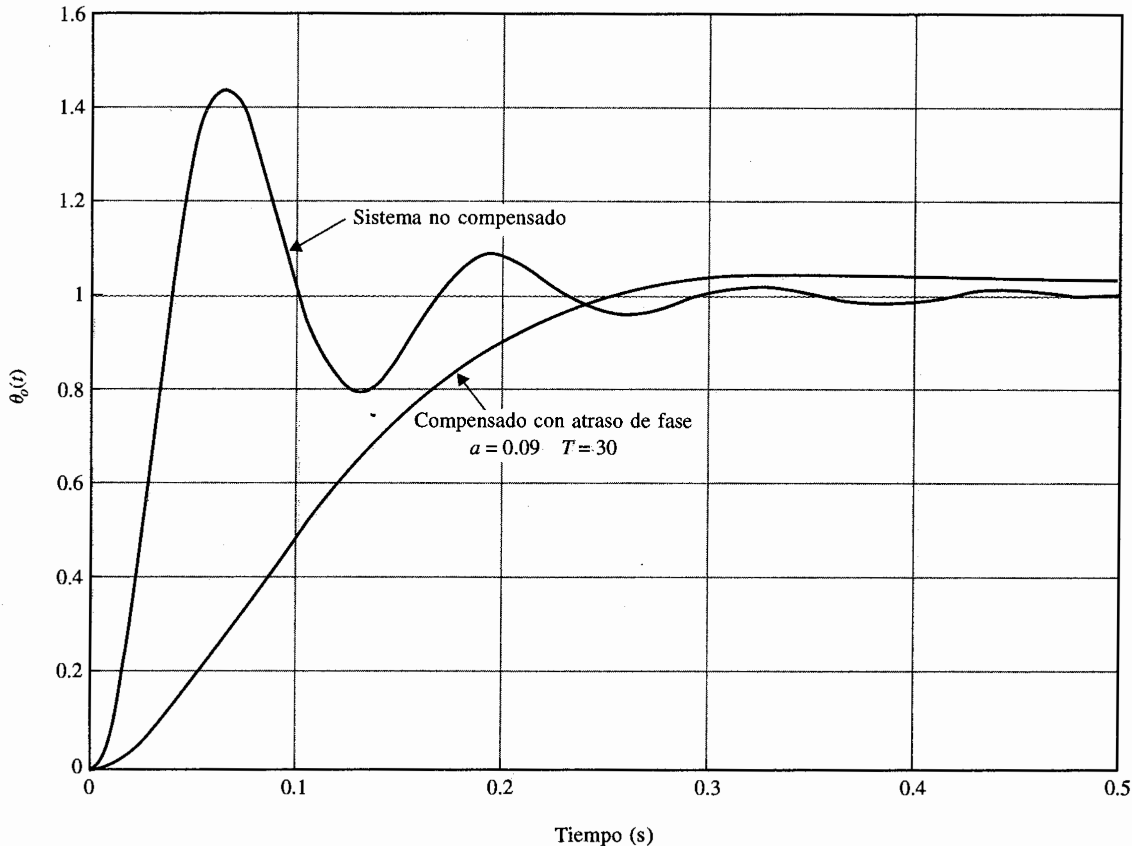


Figura 10-47 Respuestas al escalón unitario del sistema rastreador solar no compensado y compensado con el control de atraso de fase del ejemplo 10-9.

$$G_p(s) = \frac{2500}{s(s+25)} \qquad G_c(s) + \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \qquad a = 0.09, \quad T = 30$$

Si el valor de K es mantenido en 1, el error en estado estable será a en porciento, que es mejor que el del sistema no compensado ya que $a < 1$. *Para un control de atraso de fase efectivo, el polo y el cero del controlador de la función de transferencia deben estar localizados muy juntos y entonces, para un sistema tipo 1, la combinación deber estar ubicada relativamente cerca del origen del plano s.* Del lugar geométrico de las raíces del sistema no compensado de la Fig. 10-46(a), se observa que si K se ajusta a 0.125, el factor de amortiguamiento relativo sería 0.707 y el sobrepaso máximo del sistema sería 4.32 porciento. Al colocar el polo y el cero del controlador cerca de $s = 0$, la forma del lugar geométrico de las raíces dominantes del sistema compensado será muy similar a la del sistema no compensado. Se puede encontrar el valor de a al emplear la ecuación (10-124); esto es:

$$a = \frac{K \text{ para obtener el amortiguamiento deseado}}{K \text{ para obtener el desempeño en estado estable}} = \frac{0.125}{1} = 0.125 \qquad (10\text{-}133)$$

Por tanto si el valor de T es suficientemente grande cuando $K = 1$, las raíces dominantes de la ecuación característica corresponderán a un factor de amortiguamiento relativo de aproximadamente 0.707. Se escoge en forma arbitraria $T = 100$. El lugar geométrico de las raíces del sistema compensado se muestra en la Fig. 10-46(b). Las raíces de la ecuación característica cuando $K = 1$, $a = 0.125$ y $T = 100$ son:

$$s = -0.0805, \qquad -12.465 + j12.465 \quad \text{y} \quad -12.465 - j12.465$$

que corresponden a un factor de amortiguamiento relativo de exactamente 0.707. Si se hubiera escogido un valor más pequeño de T, el factor de amortiguamiento relativo sería ligeramente diferente de 0.707. Desde un punto de vista práctico, el valor de T no puede ser muy grande ya que de la ecuación (10-64), $T = R_2C$, y un valor grande de T correspondería a un capacitor grande o una resistencia muy grande. Para reducir el valor de T y al mismo tiempo satisfacer el requisito de sobrepaso máximo, a también se debe reducir. Sin embargo, a no se puede reducir en forma indefinida, o el cero del controlador en $-1/aT$ estaría muy lejos a la izquierda del eje real. La tabla 10-17 proporciona los atributos de desempeño en el dominio del tiempo del sistema rastreador solar compensado en atraso de fase con varias a y T. Las posibilidades de los diferentes parámetros de diseño se despliegan claramente. Por tanto, un conjunto adecuado de parámetros del controlador sería $a = 0.09$ y $T = 30$. Con $T = 30$, al seleccionar $C = 1\ \mu$F se requeriría que R_2 sea de 30 MΩ. Se puede obtener un valor más pequeño de T al emplear un controlador de atraso de fase de dos etapas. La respuesta al escalón unitario del sistema compensado con $a = 0.09$ y $T = 30$ se presenta en la Fig. 10-47. Observe que el sobrepaso máximo se reduce a expensas de los tiempos de levantamiento y de asentamiento. Aunque el tiempo de asentamiento del sistema compensado es más pequeño que el del sistema no compensado, realmente, toma más tiempo para el sistema compensado en atraso de fase alcanzar el estado estable.

Sería esclarecedor explicar el diseño del controlador de atraso de fase mediante los contornos de las raíces. El diseño mediante el contorno de las raíces realizado anteriormente en el ejemplo 10-6 que emplea las ecuaciones de la (10-80) a la (10-83) para el control de adelanto de fase y las Figs. 10-31 y 10-32, todavía es válido para el control de atraso de fase, excepto que en este caso, $a < 1$. Por tanto, en la Fig. 10-32 sólo las partes de los contornos de las raíces que correspondan a $a < 1$ son aplicables para el control de atraso de fase. Estos contornos de las raíces muestran claramente que para un control de atraso de fase efectivo, el valor de T debe ser relativamente grande. En la Fig. 10-48 se ilustra que los polos complejos de la función de transferencia en lazo cerrado están poco insensibles al valor de T cuando esta última es relativamente grande.

Tabla 10-17 Atributos de desempeño del sistema rastreador solar del ejemplo 10-9 con el control de atraso de fase

a	T	Sobrepaso máximo (%)	t_r (s)	t_s (s)	BW (rad/s)	Raíces de la ecuación característica
1.000	1	44.4	0.0255	0.2133	75.00	$-12.500 \pm j48.412$
0.125	100	4.9	0.1302	0.1515	17.67	$-0.0805, -12.465 \pm j12.465$
0.100	100	2.5	0.1517	0.2020	13.97	$-0.1009, -12.455 \pm j9.624$
0.100	50	3.4	0.1618	0.2020	14.06	$-0.2037, -12.408 \pm j9.565$
0.100	30	4.5	0.1594	0.1515	14.19	$-0.3439, -12.345 \pm j9.484$
0.100	20	5.9	0.1565	0.4040	14.33	$-0.5244, -12.263 \pm j9.382$
0.090	50	3.0	0.1746	0.2020	12.53	$-0.2274, -12.396 \pm j8.136$
0.090	30	4.4	0.1719	0.2020	12.68	$-0.3852, -12.324 \pm j8.029$
0.090	20	6.1	0.1686	0.5560	12.84	$-0.5901, -12.230 \pm j7.890$

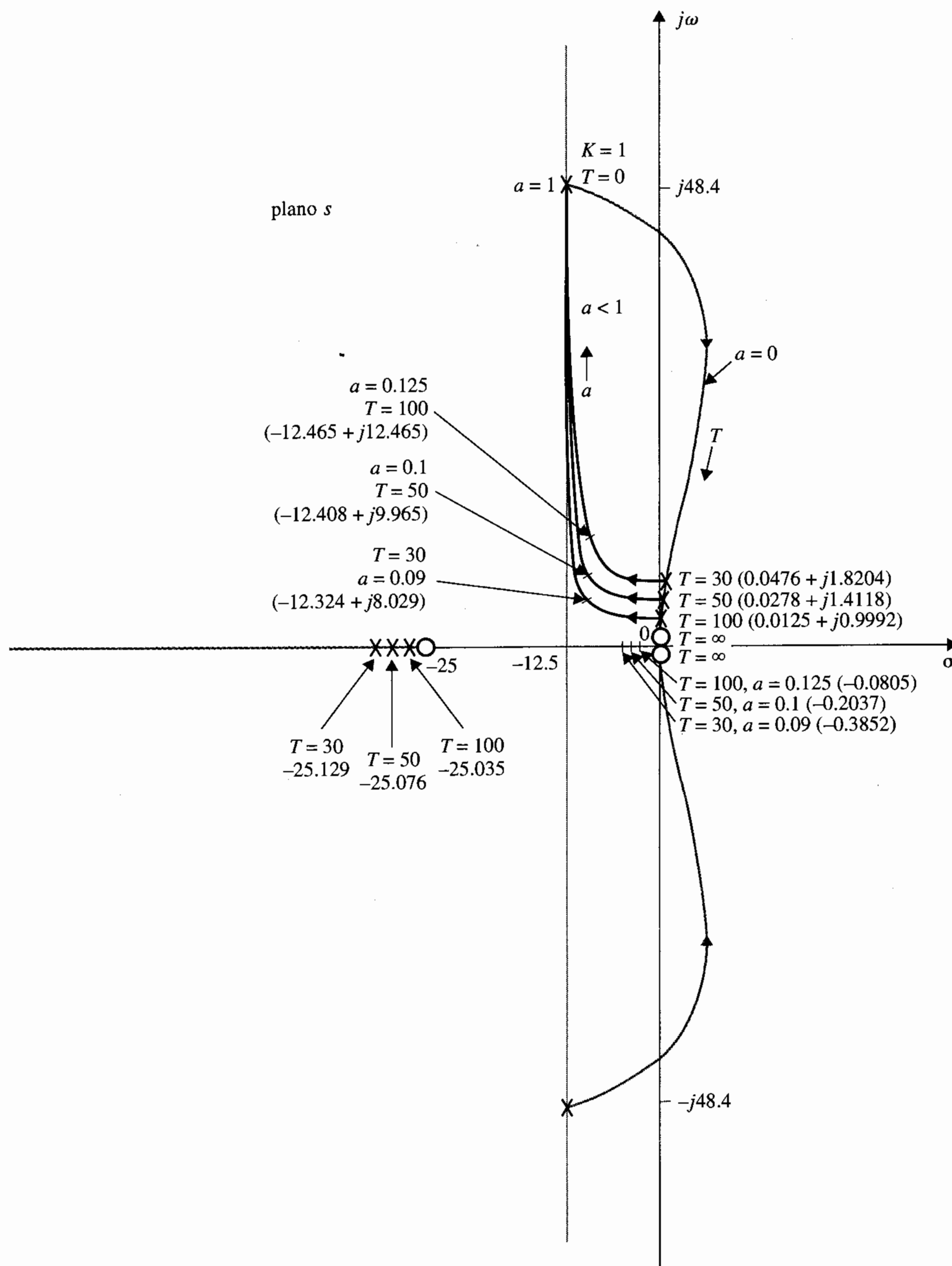


Figura 10-48 Contornos de las raíces del sistema rastreador solar del ejemplo 10-9 con el control de atraso de fase.

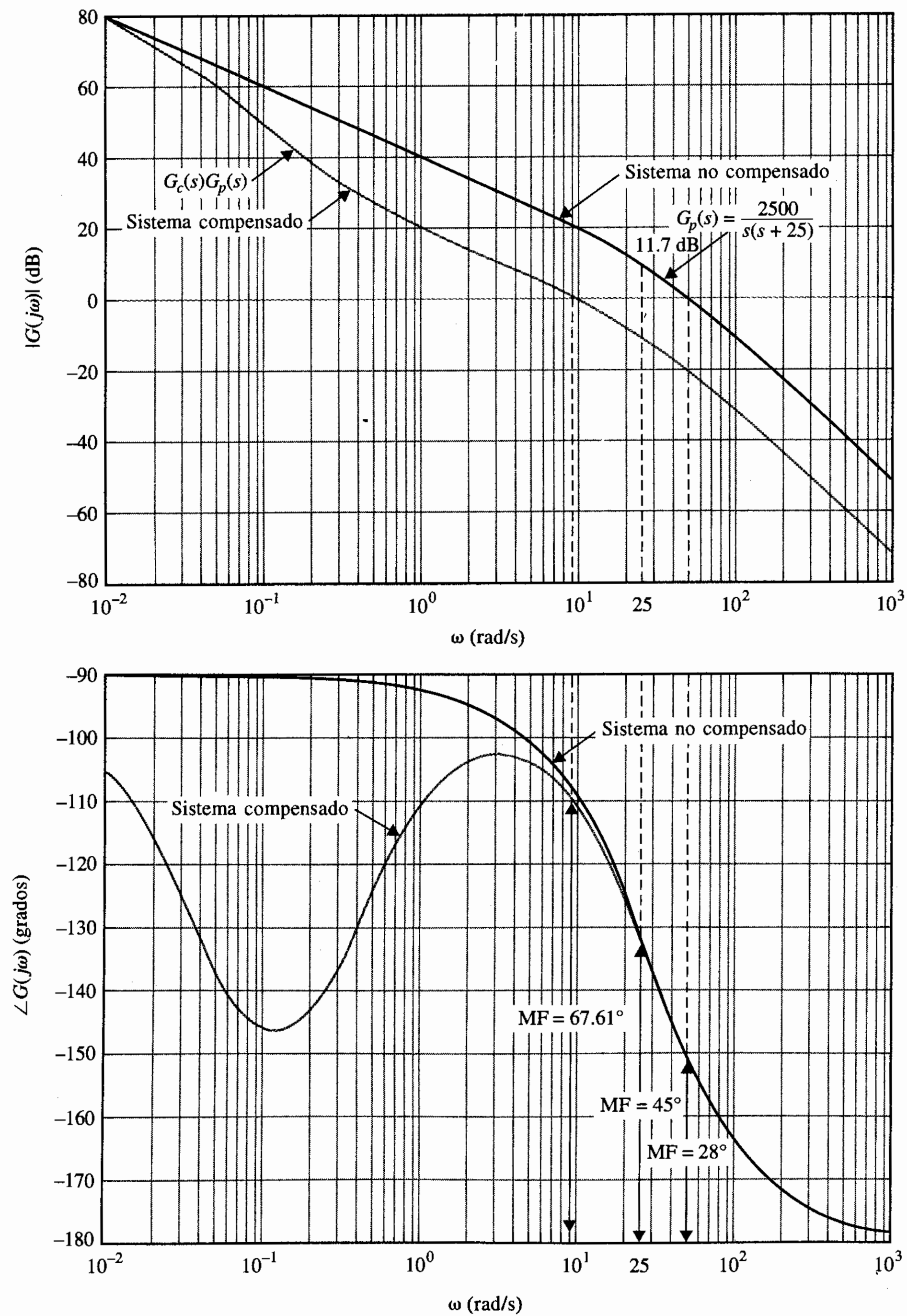


Figura 10-49 Trazas de Bode de los sistemas no compensado y compensado con el contro de atraso de fase del ejemplo 10-9.

$$G_c(s) = \frac{1+3s}{1+30s} \qquad G_p(s) = \frac{2500}{s(s+25)}$$

Diseño en el dominio de la frecuencia

Las trazas de Bode de $G_p(j\omega)$ de la ecuación (10-131) se muestran en la Fig. 10-49 para $K = 1$. Las trazas de Bode muestran que el margen de fase del sistema no compensado es sólo de 28°. Sin conocer qué margen de fase corresponde a un sobrepaso máximo menor que 5%, se realiza una serie de diseños mediante las trazas de Bode de la Fig. 10-49. Se comienza con un margen de fase de 45°, se observa que este margen de fase se puede obtener si la frecuencia de cruce de ganancia ω'_g está en 25 rad/s. Esto significa que el controlador de atraso de fase debe reducir la curva de magnitud de $G_p(j\omega)$ a 0 dB en $\omega = 25$ rad/s mientras no afecte en forma apreciable la curva de fase cercana a esta frecuencia. Ya que el controlador de atraso de fase contribuye con una fase negativa pequeña cuando la frecuencia de corte $1/aT$ es colocada a $\frac{1}{10}$ del valor de ω'_g, es una medida de seguridad escoger a ω'_g un poco más baja que 25 rad/s, por ejemplo, 20 rad/s.

De las trazas de Bode, el valor de $|G_p(j\omega'_g)|_{\text{dB}}$ en $\omega'_g = 20$ rad/s es 11.7 dB. Por tanto, al emplear la ecuación (10-128), se tiene:

$$a = 10^{-|G_p(j\omega'_g)|/20} = 10^{-11.7/20} = 0.26 \qquad (10\text{-}134)$$

El valor de $1/aT$ se escoge como 1/10 del valor de $\omega'_g = 20$ rad/s. Por tanto:

$$\frac{1}{aT} = \frac{\omega'_g}{10} = \frac{20}{10} = 2 \text{ rad/s} \qquad (10\text{-}135)$$

y:

$$T = \frac{1}{2a} = \frac{1}{0.52} = 1.923 \qquad (10\text{-}136)$$

Al verificar la respuesta al escalón unitario del sistema con el control de atraso de fase diseñado, se encuentra que el sobrepaso máximo es 24.5 porciento. El siguiente paso es tratar de alcanzar un margen de fase alto. La tabla 10-18 proporciona varios resultados de diseño al emplear diferentes valores de margen de fase deseados hasta 80°.

Al examinar los resultados de la tabla 10-18, se observa que ninguno de los casos satisface el requisito de sobrepaso máximo de ≤ 5 porciento. El caso de $a = 0.044$ y $T = 52.5$ da el mejor sobrepaso máximo, pero el valor de T es muy grande para ser práctico. Por tanto, se toma el caso de $a = 0.1$ y $T = 10$

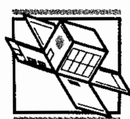
Tabla 10-18 Atributos de desempeño del sistema rastreador solar del ejemplo 10-9 con el control de atraso de fase

MF deseado (grados)	a	T	MF real (grados)	M_r	BW (rad/s)	Sobrepaso máximo (%)	t_r (s)	t_s (s)
45	0.26	1.923	46.78	1.27	33.37	24.5	0.0605	0.2222
60	0.178	3.75	54.0	1.19	25.07	17.5	0.0823	0.303
70	0.1	10	63.87	1.08	14.72	10.0	0.1369	0.7778
80	0.044	52.5	74.68	1.07	5.7	7.1	0.3635	1.933

y se refina el diseño mediante el incremento en el valor de T. Como se muestra en la tabla 10-17, cuando $a = 0.1$ y $T = 30$, el sobrepaso máximo se reduce a 4.5 porciento. Las trazas de Bode del sistema compensado se muestran en la Fig. 10-49. El margen de fase es 67.61°.

La respuesta al escalón unitario del sistema compensado en atraso de fase mostrado en la Fig. 10-47 señala una desventaja mayor del control de atraso de fase. Ya que el controlador de atraso de fase es en esencia un filtro paso bajas, los tiempos de levantamiento y de asentamiento del sistema compensado normalmente se incrementa. Sin embargo, se mostrará con el siguiente ejemplo que el control de atraso de fase puede ser más versátil y tiene un mayor nivel de efectividad en la mejora de la estabilidad que el controlador de adelanto de fase de una etapa, especialmente si el sistema tiene un amortiguamiento bajo o negativo. ▲

Ejemplo 10-10



Considere el sistema rastreador solar diseñado en el ejemplo 10-8, con la función de transferencia de la trayectoria directa dada en la ecuación (10-111). Se restablece el valor de K para que sea posible graficar el lugar geométrico de las raíces para el sistema. Entonces la ecuación (10-111) se escribe como:

$$G_p(s) = \frac{156\,250\,000K}{s(s^2 + 625s + 156\,250)} \qquad (10\text{-}137)$$

El lugar geométrico de las raíces del sistema en lazo cerrado se muestra en la Fig. 10-50. Cuando $K = 1$, el sistema es inestable y las raíces de la ecuación característica están en -713.14, $44.07 + j466.01$ y $44.07 - j466.01$.

El ejemplo 10-8 muestra que la especificación de desempeño sobre la estabilidad no se puede alcanzar con un controlador de adelanto de fase de una etapa. Se considera el criterio de desempeño siguiente:

Sobrepaso máximo ≤ 5porciento.
Tiempo de levantamiento $t_r \leq 0.02$ s.
Tiempo de asentamiento $t_s \leq 0.02$ s.

Se supone que el factor de amortiguamiento relativo deseado es 0.707. La Fig. 10.50 muestra que cuando $K = 0.10675$, las raíces dominantes de la ecuación característica del sistema no compensado están en $-172.77 \pm j172.73$, lo cual corresponde a un factor de amortiguamiento de 0.707. Por tanto, el valor de a se determina de la ecuación (10-124) como:

$$a = \frac{K \text{ para obtener el amortiguamiento deseado}}{K \text{ para obtener el desempeño en estado estable}} = \frac{0.10675}{1} = 0.10675 \qquad (10\text{-}138)$$

Tabla 10-19 Atributos de desempeño del sistema rastreador solar del ejemplo 10-10 con el control de atraso de fase

a	T	BW (rad/s)	MF (grados)	Sobrepaso máximo (%)	t_r (s)	t_s (s)
0.1	20	173.5	66.94	1.2	0.01273	0.01616
0.1	10	174	66.68	1.6	0.01262	0.01616
0.1	5	174.8	66.15	2.5	0.01241	0.01616
0.1	2	177.2	64.56	4.9	0.01601	0.0101

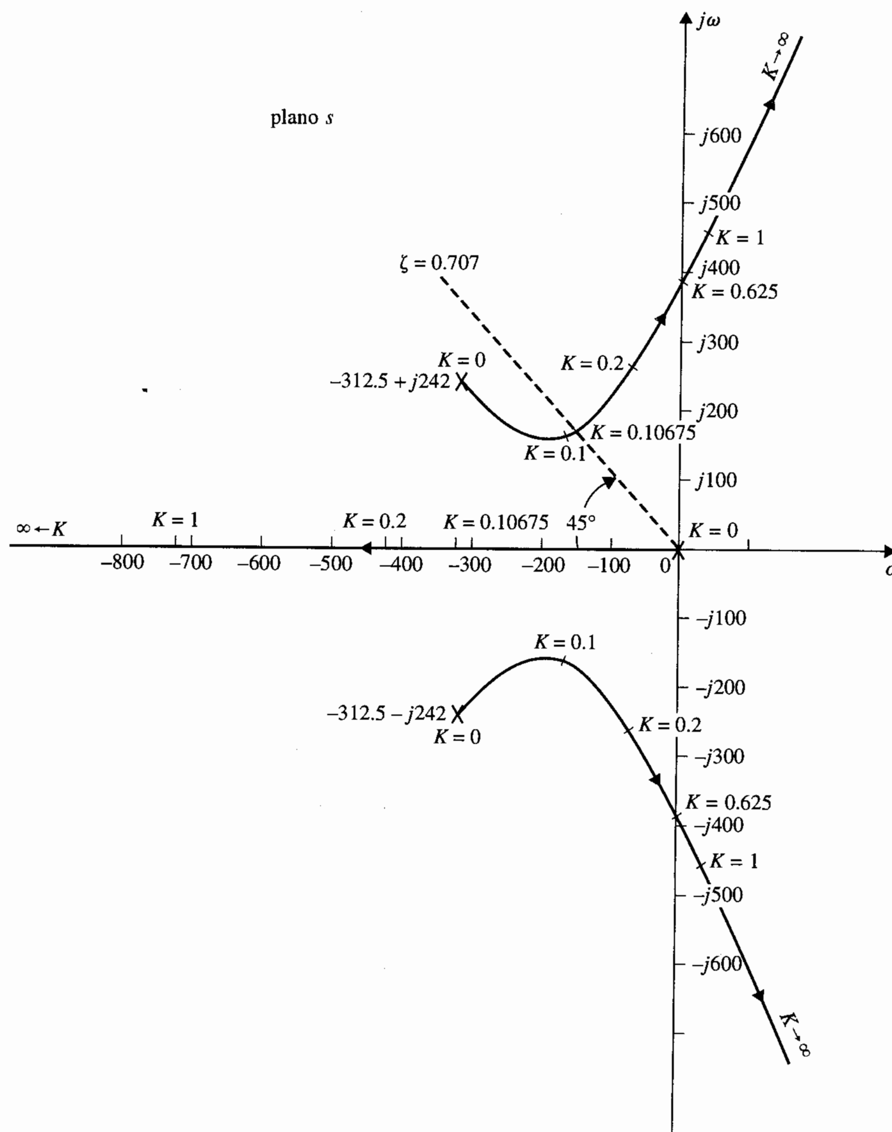


Figura 10-50 Lugar geométrico de las raíces del sistema no compensado del ejemplo 10-10.

$$G_p(s) = \frac{156\,250\,000K}{s(s^2 + 625s + 156{,}250)}$$

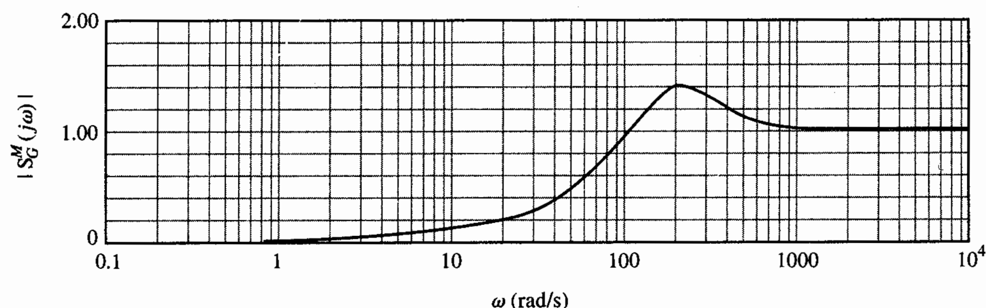


Figura. 10-51 Función de sensibilidad del sistema compensado con atraso de fase del ejemplo 10-10.

Considere que $a = 0.1$. Ya que la ubicación de las raíces dominantes está muy alejada del origen en el plano s, el valor de T tiene un intervalo grande de flexibilidad. La tabla 10-19 muestra los resultados de desempeño cuando $a = 0.1$ para varios valores de T.

Por tanto, la conclusión es que sólo la etapa del controlador de atraso de fase es necesaria para satisfacer el requisito de estabilidad, mientras que se necesitan dos etapas del controlador de adelanto de fase, como se mostró en el ejemplo 10-8.

Función de sensibilidad

La función de sensibilidad $|S_G^M(j\omega)|$ del sistema compensado en atraso de fase con $a = 0.1$ y $T = 20$ se muestra en la Fig. 10-51. Observe que la función de sensibilidad es menor que la unidad para frecuencias hasta 102 rad/s. Esto se debe al bajo ancho de banda del sistema como resultado del control de atraso de fase. ▲

10-6-3 Efectos y limitaciones del control de atraso de fase

De los resultados de los ejemplos ilustrativos anteriores, los efectos y limitaciones del control de atraso de fase sobre el desempeño de sistemas de control lineales se puede resumir como sigue:

1. Para una ganancia de la trayectoria directa dada K, la magnitud de la función de transferencia de la trayectoria directa es atenuada cerca y arriba de la frecuencia de cruce de ganancia, por tanto, permite mejorar la estabilidad relativa del sistema.
2. La frecuencia de cruce de ganancia se decrementa y por tanto, el ancho de banda se reduce.
3. Los tiempos de levantamiento y asentamiento del sistema son largos, ya que el ancho de banda se reduce.

1

Eje
10·

4. El sistema es más sensible a variaciones en los parámetros en el sentido de que la función de sensibilidad es mayor que la unidad para todas las frecuencias aproximadamente mayores que el ancho de banda del sistema.

10-7 Diseño con el controlador de adelanto-atraso

Se ha aprendido de las secciones anteriores que el control de adelanto de fase por lo general mejora el tiempo de levantamiento y el amortiguamiento pero reduce la frecuencia natural del sistema en lazo cerrado. Por otro lado, cuando se aplica en forma adecuada, el control de atraso de fase mejora el amortiguamiento pero por lo regular resulta en tiempos de levantamiento y asentamiento muy grandes. Por tanto, cada uno de estos esquemas de control tienen sus ventajas, desventajas y limitaciones y existen muchos sistemas que no pueden ser compensados satisfactoriamente por cualquiera de estos esquemas actuando solos. En consecuencia, es natural, cuando sea necesario, considerar emplear una combinación de los controladores de atraso y adelanto, por lo que se emplean las ventajas de ambos esquemas.

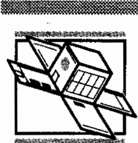
La función de transferencia de un controlador de adelanto-atraso (o atraso-adelanto) simple se puede escribir como:

$$G_c(s) = G_{c1}(s)G_{c2}(s) = \underbrace{\left(\frac{1 + a_1T_1s}{1 + T_1s}\right)}_{\text{adelanto}}\underbrace{\left(\frac{1 + a_2T_2s}{1 + T_2s}\right)}_{\text{atraso}} \qquad a_1 > 1, \quad a_2 < 1 \qquad (10\text{-}139)$$

Los factores de ganancias de los controladores de adelanto y atraso no están incluidas, ya que como se explicó, estas ganancias y atenuaciones se compensan por el ajuste de la ganancia directa K.

Ya que la función de transferencia del controlador de adelanto-atraso de la ecuación (10-139) tiene ahora cuatro parámetros desconocidos, su diseño no es directo como el controlador de adelanto de una etapa o el controlador de atraso de fase. *En general, la parte de adelanto de fase del controlador se emplea primero para propósitos de alcanzar un tiempo de levantamiento más pequeño y un ancho de banda más grande y la parte de atraso de fase se emplea para proveer un mejor amortiguamiento del sistema.* Cualquiera, ya sea el control de atraso de fase o el de adelanto de fase se puede diseñar primero. Se empleará el ejemplo siguiente para ilustrar los pasos de diseño.

Ejemplo 10-11



Como ejemplo ilustrativo del diseño del controlador de adelanto-atraso, se considera el sistema rastreador solar del ejemplo 10-8. El sistema compensado con $K = 1$ es inestable. Un controlador de adelanto de fase de dos etapas se diseñó en el ejemplo 10-9, y un controlador de atraso de fase de una etapa se diseño en el ejemplo 10-10.

Con base en el diseño del ejemplo 10-8, se selecciona primero el control de adelanto de fase con $a = 70$ y $T_1 = 0.00004$. El control de atraso de fase restante se puede diseñar mediante el método del lugar geométrico de las raíces o el método de las trazas de Bode. La tabla 10-20 da los resultados el hacer que $T_2 = 2$, que es un parámetro insensible, y varios valores de a. Los resultados en la tabla 10-20 muestran que el valor óptimo de a_2, desde el punto de vista del minimizar el sobrepaso máximo, para

Tabla 10-20 Atributos de desempeño del sistema rastreador solar del ejemplo 10-11 con el control de adelanto–atraso: $a_1 = 70$, $T_1 = 0.00004$

a_2	T_2	MF (grados)	M_r	BW (rad/s)	Sobrepaso máximo (%)	t_r (s)	t_s (s)
0.1	20	81.81	1.004	122.2	0.4	0.01843	0.02626
0.15	20	76.62	1.002	225.5	0.2	0.00985	0.01515
0.20	20	70.39	1.001	351.4	0.1	0.00668	0.00909
0.25	20	63.87	1.001	443.0	4.9	0.00530	0.00707

$a_1 = 70$ y $T_2 = 0.00004$, es de aproximadamente 0.2. Comparado con el controlador de atraso de fase de una etapa, diseñado en el ejemplo 10-9, el BW se incrementa de 66.94 rad/s a 351.4 rad/s y el tiempo de levantamiento se reduce de 0.01273 s a 0.00668 s. El sistema con el controlador de adelanto-atraso debe ser más robusto, ya que la magnitud de la función de sensibilidad no se debe incrementar a la unidad hasta cerca del BW de 351.4 rad/s. Como una comparación, se muestran, en la Fig. 10-52, las respuestas al escalón unitario del sistema con el control de atraso de fase de dos etapas, con el control de atraso de fase de una etapa y con el control de adelanto-atraso.

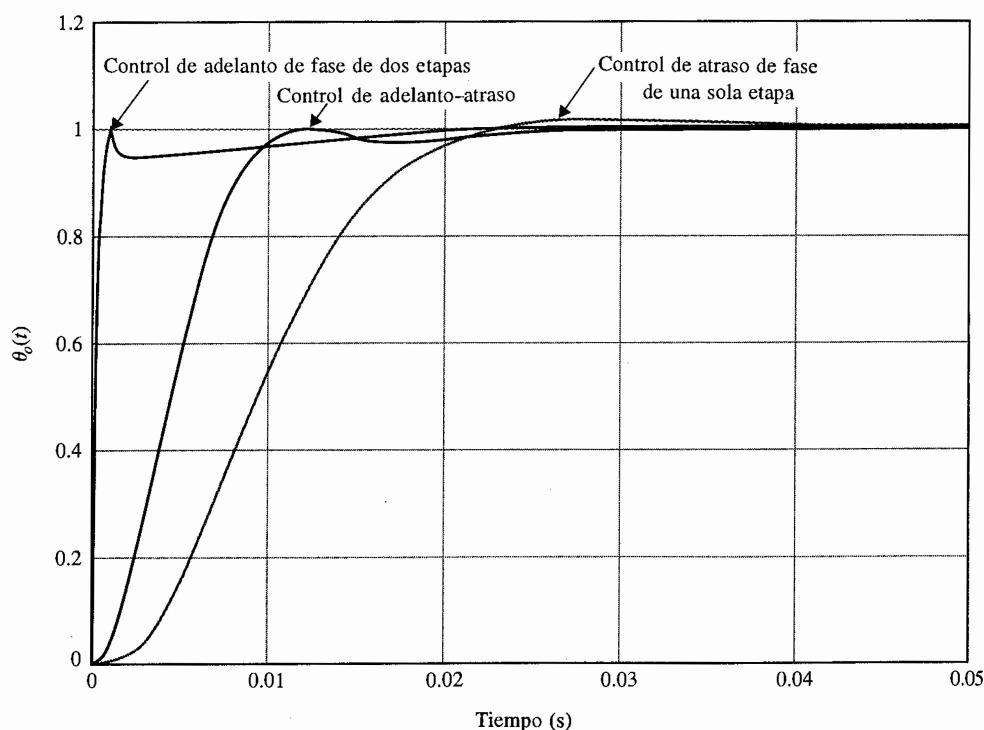


Figura 10-52 Sistema rastreador solar del ejemplo 10-11 con un control de atraso de fase de una sola etapa, con un controlador de adelanto-atraso y con un control de adelanto de fase de dos etapas.

Se debe notar que el ancho de banda y el tiempo de levantamiento del sistema rastreador solar se pueden incrementar o reducir posteriormente, respectivamente, mediante el empleo de un valor más grande de a_1 para la parte de adelanto de fase del controlador. ▲

10-8 Diseño mediante cancelación de polos y ceros: Filtro de muesca

Las funciones de transferencia de muchos procesos controlados contienen uno o más pares de polos complejos conjugados que están muy cerca del eje imaginario del plano s. Estos polos complejos por lo regular causan que el sistema en lazo cerrado sea ligeramente amortiguado o inestable. Un pensamiento inmediato es emplear un controlador que tenga una función de transferencia con ceros seleccionados para cancelar los polos no deseados del proceso controlado, y los polos del controlador son colocados en lugares más deseables del plano s para alcanzar el desempeño dinámico deseado. Por ejemplo, si la función de transferencia del proceso controlador es:

$$G_p(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 10)} \tag{10-140}$$

en la que los polos complejos conjugados pueden causar problemas de estabilidad en el sistema en lazo cerrado cuando el valor de K es muy grande, el controlador en serie sugerido puede ser de la forma:

$$G_c(s) = \frac{s^2 + s + 10}{s^2 + as + b} \tag{10-141}$$

Las constantes a y b se pueden seleccionar de acuerdo a las especificaciones de diseño del sistema en lazo cerrado.

Existen dificultades prácticas con el esquema de diseño de la cancelación de polos y ceros que se debe mencionar para prevenir que el método sea empleado en forma indiscriminada. El problema es que en la práctica, la cancelación *exacta* de polos y ceros de funciones de transferencia es casi imposible. Un hecho, es que la función de transferencia del proceso, $G_p(s)$, normalmente se determina a través de pruebas y modelado práctico; además es inevitable la linealización de procesos no lineales y la aproximación de procesos complejos. Por tanto, los polos y ceros "verdaderos" de la función de transferencia del proceso no se pueden modelar de forma exacta. De hecho, el verdadero orden del sistema puede ser más alto que el representado por la función de transferencia empleada para propósitos de modelado. Otra dificultad es que las propiedades dinámicas del proceso pueden variar, aun muy lentamente, debido al envejecimiento de los componentes del sistema o cambios en el ambiente de operación, por lo que los polos y ceros de la función de transferencia pueden moverse durante la operación del sistema. Los parámetros del controlador están limitados por los componentes físicos disponibles, y no pueden ser asignados en forma arbitraria. Por estas y otras razones, aun si se pudieran diseñar los polos y ceros de la función de transferencia del controlador en forma precisa, la cancelación de polos y ceros exacta es casi imposible en la práctica. A continuación se muestra que en la mayoría de los casos, la cancelación exacta en realidad *no* es necesaria para reducir en forma efectiva la influencia de los polos no deseables mediante el empleo de esquemas de compensación de cancelación de polos y ceros.

▲ En el mundo real, la cancelación exacta de polos y ceros casi nunca es posible.

Se supone que el proceso controlado está representado por:

$$G_p(s) = \frac{K}{s(s + p_1)(s + \bar{p}_1)} \tag{10-142}$$

donde p_1 y $\bar{p}_1$ son los dos polos complejos conjugados que serán cancelados. Considere la función de transferencia del controlador en serie:

$$G_c(s) = \frac{(s + p_1 + \varepsilon_1)(s + \bar{p}_1 + \bar{\varepsilon}_1)}{s^2 + as + b} \tag{10-143}$$

donde ε_1 es un número complejo cuya magnitud es muy pequeña y $\bar{\varepsilon}_1$ es su complejo conjugado. La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es:

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{K(s + p_1 + \varepsilon_1)(s + \bar{p}_1 + \bar{\varepsilon}_1)}{s(s + p_1)(s + \bar{p}_1)(s^2 + as + b)} \tag{10-144}$$

Debido a la cancelación inexacta, no se pueden descartar los términos $(s + p_1)(s + \bar{p}_1)$ en el denominador de la ecuación (10-144). La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s + p_1 + \varepsilon_1)(s + \bar{p}_1 + \bar{\varepsilon}_1)}{s(s + p_1)(s + \bar{p}_1)(s^2 + as + b) + K(s + p_1 + \varepsilon_1)(s + \bar{p}_1 + \bar{\varepsilon}_1)} \tag{10-145}$$

El diagrama del lugar geométrico de las raíces de la Fig. 10-53 explica el efecto de la cancelación inexacta de polos y ceros. Observe que los dos polos en lazo cerrado como resultado de la cancelación inexacta caen entre los pares de polos y ceros en $s = -p_1, -\bar{p}_1$ y $-p_1, -\varepsilon_1, -\bar{p}_1, -\bar{\varepsilon}_1$, respectivamente. Por tanto, estos polos en lazo cerrado están muy cerca de los polos y ceros en lazo abierto que se intenta cancelar. La ecuación (10-145) se puede aproximar como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} \cong \frac{K(s + p_1 + \varepsilon_1)(s + \bar{p}_1 + \bar{\varepsilon}_2)}{(s + p_1 + \delta_1)(s + \bar{p}_1 + \bar{\delta}_1)(s^3 + as^2 + bs + K)} \tag{10-146}$$

donde δ_1 y $\bar{\varepsilon}_1$ son números complejos conjugados muy pequeños que dependen de ε_1, $\bar{\varepsilon}_1$, y todos los otros parámetros. La expansión en fracciones parciales de la ecuación (10-146) es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} \cong \frac{K_1}{s + p_1 + \delta_1} + \frac{K_2}{s + \bar{p}_1 + \bar{\delta}_1} + \text{términos debidos a los polos restantes} \tag{10-147}$$

Se puede mostrar que K_1 es proporcional a $\varepsilon_1 - \delta_1$ que es un número muy pequeño. En forma similar K_2 es también muy pequeño. *Este ejercicio muestra simplemente que los polos en $-p_1$ y $-\bar{p}_1$ no pueden ser cancelados en forma precisa, los términos de respuesta transitoria resultantes debido a la cancelación inexacta tendrán amplitudes insignificantes, por lo que los*

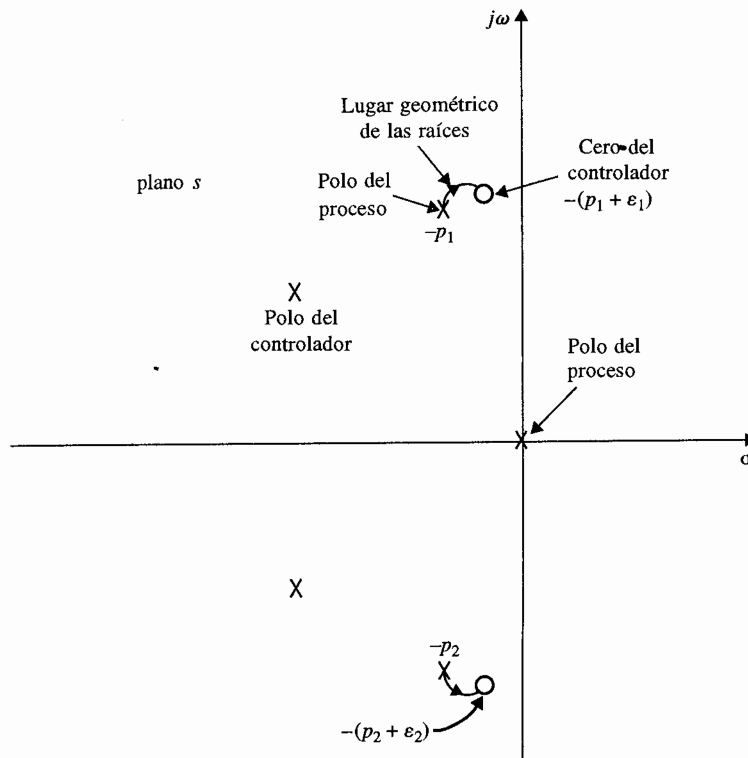


Figura 10-53 Configuración de polos y ceros y lugar geométrico de las raíces de cancelación inexacta.

ceros del controlador marcados para cancelación están muy lejos de los objetivos, el efecto se puede despreciar para todos los propósitos prácticos. Otra forma de ver este problema es que los ceros de $G(s)$ se mantienen como ceros de la función de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/R(s)$, por lo que de la ecuación (10-146), se observa que los dos pares de polos y ceros están lo suficientemente cerca para ser cancelados desde el punto de vista de la respuesta transitoria.

▲ Nunca intente cancelar polos en lazo abierto que estén en el semiplano derecho del plano s.

Se debe mantener en mente que nunca se debe intentar cancelar polos que estén en el semiplano derecho del plano s, ya que cualquier cancelación inexacta resultará en un sistema inestable. La cancelación inexacta de polos puede causar dificultades si los polos no deseados de la función de transferencia del proceso están muy cerca o a la derecha del eje imaginario del plano s. En este caso, la cancelación inexacta puede también resultar en un sistema inestable. La Fig. 10-54(a) ilustra una situación en las que las posiciones relativas de los polos y ceros para cancelar resultan en un sistema estable, mientras que en la Fig. 10-54(b), la cancelación inexacta no es aceptable. Aunque la distancia relativa entre los polos y ceros a cancelar sea pequeña, lo que resulta en términos en la respuesta en el tiempo que tienen amplitudes muy pequeñas, estas respuestas crecerán sin límites conforme el tiempo se incremente.

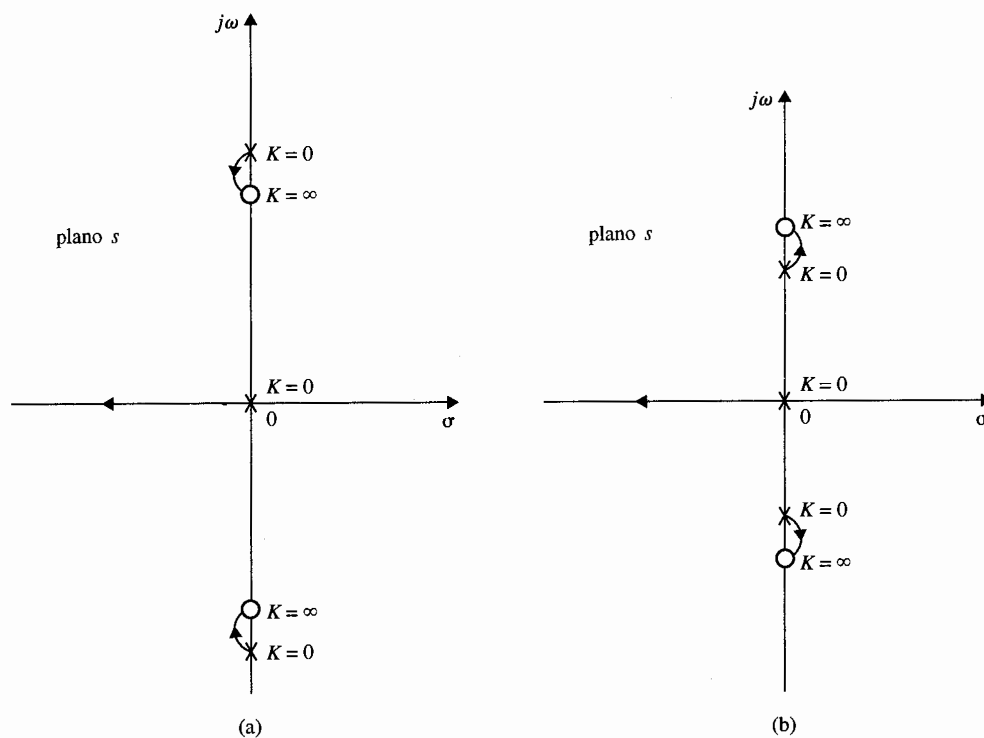


Figura 10-54 Lugar geométrico de las raíces que muestra los efectos de cancelaciones polo–cero inexactas.

10-8-1 Filtro activo de segundo orden

Las funciones de transferencia con polos y/o ceros complejos se pueden implantar mediante circuitos eléctricos con amplificadores operacionales. Considere la función de transferencia:

$$G_c(s) = \frac{E_2(s)}{E_1(s)} = K\frac{s^2 + b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2} \tag{10-148}$$

donde a_1, a_2, b_1 y b_2 son constantes reales. La realización del filtro activo de la ecuación (10-148) se puede obtener mediante el empleo del esquema de descomposición directa de las variables de estado estudiado en la Sec. 5-9. Un circuito con amplificadores operacionales típico se muestra en la Fig. 10-55. Los parámetros de la función de transferencia de la ecuación (10-148) están relacionados con los parámetros del circuito como sigue:

$$K = -\frac{R_6}{R_7} \tag{10-149}$$

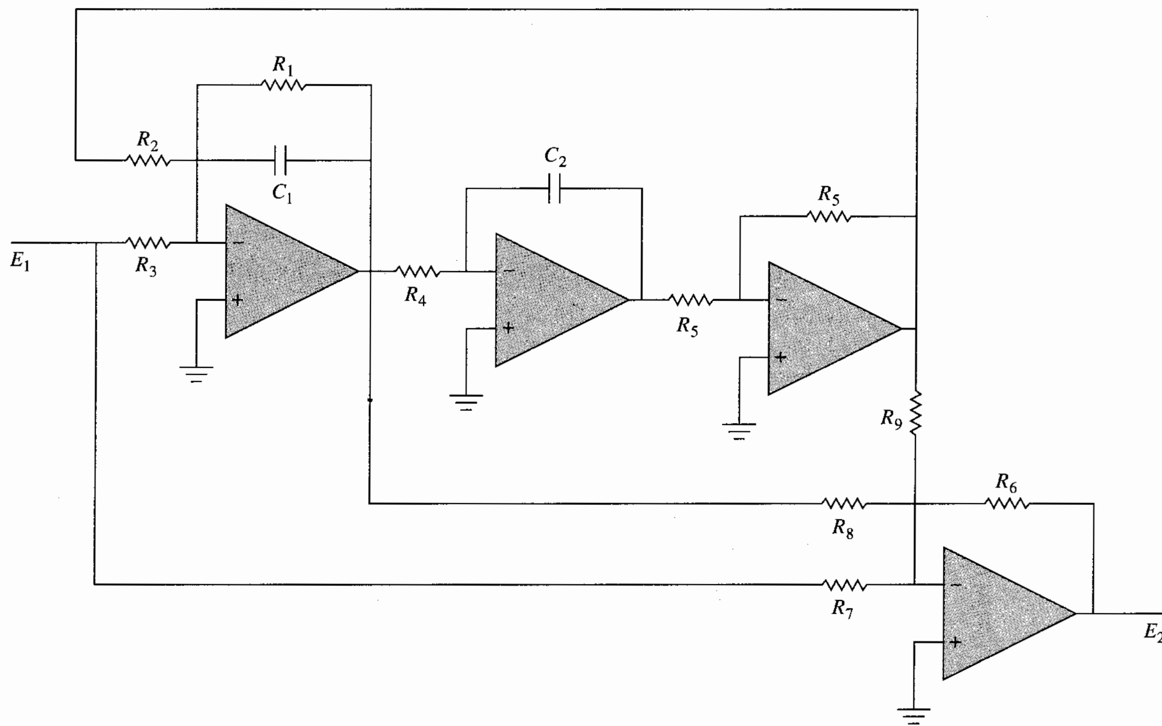


Figura 10-55 Circuito con amplificadores operacionales de la realización de la función de transferencia de segundo orden.

$$\frac{E_2(s)}{E_1(s)} = K\frac{s^2 + b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

$$a_1 = \frac{1}{R_1 C_1} \tag{10-150}$$

$$a_2 = \frac{1}{R_2 R_4 C_1 C_2} \tag{10-151}$$

$$b_1 = \left(1 - \frac{R_1 R_7}{R_3 R_8}\right) a_1 \qquad (b_1 < a_1) \tag{10-152}$$

$$b_2 = \left(1 - \frac{R_2 R_7}{R_3 R_9}\right) a_2 \qquad (b_2 < a_2) \tag{10-153}$$

Ya que $b_1 < a_1$, los ceros de $G_c(s)$ de la ecuación (10-148) son menos amortiguados y están más cerca del origen en el plano s que los polos. Al establecer varias combinaciones de R_7 y R_8, y R_9 al infinito, se puede realizar una variedad de funciones de transferencia de segundo orden. Observe que todos los parámetros se pueden ajustar en forma independiente. Por ejem-

plo, R_1 se puede ajustar para ser a_1; R_4 se puede ajustar para ser a_2; b_1 y b_2 se ajustan con R_8 y R_9, respectivamente. El factor de ganancia K se controla en forma independiente mediante R_6.

10-8-2 Interpretación y diseño en el dominio de la frecuencia

Mientras es simple considerar la idea del diseño de la cancelación de polos y ceros en el dominio s, el dominio de la frecuencia provee otra perspectiva a los principios de diseño. La

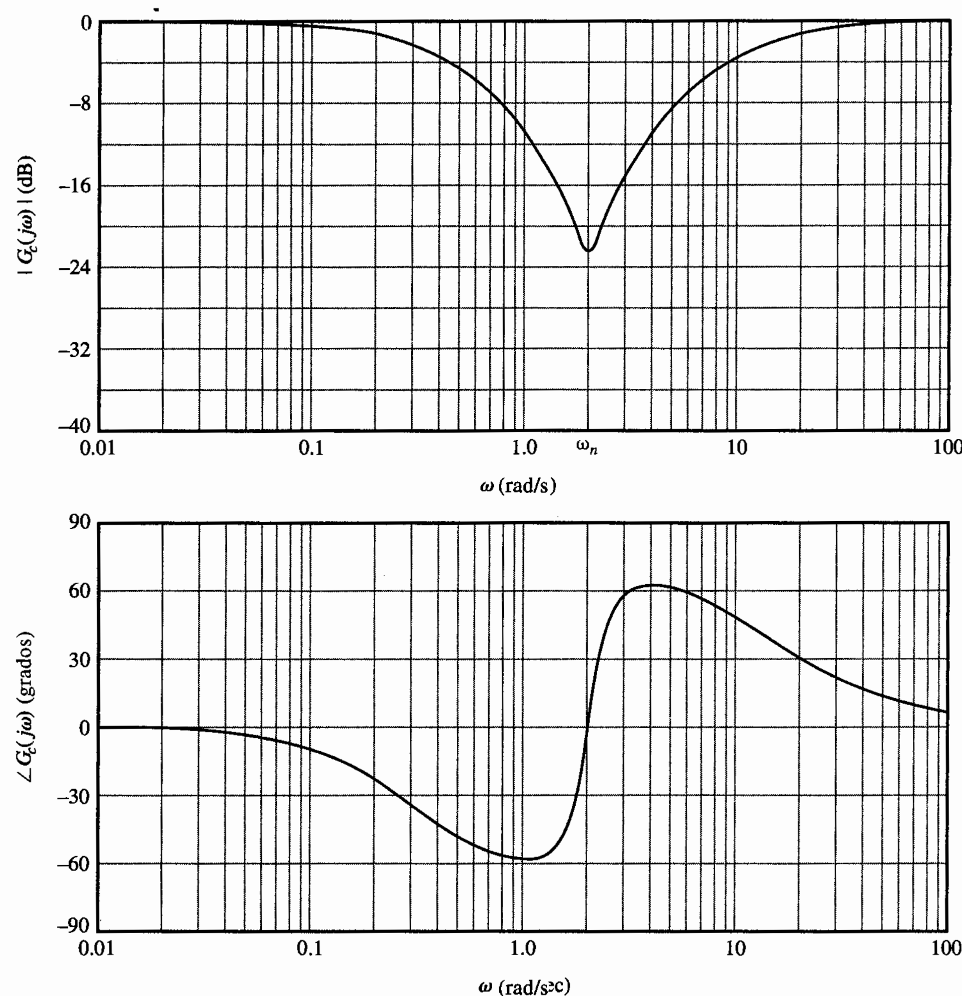


Figura 10-56 Trazas de Bode del controlador de muesca con la función de transferencia $G(s) = (s^2 + 0.8s + 4)/(s + 0.384)(s + 10.42)$.

Ejemplo 10-12

Fig. 10.56 ilustra las trazas de Bode de la función de transferencia de un controlador de segundo orden típico con ceros complejos. La traza de magnitud del controlador tiene una "muesca" en la frecuencia de resonancia ω_n. La traza de fase es negativa por abajo y positiva por arriba de la frecuencia de resonancia, mientras que pasa por cero grados en la frecuencia de resonancia. La atenuación de la curva de magnitud y la característica de fase positiva se pueden emplear en forma efectiva para mejorar la estabilidad de un sistema lineal. Debido a la característica de "muesca" en la curva de magnitud, el controlador también se denomina en la industria como **filtro de muesca** o **controlador de muesca.**

Desde el punto de vista del dominio de la frecuencia, el controlador de muesca tiene ventajas sobre los controladores de adelanto y atraso de fase en ciertas condiciones de diseño, ya que las características de magnitud y fase no afectan las propiedades en alta y baja frecuencia del sistema. Sin emplear el principio de cancelación de polos y ceros, el diseño del controlador de muesca para compensación en el dominio de la frecuencia involucra determinar la cantidad de atenuación requerida y la frecuencia de resonancia del controlador.

La función de transferencia del controlador de muesca de la ecuación (10-148) se expresa como:

$$G_c(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_z\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta_p\omega_n s + \omega_n^2} \tag{10-154}$$

donde se tiene que hacer la simplificación al suponer que $a_2 = b_2$. La atenuación provista por la magnitud de $G_c(j\omega)$ en la frecuencia de resonancia ω_n es:

$$|G_c(j\omega_n)| = \frac{\zeta_z}{\zeta_p} \tag{10-155}$$

Por tanto, al conocer la atenuación máxima requerida en ω_n, se conoce la relación de ζ_z/ζ_p.

El siguiente ejemplo ilustra el diseño del controlador de muesca con base en la cancelación de polos y ceros y la atenuación requerida en la frecuencia de resonancia.

Ejemplo 10-12

Los polos complejos conjugados en funciones de transferencia de sistemas a menudo se deben a compliancias en los acoplamientos entre los elementos mecánicos. Por ejemplo, si el eje entre el motor y la carga no es rígido, el eje se modela como un resorte torsional, el cual puede llevar a tener polos complejos conjugados en la función de transferencia. La Fig. 10-57 muestra un sistema de control de velocidad en el que el acoplamiento entre el motor y la carga es modelado como un resorte torsional. Las ecuaciones del sistema son:

$$T_m(t) = J_m\frac{d\omega_m(t)}{dt} + B_m\omega_m(t) + J_L\frac{d\omega_L(t)}{dt} \tag{10-156}$$

$$K_L[\theta_m(t) - \theta_L(t)] + B_L[\omega_m(t) - \omega_L(t)] = J_L\frac{d\omega_L(t)}{dt} \tag{10-157}$$

$$T_m(t) = K\omega_e(t) \tag{10-158}$$

$$\omega_e(t) = \omega_r(t) - \omega_L(t) \tag{10-159}$$

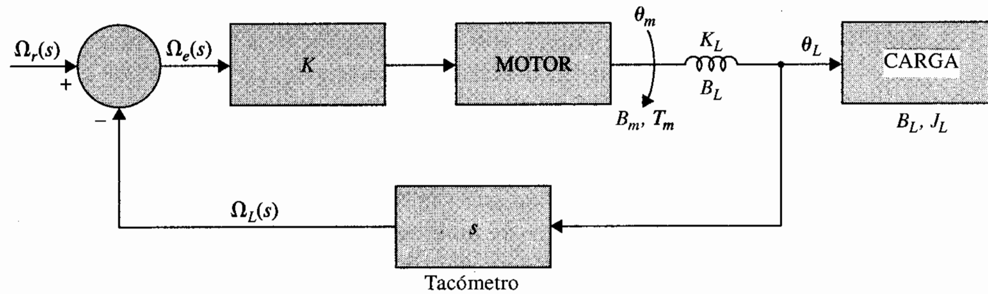


Figura 10-57 Diagrama de bloques del sistema de control de velocidad del ejemplo 10-12.

donde:

$T_m(t)$ = par del motor
$\omega_m(t)$ = velocidad angular del motor
$\omega_L(t)$ = velocidad angular de la carga
$\theta_L(t)$ = desplazamiento angular de la carga
$\theta_m(t)$ = desplazamiento angular del motor
J_m = inercia del motor = 0.0001 oz-pulg-s^2
J_L = inercia de la carga = 0.00005 oz-pulg-s^2
B_m = coeficiente de fricción viscosa del motor = 0.01 oz-pulg-s
B_L = coeficiente de fricción viscosa de la carga = 0.001 oz-pulg-s
K_L = constante del resorte del eje = 100 oz-pulg/rad
K = ganancia del amplificador = 1

La función de transferencia de lazo del sistema es:

$$G_p(s) = \frac{\Omega_L(s)}{\Omega_e(s)}$$
$$= \frac{B_L s + K_L}{J_m J_L s^3 + (B_m J_L + B_L J_m + B_L J_L)s^2 + (K_L J_L + B_m B_L + K_L J_m)s + B_m K_L} \quad (10\text{-}160)$$

Al sustituir los parámetros del sistema en la última ecuación, $G_p(s)$ se convierte en:

$$G_p(s) = \frac{20\,000(s + 100\,000)}{s^3 + 112s^2 + 1\,200\,200s + 20\,000\,000}$$
$$= \frac{20\,000(s + 100\,000)}{(s + 16.69)(s + 47.66 + j1094)(s + 47.66 - j1094)} \quad (10\text{-}161)$$

Por tanto, la compliancia del eje entre el motor y la carga crea dos polos complejos conjugados en $G_p(s)$ que son ligeramente amortiguados. La frecuencia de resonancia es de aproximadamente 1095 rad/s y el sistema en lazo cerrado es inestable. Los polos complejos de $G_p(s)$ causarán que la respuesta oscile aun si el sistema fuera estable.

Diseño mediante la cancelación de polos y ceros con el controlador de muesca

Las especificaciones de desempeño del sistema son:

1. La velocidad en estado estable de la carga debido a la una entrada escalón unitario tenga un error no mayor que 1 porciento.
2. Sobrepaso máximo de la velocidad de salida ≤ 5 porciento.
3. Tiempo de levantamiento $t_r < 0.5$ s.
4. Tiempo de asentamiento $t_s < 0.5$ s.

Para compensar el sistema, se necesita ser estrictos, o quizá, en forma más realista, minimizar el efecto de los polos complejos de $G_p(s)$ en $s = -47.66 + j1094$ y $-47.66 - j1094$. Se elige un controlador de muesca con la función de transferencia dada por la ecuación (10-154) para mejorar el desempeño del sistema. Los ceros complejos conjugados del controlador deben de estar localizados de forma que cancelen los polos no deseados del proceso. Por tanto, la función de transferencia del controlador de muesca debe ser:

$$G_c(s) = \frac{s^2 + 95.3s + 1\,198\,606.6}{s^2 + 2\zeta_p\omega_n s + \omega_n^2} \tag{10-162}$$

La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema compensado es:

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{20\,000(s + 100\,000)}{(s + 16.69)(s^2 + 2\zeta_p\omega_n s + \omega_n^2)} \tag{10-163}$$

Ya que el sistema es tipo 0, la constante de error escalón es:

$$K_P = \lim_{s\to 0} G(s) = \frac{2 \times 10^9}{16.69 \times \omega_n^2} = \frac{1.198 \times 10^8}{\omega_n^2} \tag{10-164}$$

Para una entrada escalón unitario, el error en estado estable del sistema se escribe como:

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} \omega_e(t) = \lim_{s\to 0} s\Omega_e(s) = \frac{1}{1 + K_p} \tag{10-165}$$

Por tanto, para que el error en estado estable sea menor o igual que 1%, $K_P \geq 99$. El requisito correspondiente sobre ω_n se encuentra de la ecuación (10-164),

$$\omega_n \leq 1210 \tag{10-166}$$

Se puede mostrar que desde el punto de la estabilidad, es mejor seleccionar un valor grande de ω_n. Por tanto, se considera $\omega_n = 1200$ rad/s que está al final del rango permitido desde el punto de vista de error en estado estable. Sin embargo, las especificaciones de diseño dadas anteriormente sólo se pueden obtener al emplear un valor muy grande de ζ_p. Por ejemplo, cuando $\zeta_p = 15\ 000$, la respuesta en el tiempo tiene los siguientes atributos de desempeño.

Sobrepaso máximo = 3.7 porciento.
Tiempo de levantamiento $t_r = 0.1897$ s.
Tiempo de asentamiento $t_s = 0.256$ s.

Aunque los requisitos de desempeño se satisfacen, la solución no es realista, ya que el valor de ζ_p es en extremo grande no se puede realizar con componentes físicos disponibles.

Se escoge $\zeta_p = 10$ y $\omega_n = 1000$ rad/s. La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema con el controlador de muesca es:

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{20\,000(s + 100\,000)}{(s + 16.69)(s + 50)(s + 19\,950)} \qquad (10\text{-}167)$$

Se puede mostrar que el sistema es estable, pero el sobrepaso máximo es 71.6 porciento. Ahora se puede ver que la ecuación (10-167) representa un nuevo problema de diseño. Existe un número de soluciones posibles al problema para cumplir las especificaciones de diseño dadas anteriormente. Entre otras posibilidades se puede emplear un controlador PI o uno de atraso de fase.

Diseño del controlador de atraso de fase de la segunda etapa

Se diseña un controlador de atraso de fase como la segunda etapa del controlador para el sistema. Las raíces de la ecuación característica del sistema con el controlador de muesca están en $s = -19{,}954$, $-31.328 + j316.36$ y $-31.328 - j316.36$. La función de transferencia del controlador de atraso de fase es:

$$G_{c1}(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \qquad a < 1 \qquad (10\text{-}168)$$

donde para propósitos de diseño se omitió el factor $1/a$ en la ecuación (10-168).

Se selecciona $T = 10$ para el controlador de atraso de fase. La tabla 10-21 muestra los atributos de desempeño en el dominio del tiempo para varios valores de a. El mejor valor de a desde el punto de

Tabla 10-21 Atributos de desempeño en el dominio del tiempo del sistema del ejemplo 10-12 con el controlador de muesca-atraso de fase

a	T	aT	Sobrepaso máximo (%)	t_r (s)	t_s (s)
0.001	10	0.01	14.8	0.1244	0.3836
0.002	10	0.02	10.0	0.1290	0.3655
0.004	10	0.04	3.2	0.1348	0.1785
0.005	10	0.05	1.0	0.1375	0.1818
0.0055	10	0.055	0.3	0.1386	0.1889
0.006	10	0.06	0	0.1400	0.1948

vista del desempeño global es 0.005. Por tanto, la función de transferencia del controlador de atraso de fase es:

$$G_{c1}(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} = \frac{1 + 0.05s}{1 + 10s} \tag{10-169}$$

La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema compensado con el controlador de muesca-atraso de fase es:

$$G(s) = G_c(s)G_{c1}(s)G_p(s) = \frac{20\,000(s + 100\,000)(1 + 0.05s)}{(s + 16.69)(s + 50)(s + 19\,950)(1 + 10s)} \tag{10-170}$$

La respuesta al escalón unitario del sistema se muestra en la Fig. 10-58. Puesto que la constante de error de escalón es 120.13, el error de la velocidad del estado estable, debido a una entrada de escalón es de 1/120.13 ó 0.83 porciento.

Diseño del controlador PI de la segunda etapa

Un controlador PI se puede aplicar al sistema para mejorar, de forma simultánea, el error en estado estable y la estabilidad. La función de transferencia del control PI se escribe como:

$$G_{c2}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = K_P\left(\frac{s + K_I/K_P}{s}\right) \tag{10-171}$$

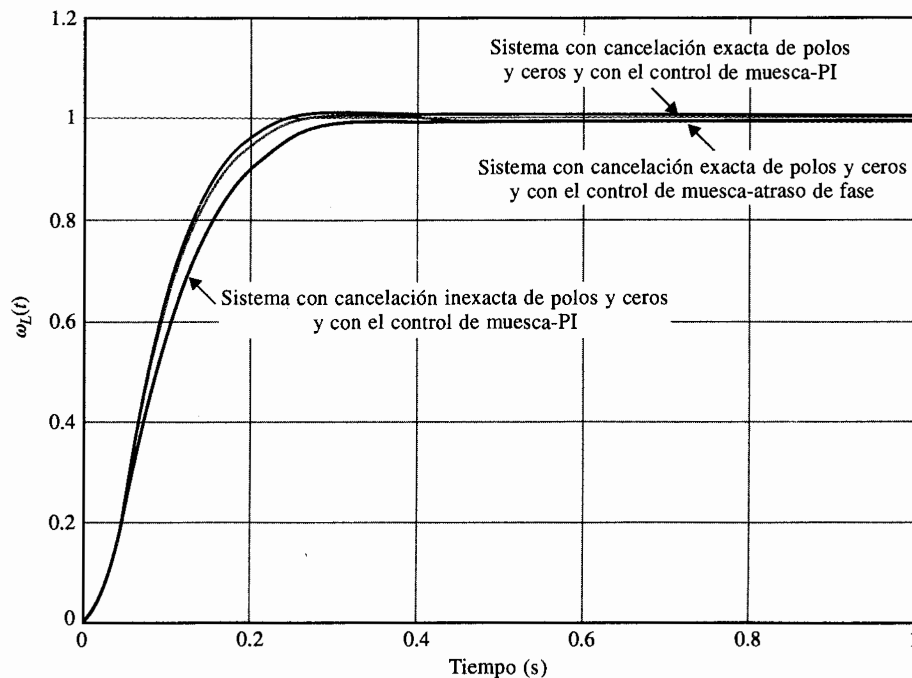


Figura 10-58 Respuestas al escalón unitario del sistema de control de velocidad del ejemplo 10-12.

Se puede diseñar el controlador PI con base en el controlador de atraso de fase al escribir la ecuación (10-169) como:

$$G_{c1}(s) = 0.005\left(\frac{s + 20}{s + 0.1}\right) \tag{10-172}$$

Por tanto, se puede ajustar $K_P = 0.005$ y $K_I/K_P = 20$. Entonces $K_I = 0.1$. La Fig. 10-58 muestra la respuesta al escalón unitario del sistema con el controlador de muesca-PI. Los atributos de la respuesta al escalón son:

Sobrepaso máximo = 1 porciento.
Tiempo de levantamiento $t_r = 0.1380$ s.
Tiempo de asentamiento $t_s = 0.1818$ s.

que están muy cerca de los del controlador de muesca-atraso de fase, excepto que para el presente caso, el error de velocidad es cero cuando la entrada es una función escalón unitario.

Sensibilidad debida a la cancelación imperfecta de polos y ceros

Como se mencionó, la cancelación de polos y ceros casi nunca es posible en la vida real. Se considera que el polinomio del denominador del controlador de muesca de la ecuación (10-162) no se puede realizar con exactitud mediante resistores y capacitores. La función de transferencia del controlador de muesca se escoge en forma realista como:

$$G_c(s) = \frac{s^2 + 100s + 1\,000\,000}{s^2 + 20\,000s + 1\,000\,000} \tag{10-173}$$

La Fig. 10-58 muestra la respuesta al escalón unitario del sistema con el controlador de muesca de la ecuación (10-173). Los atributos de respuesta al escalón son:

Sobrepaso máximo = 0.4 porciento
Tiempo de levantamiento $t_r = 0.17$ s.
Tiempo de asentamiento $t_s = 0.2323$ s.

Diseño en el dominio de la frecuencia

Para realizar el diseño del controlador de muesca, se hace referencia a las trazas de Bode de la ecuación (10-161) que se muestran en la Fig. 10-59. Debido a los polos complejos conjugados de $G_p(s)$, la traza de magnitud tiene un pico de 24.86 dB en 1095 rad/s. De las trazas de Bode de la Fig. 10-59 se observa que se puede llevar a la traza de magnitud hacia abajo –20 dB en la frecuencia de resonancia de 1095 rad/s para que la resonancia sea suavizada. Esto requiere una atenuación de –44.86 dB. Por tanto, de la ecuación (10-155):

$$|G_c(j\omega_n)| = -44.86 \text{ dB} = \frac{\zeta_z}{\zeta_p} = \frac{0.0435}{\zeta_p} \tag{10-174}$$

donde ζ_z se encuentra de la ecuación (10-162). Al resolver para ζ_p la ecuación (10-174), se obtiene $\zeta_p = 7.612$. La atenuación se debe colocar en la frecuencia de resonancia de 1095 rad/s; por tanto $\omega_n = 1095$ rad/s. El controlador de muesca de la ecuación (10-162) se convierte en:

$$G_c(s) = \frac{s^2 + 95.3s + 1\,198\,606.6}{s^2 + 16\,670.28s + 1\,199\,025} \tag{10-175}$$

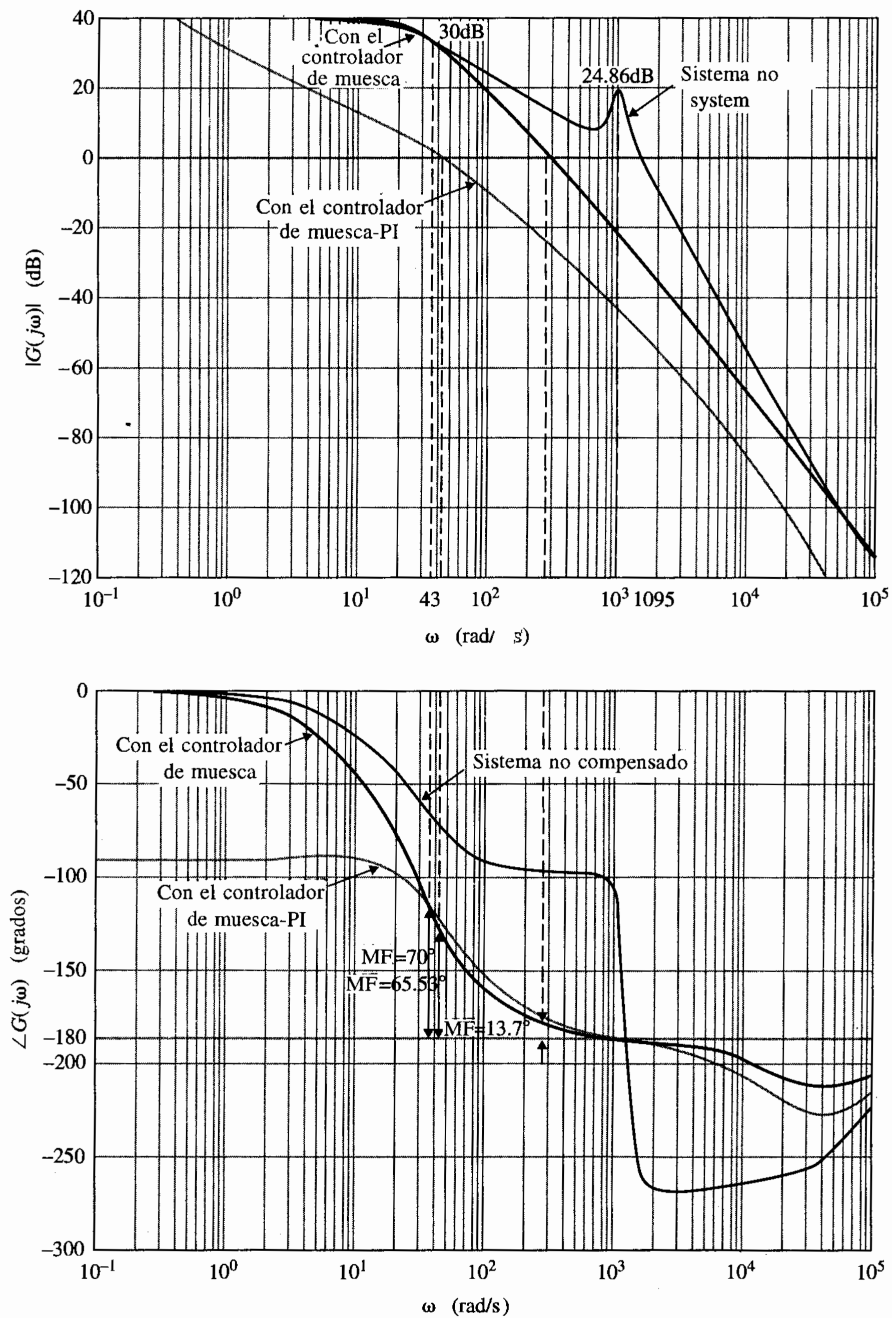


Figura 10-59 Trazas de Bode del sistema de control de velocidad no compensado del ejemplo 10-12, con el controlador de muesca y con el controlador de muesca-PI.

Las trazas de Bode del sistema con el controlador de muesca de la ecuación (10-175) se muestran en la Fig. 10-59. Se puede ver que el sistema con el controlador de muesca tiene un margen de fase de sólo 13.7° y M_r es 3.92.

Para completar el diseño, se emplea un controlador PI como la segunda etapa del controlador. Al seguir la guía dada en la Sec. 10-3 sobre el diseño del controlador PI, se supone que el margen de fase de diseño es 70°. De las trazas de Bode de la Fig. 10-59, se ve que para obtener el margen de fase de 70°, la nueva frecuencia de cruce de ganancia debe ser $\omega'_g = 43$ rad/s y la magnitud de $G(j\omega'_g)$ es 30 dB. Por tanto, de la ecuación (10-32)

$$K_P = 10^{-|G(j\omega'_g)|_{dB}/20} = 10^{-30/20} = 0.0316 \qquad (10\text{-}176)$$

El valor de K_I se determina mediante la guía dada por la ecuación (10-33):

$$K_I = \frac{\omega'_g K_P}{10} = \frac{43 \times 0.0316}{10} = 0.135 \qquad (10\text{-}177)$$

Ya que el sistema original es de tipo 0, el diseño final necesita ser refinado mediante el ajuste del valor de K_I. La tabla 10-22 muestra los atributos de desempeño cuando $K_P = 0.0316$ y K_I varía desde 0.135. De las mediciones de sobrepaso máximo, tiempo de levantamiento, y tiempo de asentamiento, el mejor valor de K_I es de 0.35. La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema compensado con el controlador de muesca-PI es:

$$G(s) = \frac{20\,000(s + 100\,000)(0.0316s + 0.35)}{s(s + 16.69)(s^2 + 16\,670.28s + 1\,199\,025)} \qquad (10\text{-}178)$$

La Fig. 10-59 muestra las trazas de Bode del sistema con el controlador de muesca–PI, con $K_P = 0.0316$ y $K_I = 0.35$. Las respuestas al escalón unitario del sistema compensado con $K_P = 0.0316$ y $K_I = 0.135$, 0.35 y 0.4 se muestran en la Fig. 10-60. ▲

Tabla 10-22 Atributos de desempeño del sistema del ejemplo 10-12 con el controlador de muesca-PI diseñado en el dominio de la frecuencia

K_P	K_I	MF (grados)	M_r	Sobrepaso máximo (%)	t_r (s)	t_s (s)
0.0316	0.100	76.71	1.00	0	0.2986	0.5758
0.0316	0.135	75.15	1.00	0	0.2036	0.4061
0.0316	0.200	72.22	1.00	0	0.0430	0.2403
0.0316	0.300	67.74	1.00	0	0.0350	0.1361
0.0316	0.350	65.53	1.00	1.6	0.0337	0.0401
0.0316	0.400	63.36	1.00	4.3	0.0323	0.0398

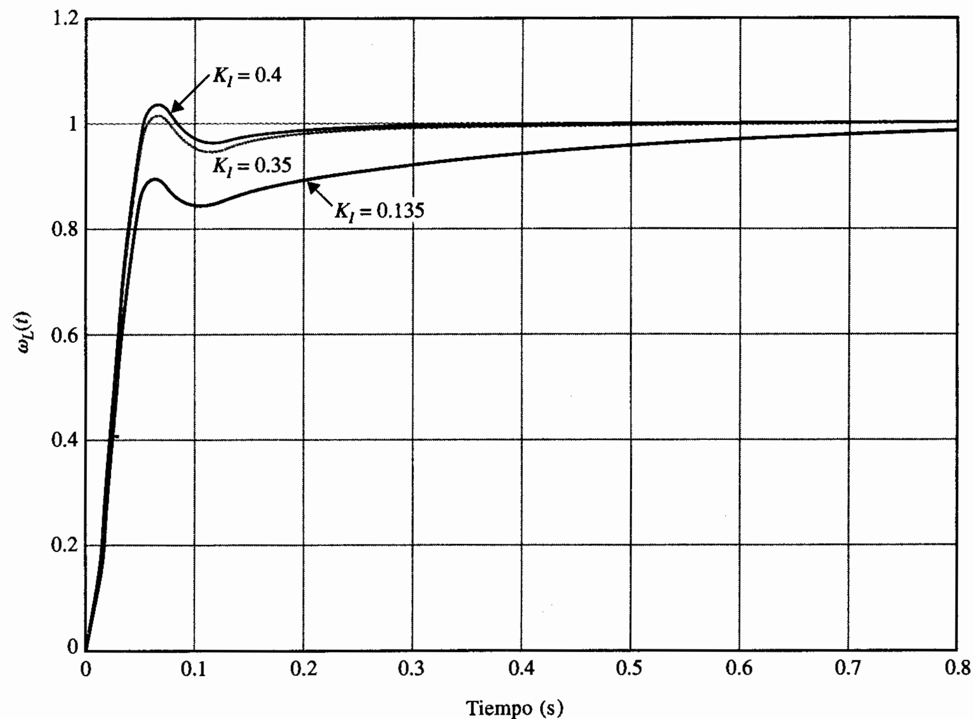


Figura 10-60 Respuestas al escalón unitario del sistema de control de velocidad del ejemplo 10-12 con el control de muesca–PI.

$$G_c(s) = \frac{s^2 + 95.3s + 1\,198\,606.6}{s^2 + 16\,670.28s + 1\,199\,025} \qquad G_{c2}(s) = 0.0316 + \frac{K_I}{s}$$

10-9 Controladores prealimentados y en la trayectoria directa

Los esquemas de compensación estudiados en las secciones anteriores tienen todos un grado de libertad ya que sólo hay un controlador en el sistema, aunque el controlador puede tener varias etapas en serie o en paralelo. Las limitaciones de un controlador de un grado de libertad fueron estudiadas en la ección. 10-1. Los esquemas de compensación de dos grados de libertad mostrados en la Figs. 10-2(d) hasta (f), ofrecen flexibilidad de diseño cuando se tienen varios criterios de diseño que tiene que ser satisfechos en forma simultánea.

De la Fig. 10-2(e), la función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{cf}(s)G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} \tag{10-179}$$

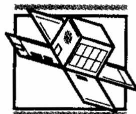
y la función de transferencia del error es:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_c(s)G_p(s)} \tag{10-180}$$

Por tanto el controlador $G_c(s)$ se puede diseñar para que la función de transferencia del error tenga ciertas características deseables, y el controlador $G_{cf}(s)$ se puede seleccionar para satisfacer ciertos requisitos de desempeño con referencia a la relación entrada-salida. Otra forma de describir la flexibilidad del diseño de dos grados de libertad es que el controlador $G_c(s)$ normalmente se diseña para proveer cierto grado de estabilidad y desempeño del sistema, pero como los ceros de $G_c(s)$ siempre se convierten en ceros de la función de transferencia en lazo cerrado, a menos que algunos de los ceros sean cancelados por los polos de la función de transferencia del proceso $G_p(s)$, estos ceros pueden causar grandes sobrepasos en la salida del sistema aun cuando el factor de amortiguamiento relativo determinado por la ecuación característica sea satisfactorio. En este caso y por otras razones, la función de transferencia $G_{cf}(s)$ se puede emplear para control o cancelación de los ceros no deseados de la función de transferencia en lazo cerrado, mientras mantiene intacta la ecuación característica. Por supuesto, también se pueden introducir ceros en $G_{cf}(s)$ para cancelar algunos de los polos no deseables de la función de transferencia en lazo cerrado que no pudieran ser afectados por el controlador $G_c(s)$. El esquema de compensación prealimentado mostrado en la Fig. 10-2(f) sirve para el mismo propósito que la compensación en la trayectoria directa, y la diferencia entre las dos configuraciones depende de consideraciones sobre el hardware involucrado en la implantación del sistema.

Se debe mantener en mente que mientras los esquemas de compensación prealimentado y en la trayectoria directa pueden sonar poderosos, en que se pueden emplear en forma directa para añadir o cancelar polos o ceros de la función de transferencia en lazo cerrado, hay una pregunta fundamental que involucra la característica básica de la realimentación. Si los controladores prealimentado y en la trayectoria directa son tan poderosos, ¿por qué se necesita la realimentación? Ya que $G_{cf}(s)$ en los sistema de las Figs. 10-2(e) y (f) están fuera del lazo de realimentación, el sistema es susceptible a la variación de los parámetros en $G_{cf}(s)$. Por tanto, en realidad, estos tipos de compensación no pueden ser satisfactorios cuando se aplican a todas las situaciones.

Ejemplo 10-13



Como ejemplo del diseño de los compensadores prealimentado y en la trayectoria directa, considere el sistema rastreador solar de segundo orden con el controlador de atraso de fase diseñado en el ejemplo 10-9. Una de las desventajas del esquema de compensación de atraso de fase es que el tiempo de levantamiento por lo regular es muy largo. Se considera que el sistema rastreador solar compensado en atraso de fase tiene la función e transferencia de la trayectoria directa:

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{2500(1 + 10s)}{s(s + 25)(1 + 100s)} \tag{10-181}$$

Los atributos de la respuesta en el tiempo son:

$$\text{sobrepaso máximo} = 2.5\% \qquad t_r = 0.1637 \text{ s} \qquad t_s = 0.2020 \text{ s}$$

Se puede mejorar el tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamiento sin incrementar de manera apreciable el sobrepaso, al añadir un controlador PD, $G_{cf}(s)$ al sistema, como se muestra en la Fig. 10-61 (a).

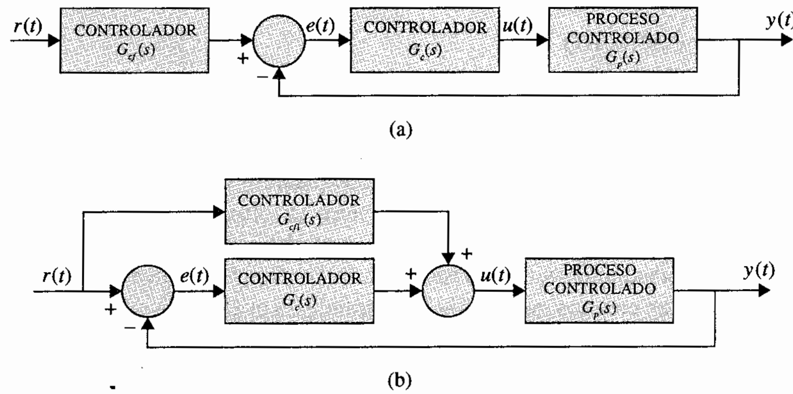


Figura 10-61 **(a)** Compensación en la trayectoria con compensación en serie. (b) con compensación prealimentada con compensación en sesrie.

Esto efectivamente añade un cero a la función de transferencia en lazo cerrado, sin afectar la ecuación característica. Se selecciona el controlador PD como:

$$G_{cf}(s) = 1 + 0.05s \tag{10-182}$$

los atributos de desempeño en el dominio del tiempo son:

sobrepaso máximo = 4.3% $\quad t_r = 0.1069$ s $\quad t_s = 0.1313$ s

Si, se escoge la configuración prealimentada de la Fig. 10-61(b), la función de transferencia $G_{cf1}(s)$ está relacionada directamente con $G_{cf}(s)$; esto es, al igualar las funciones de transferencia en lazo cerrado de los dos sistemas en la Fig. 10-62(a) y (b), se tiene:

$$\frac{[G_{cf1}(s) + G_c(s)]G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} = \frac{G_{cf}G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} \tag{10-183}$$

Al resolver está última ecuación para $G_{cf1}(s)$ se obtiene:

$$G_{cf1}(s) = [G_{cf}(s) - 1]G_c(s) \tag{10-184}$$

Por tanto, con $G_{cf}(s)$ dada por la ecuación (10-182), se tiene la función de transferencia del controlador prealimentado:

$$G_{cf1}(s) = 0.05s\left(\frac{1 + 10s}{1 + 100s}\right) \tag{10-185}$$

▲

10-10 Diseño de sistemas de control robusto

En muchas aplicaciones de sistema de control, el sistema diseñado no sólo debe satisfacer las especificaciones de amortiguamiento y exactitud, sino también debe producir un desempeño que sea **robusto** (insensible) a perturbaciones externas y variaciones de parámetros. Se ha demostrado que la realimentación en sistemas de control convencional tiene la habilidad inherente de reducir los efectos de perturbaciones externas y variaciones de parámetros. Desafortunadamente, la robustez con la configuración convencional de realimentación sólo se alcanza con una ganacia de lazo grande, la cual por lo regular reduce la estabilidad. Se considera el sistema de control mostrado en la Fig. 10-62. La perturbación externa se denota como $d(t)$, y se supone que la ganancia del amplificador K está sujeta a variación durante la operación. La función de transferencia entrada-salida del sistema cuando $d(t) = 0$ es:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG_{cf}(s)G_c(s)G_p(s)}{1 + KG_c(s)G_p(s)} \tag{10-186}$$

y la función de transferencia del sistema perturbación-salida cuando $r(t) = 0$ es:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + KG_c(s)G_p(s)} \tag{10-187}$$

En general, *la estrategia de diseño es seleccionar el controlador* $G_c(s)$ *para que la salida* $y(t)$ *sea insensible a la perturbación en un intervalo de frecuencia en el que este último es dominante, y el control prealimentado* $G_{cf}(s)$ *se diseña para alcanzar la función de transferencia deseada entre la entrada* $r(t)$ *y la salida* $y(t)$.

La sensibilidad de $M(s)$ debido a la variación de K se define como:

$$S_K^M = \frac{\text{porcentaje de cambio de } M(s)}{\text{porcentaje de cambio de } K} = \frac{dM(s)/M(s)}{dK/K} \tag{10-188}$$

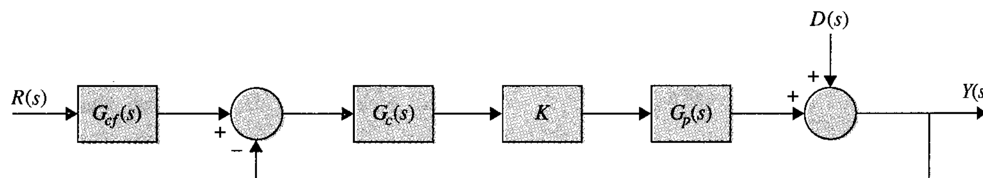


Figura 10-62 Sistema de control con perturbación.

Entonces, para el sistema de la Fig. 10-62:

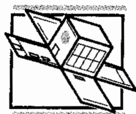
$$S_K^M = \frac{1}{1 + KG_c(s)G_p(s)} \tag{10-189}$$

▲ La supresión de perturbación y robustez puede a menudo ser diseñada con los mismos esquemas de control.

que es idéntica a la ecuación (10-187). Por tanto, la función de sensibilidad y la función de transferencia perturbación–salida son idénticas, lo que significa que la supresión de la perturbación y la robustez con respecto a la variación de K se pueden diseñar con el mismo esquema de control.

El ejemplo siguiente muestra como se puede utilizar el sistema de control de dos grados de libertad de la Fig. 10-62 para alcanzar una ganancia alta que satisfaga los requisitos de robustez y desempeño, así como el rechazo a ruido.

Ejemplo 10-14



Considere el sistema rastreador solar de segundo orden del ejemplo 10-9, el cual está compensado con un control de atraso de fase. La función de transferencia de la trayectoria directa es:

$$G_p(s) = \frac{2500K}{s(s+25)} \tag{10-190}$$

donde $K = 1$. La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema compensado en atraso de fase con $a = 0.1$ y $T = 100$ es:

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{2500K(1+10s)}{s(s+25)(1+100s)} \quad (K = 1) \tag{10-191}$$

Ya que el controlador de atraso de fase es un filtro paso bajas, la sensibilidad de la función de transferencia en lazo cerrado $M(s)$ con respecto a K es baja. El ancho de banda del sistema es sólo de 13.97 rad/s; se espera que $|S_K^M(j\omega)|$ sea mayor que la unidad para frecuencias más grandes que 13.97 rad/s. La Fig. 10-63 muestra la respuesta al escalón unitario del sistema cuando $K = 1$, el valor nominal y $K = 0.5$ y 2.0. Observe que si por alguna razón, la ganancia directa K cambia su valor nominal, la respuesta del sistema compensado con atraso de fase varía en forma sustancial. Los atributos de las respuestas al escalón unitario y las raíces de la ecuación característica se muestran en la tabla 10-23 para los tres valores de K. La Fig. 10-64 muestra el lugar geométrico de las raíces con el control de atraso de fase. Las dos raíces complejas de la ecuación característica varían de manera substancial cuando K varía desde 0.5 a 2.0.

▲ Una estrategia de diseño para la robustez es colocar los ceros del controlador cercanos a los polos en lazo cerrado deseados.

La estrategia de diseño del controlador robusto es colocar dos ceros del controlador cerca de los polos en lazo cerrado deseados los que de acuerdo al sistema compensado con atraso de fase están en $s = -12.455 \pm j9.624$. Por tanto, se tiene la función de transferencia del controlador:

$$G_c(s) = \frac{(s+13+j10)(s+13-j10)}{269} = \frac{s^2+26s+269}{269} \tag{10-192}$$

La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema con el controlador robusto es:

$$G(s) = \frac{9.2937K(s^2+26s+269)}{s(s+25)} \tag{10-193}$$

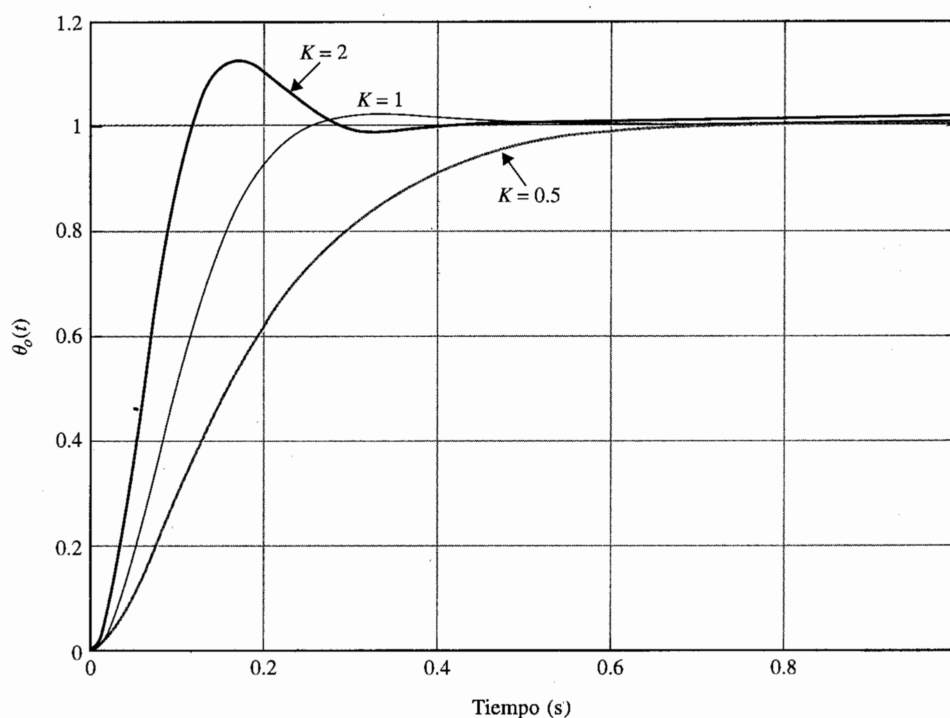


Figura 10-63 Respuestas al escalón unitario del sistema rastreador solar de segundo orden con el control de atraso de fase.

$$G(s) = \frac{2500K(1 + 10s)}{s(s + 25)(1 + 100s)}$$

Tabla 10-23 Atributos de la respuesta al escalón del sistema rastreador solar de segundo orden con el control de atraso de fase del ejemplo 10-14

K	Sobrepaso máximo (%)	t_r (s)	t_s (s)	Raíces de la ecuación característica
2.0	12.6	0.07854	0.2323	−0.1005, −12.4548 ± j18.51
1.0	2.6	0.1519	0.2020	−0.1009, −12.4545 ± j9.624
0.5	1.5	0.3383	0.4646	−0.1019, −6.7628, −18.1454

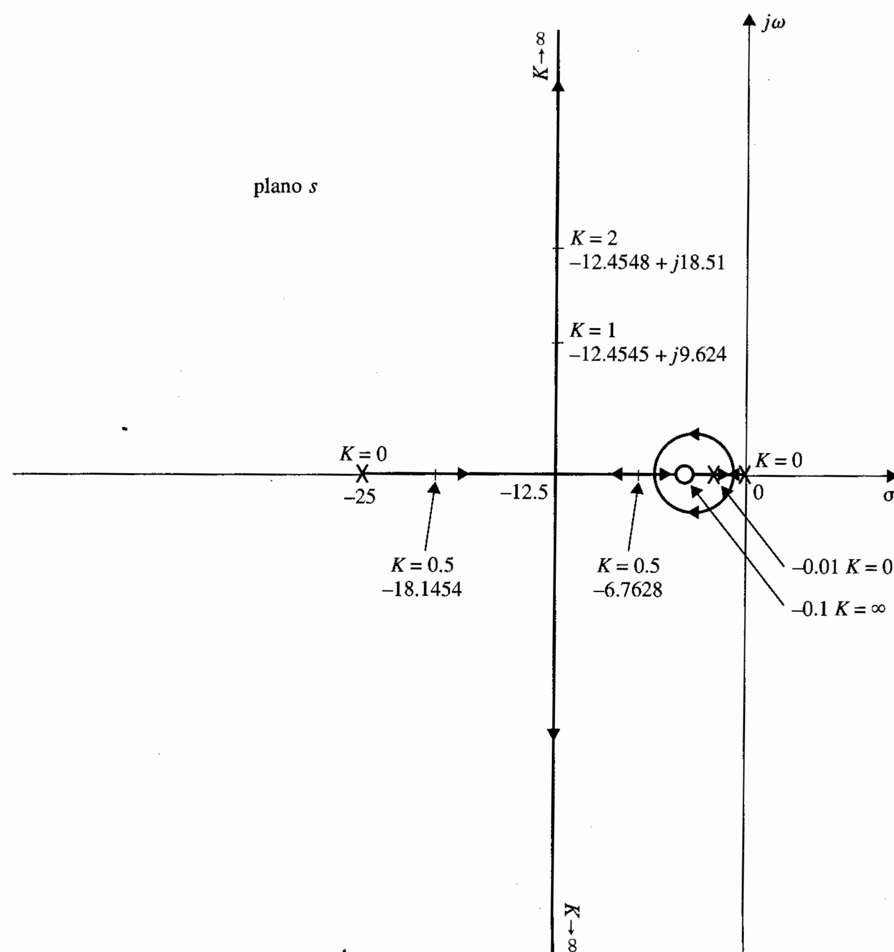


Figura 10-64 Lugar geométrico de las raíces del sistema rastreador solar de segundo orden con el control de atraso de fase.

$$G(s) = \frac{2500K(1 + 10s)}{s(s + 25)(1 + 100s)}$$

La Fig. 10-65 muestra el lugar geométrico de las raíces del sistema con el controlador robusto. Al colocar los dos ceros del $G_c(s)$ cerca de las raíces de ecuación característica deseadas, la sensibilidad del sistema se mejora en gran forma. De hecho, la sensibilidad de las raíces cercanas a los dos ceros complejos en donde termina el lugar geométrico de las raíces es muy baja. La Fig. 10-65 muestra que cuando K se aproxima al infinito, las dos raíces de la ecuación característica se aproximan a $-13 \pm j10$.

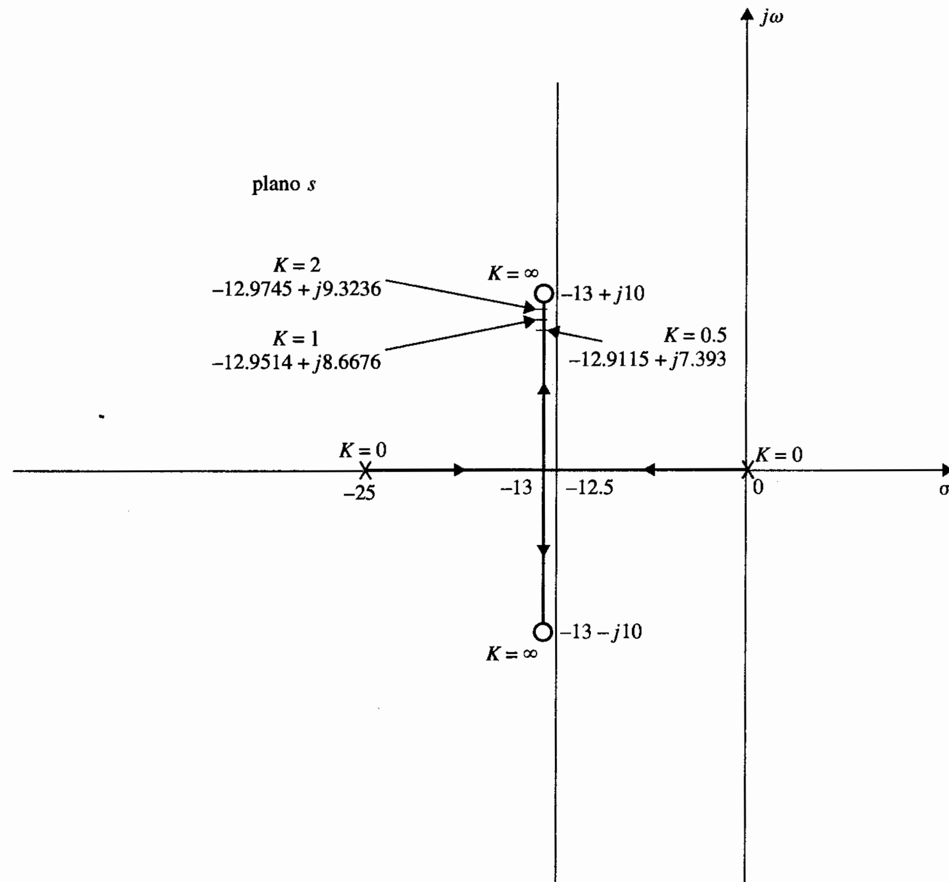


Figura 10-65 Lugar geométrico de las raíces del sistema rastreador solar de segundo orden con el controlador robusto.

$$G(s) = \frac{9.2937K(s^2 + 26s + 269)}{s(s + 25)}$$

Ya que los ceros de la función de transferencia de la trayectoria directa son idénticos a los ceros de la función de transferencia en lazo cerrado, el diseño aún no está completo al emplear sólo el controlador en serie $G_c(s)$, ya que los ceros en lazo cerrado cancelarán a los polos en lazo cerrado. Esto significa que se debe añadir un controlador en la trayectoria directa, como se muestra en la Fig. 10-62, donde $G_{cf}(s)$ debe contener polos que cancelen los ceros de $s^2 + 26s + 269$ de la función de transferencia en lazo cerrado. Por tanto, la función de transferencia del controlador de la trayectoria directa es:

$$G_{cf}(s) = \frac{269}{s^2 + 26s + 269} \tag{10-194}$$

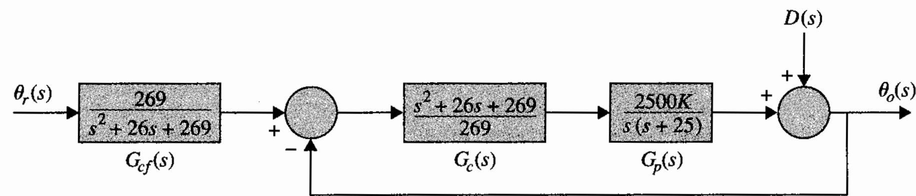


Figura 10-66 Rastreador solar de segundo orden con el controlador robusto y en la trayectoria directa.

El diagrama de bloques del sistema completo se muestra en la Fig. 10-66. La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema compensado con $K = 1$ es:

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{242.88}{s^2 + 25.903s + 242.88} \quad (10\text{-}195)$$

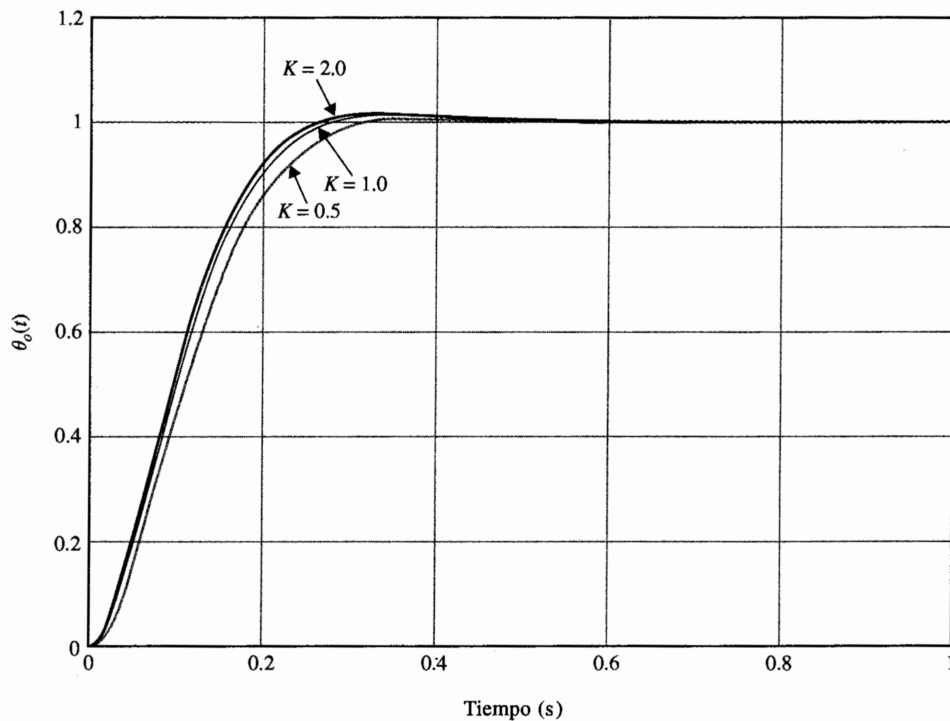


Figura 10-67 Respuestas al escalón unitario del sistema rastreador solar de segundo orden con el controlador robusto y con el controlador en la trayectoria directa.

Tabla 10-24 Atributos de la respuesta al escalón unitario del sistema rastreador solar de segundo orden con el control robusto del ejemplo 10-14

K	Sobrepaso máximo (%)	t_r (s)	t_s (s)	Raíces de la ecuación característica
2.0	1.3	0.1576	0.2121	$-12.9745 \pm j9.3236$
1.0	0.9	0.1664	0.2222	$-12.9514 \pm j8.6676$
0.5	0.5	0.1846	0.2525	$-12.9115 \pm j7.3930$

La respuestas al escalón unitario del sistema con $K = 0.5$, 1.0 y 2.0, se muestran en la Fig. 10-67 y sus atributos se proporcionan en la tabla 10-24. Como se muestra, el sistema es, muy insensible a las variaciones K.

Ya que el sistema de la Fig. 10-66 ahora es más robusto, se espera que el efecto de rechazo a perturbaciones se reduzca. Sin embargo, no se puede evaluar el efecto de los controladores en el sistema de la Fig. 10-66 al aplicar la función escalón unitario como $d(t)$. La verdadera mejora sobre las

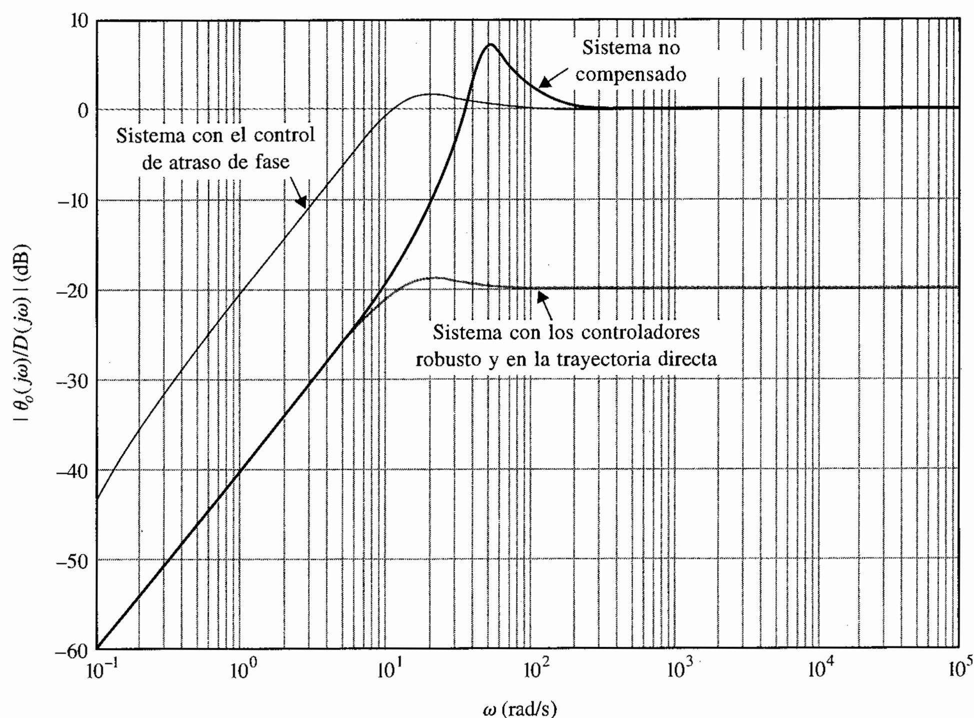


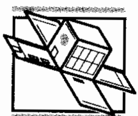
Figura 10-68 Respuesta en frecuencia de la amplitud de la salida debida al ruido del sistema rastreador solar de segundo orden.

propiedades de rechazo a ruido se analizan en forma más adecuada al investigar la respuesta en frecuencia de $\Theta_o(s)/D(s)$. La función de transferencia ruido-salida se escribe de la Fig. 10-66 como:

$$\frac{\Theta_o(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + G_c(s)G_p(s)} = \frac{s(s+25)}{10.2937s^2 + 266.636s + 2500} \qquad (10\text{-}196)$$

La traza de Bode de amplitud de la ecuación (10-196) se muestra en la Fig. 10-68, junto con el del sistema no compensado y el del sistema con el control de atraso de fase. Observe que la magnitud de la respuesta en frecuencia entre $D(s)$ y $\Theta_o(s)$ es mucho más pequeña que la de los sistemas sin compensación y con el control de atraso de fase. El control de atraso de fase también acentúa el ruido para frecuencias hasta de aproximadamente 40 rad/s aunque añade más estabilidad al sistema. ▲

Ejemplo 10-15



En este ejemplo se diseña un controlador robusto con compensación en la trayectoria directa para el sistema rastreador solar de tercer orden que se diseñó en el ejemplo 10-10 con el control de atraso de fase. La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema no compensado es:

$$G_p(s) = \frac{156\,250\,000K}{s(s^2 + 625s + 156\,250)} \qquad (10\text{-}197)$$

donde $K = 1$. El lugar geométrico de las raíces del sistema en lazo cerrado se muestra en la Fig. 10-50, el cual lleva al control de atraso de fase con los resultados mostrados en la tabla 10-19. Se seleccionan los parámetros del controlador de atraso de fase como $a = 0.1$ y $T = 20$. Las raíces de la ecuación característica dominantes están en $s = -187.73 \pm j164.93$.

Se colocan dos ceros del controlador robusto de segundo orden en $-180 \pm j166.13$, por lo que la función de transferencia del controlador es:

$$G_c(s) = \frac{s^2 + 360s + 60\,000}{60\,000} \qquad (10\text{-}198)$$

Para facilitar la realización del problema en alta frecuencia del controlador, se pueden añadir dos polos no dominantes a $G_c(s)$. Sin embargo, el análisis siguiente se realiza con la $G_c(s)$ de la ecuación (10-198). El lugar geométrico de las raíces del sistema compensado se muestra en la Fig. 10-69. Por tanto, al colocar los ceros del controlador muy cerca de las raíces dominantes deseadas, el sistema es muy

Tabla 10-25 Atributos de la respuesta al escalón unitario y raíces de la ecuación característica del sistema rastreador solar de tercer orden con los controles robusto y en la trayectoria directa del ejemplo 10-15

K	Sobrepaso máximo (%)	t_r (s)	t_s (s)	Raíces de la ecuación característica	
0.5	1.0	0.01115	0.01616	−1558.1,	$-184.5 \pm j126.9$
1.0	2.1	0.01023	0.01414	−2866.6,	$-181.3 \pm j147.1$
2.0	2.7	0.00966	0.01313	−5472.6,	$-180.4 \pm j156.8$
10.0	3.2	0.00924	0.01263	−26,307,	$-180.0 \pm j164.0$

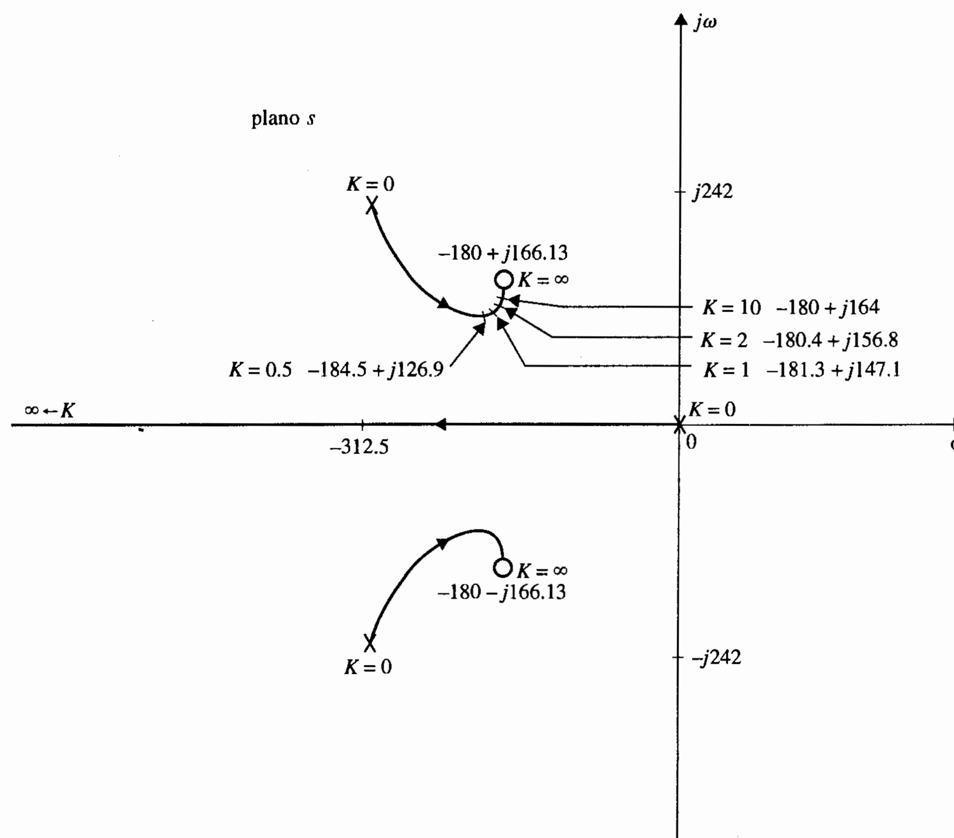


Figura 10-69 Lugar geométrico de las raíces del sistema rastreador solar de tercer orden con los controladores robusto y en la trayectoria directa.

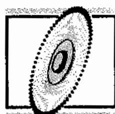
insensible al valor cambiante de K cerca y más alla de su valor nominal. La función de transferencia del controlador de la trayectoria directa es:

$$G_{cf}(s) = \frac{60\,000}{s^2 + 360s + 60\,000} \tag{10-199}$$

Los atributos de la respuesta al escalón unitario para $K = 0.5$, 1.0, 2.0 y 10.0 y las raíces de la ecuación característica correspondientes se dan en la tabla 10-25. ▲

Ejemplo 10-16

En este ejemplo se considera el diseño de un sistema de control de posición que tiene una inercia de carga variable. Este tipo de situación es muy común en sistemas de control. Por ejemplo, la inercia de carga vista por el motor en una impresora electrónica cambia cuando se emplean diferentes ruedas de impresión. El sistema debe tener un desempeño satisfactorio para todas las ruedas de impresión empleadas en el sistema.



Para ilustrar el diseño de un sistema robusto que es insensible a la variación de la inercia de carga, considere que la función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema de control con realimentación unitaria es:

$$G_p(s) = \frac{KK_i}{s[(Js + B)(Ls + B) + K_iK_b]} \tag{10-200}$$

Los parámetros del sistema son:

K_i = constante de par del motor = 1 N-m/A
K_b = constante de fuerza contraelectromotriz del motor = 1 V/rad/s
R = resistencia del motor = 1 Ω
L = inductancia del motor = 0.01 H
B = coeficiente de fricción viscosa del motor y de la carga ≅ 0
J = inercia del motor y la carga, varía entre 0.01 y 0.02 N-m/rad/s²
K = ganancia del amplificador

Al sustituir estos parámetros del sistema en la ecuación (10-200), se obtiene:

$$J = 0.01: \quad G_p(s) = \frac{10\,000K}{s(s^2 + 100s + 10\,000)} \tag{10-201}$$

$$J = 0.02: \quad G_p(s) = \frac{5000K}{s(s^2 + 100s + 5000)} \tag{10-202}$$

Las especificaciones de desempeño son:

Constante de error rampa $K_v \geq 200$
Sobrepaso máximo ≤ 5% o tan pequeño como sea posible
Tiempo de levantamiento $t_r \leq 0.05$ s
Tiempo de asentamiento $t_s \leq 0.05$ s

Estas especificaciones se deben mantener para $0.01 \leq J \leq 0.02$.

Para satisfacer el requisito de constante de error rampa, el valor de K debe ser al menos de 200. La Fig. 10-70 muestra el lugar geométrico de las raíces del sistema no compensado para $J = 0.01$ y $J = 0.02$. Se observa que sin importar el valor de J, el sistema es inestable para $K > 100$.

Para lograr el control robusto, se escoge la configuración del sistema de la Fig. 10-61(a). Se introduce un controlador de segundo orden en serie con los ceros colocados cerca de las raíces dominantes deseados de la ecuación característica del sistema compensado. Los ceros deben de estar colocados de forma que las raíces dominantes de la ecuación característica sean insensibles a la variación de J. Esto se hace al colocar los dos ceros en $-55 \pm j45$, aunque la localización exacta no es importante. Al escoger los dos ceros del controlador como se especificó, el lugar geométrico de las raíces del sistema compensado muestra que las dos raíces complejas de la ecuación característica estarán muy cerca de estos ceros para los diferentes valores de J, en especial cuando K es muy grande. La función de transferencia del controlador robusto es:

$$G_c(s) = \frac{s^2 + 110s + 5050}{5050} \tag{10-203}$$

Como en el ejemplo 10-15, se pueden añadir dos polos no dominantes a $G_c(s)$ para facilitar el problema de realización en alta frecuencia del controlador. El análisis se lleva a cabo con la $G_c(s)$ dada en la ecuación (10-203).

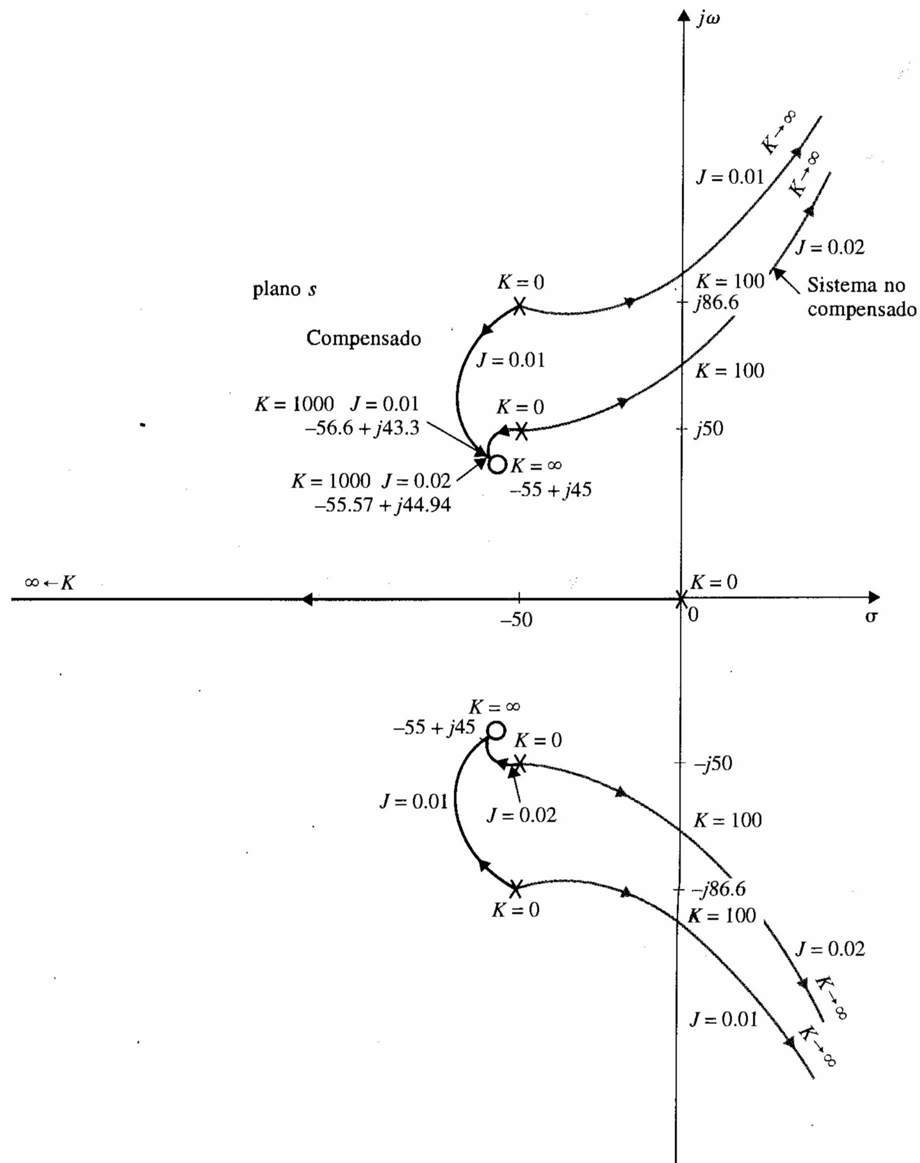


Figura 10-70 Lugar geométrico de las raíces del sistema de control de posición en ejemplo 10-16 con los controladores robusto y en la trayectoria directa.

Considere que $K = 1000$, aunque 200 es adecuada para satisfacer el requisito de K_v. Entonces, para $J = 0.01$, la función de transferencia de la trayectoria directa del sistema compensado es:

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{1980.198(s^2 + 110s + 5050)}{s(s^2 + 100s + 10\,000)} \qquad (10\text{-}204)$$

Tabla 10-26 Atributos de la respuesta al escalón unitario y raíces de la ecuación característica del sistema con los controladores robusto y en la trayectoria directa del ejemplo 10-16

J (N-m/rad/s²)	Sobrepaso máximo (%)	t_r (s)	t_s (s)	Raíces de la ecuación característica
0.01	1.6	0.03453	0.04444	−1967, −56.60 ± j43.33
0.02	2.0	0.03357	0.04444	−978.96, −55.57 ± j44.94

y para $J = 0.02$:

$$G(s) = \frac{990.99(s^2 + 110s + 5050)}{s(s^2 + 100s + 5000)} \tag{10-205}$$

Para cancelar los dos ceros de la función de transferencia en lazo cerrado, la función de transferencia de la trayectoria directa es:

$$G_{cf}(s) = \frac{5050}{s^2 + 110s + 5050} \tag{10-206}$$

Los atributos de la respuesta al escalón y las raíces de la ecuación característica del sistema compensado con $K = 1000$, $J = 0.01$ y $J = 0.02$, se dan en la tabla 10-26. ▲

10-11 Control realimentado de lazos menores

▲ Un tacómetro puede emplearse en una realimentación en lazo menor para mejorar la estabilidad.

Los esquemas de control estudiados en la secciones anteriores, han utilizado controladores en serie en la trayectoria directa del lazo principal o en la trayectoria de prealimentación del sistema de control. Aunque los controladores en serie son los más empleados debido a la simplicidad de implantación, dependiendo de la naturaleza del sistema, algunas veces hay ventajas en colocar el controlador en un lazo menor de realimentación, como se muestra en la Fig. 10-2(b). Por ejemplo, un tacómetro se puede acoplar directamente a un motor de cd no sólo para indicar la velocidad, sino más a menudo, para mejorar la estabilidad del sistema en lazo cerrado al realimentar la señal de salida del tacómetro. La velocidad del motor también se puede generar al procesar la fuerza contraelectromotriz del motor en forma electrónica. En principio, el controlador PID o los controladores de adelanto de fase o atraso de fase se pueden, con cierto grado de efectividad, aplicar como controladores en el lazo menor de realimentación. Bajo ciertas condiciones, el control de lazo menor puede producir sistemas que son más robustos, esto es, menos sensibles a las perturbaciones externas o variaciones de parámetros internos.

10-11-1 Control realimentado por tacómetro o realimentación de velocidad

El principio de emplear la derivada de la señal actuante para mejorar el amortiguamiento de un sistema en lazo cerrado se puede aplicar a la señal de salida para alcanzar un efecto similar. En otras palabras, la derivada de la señal de salida es realimentada y sumada de manera algebraica a la señal actuante del sistema. En la práctica, si la variable de salida es desplazamiento mecánico, se puede emplear un tacómetro para convertir el desplazamiento mecánico en una señal eléctrica que es proporcional a la derivada del desplazamiento. La Fig. 10-71 muestra el diagrama de bloques de un sistema de control con una trayectoria secundaria que realimenta la derivada de la salida. La función de transferencia del tacómetro se denota como $K_t s$, donde K_t es la constante del tacómetro, por lo regular expresada en volts/rad por segundo para propósitos analíticos. En forma comercial, K_t está dada en las hojas de datos de los tacómetros en volts por 1000 rpm. Los efectos de la velocidad o realimentación por tacómetro se pueden ilustrar al aplicarla al sistema prototipo de segundo orden. Considere que el proceso controlado del sistema mostrado en la Fig. 10-71 tiene la función de transferencia:

$$G_p(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \tag{10-207}$$

La función de transferencia en lazo cerrado del sistemas es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n + K_t\omega_n^2)s + \omega_n^2} \tag{10-208}$$

y la ecuación característica es:

$$s^2 + (2\zeta\omega_n + K_t\omega_n^2)s + \omega_n^2 = 0 \tag{10-209}$$

De la ecuación característica, *es claro que el efecto de la realimentación por tacómetro es el incrementar el amortiguamiento del sistema, ya que K_t aparece en el mismo término que el factor de amortiguamiento relativo ζ.* A este respecto, la realimentación por tacómetro tiene exacta-

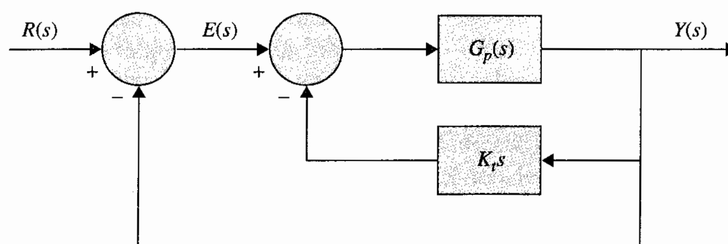


Figura 10-71 Sistema de control mediante realimentación por tacómetro.

mente el mismo efecto que el control PD. Sin embargo, la función de transferencia en lazo cerrado del sistema con el control PD de la Fig. 10-3 es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2(K_P + K_D s)}{s^2 + (2\zeta\omega_n + K_D\omega_n^2)s + \omega_n^2 K_P} \qquad (10\text{-}210)$$

Al comparar las dos funciones de transferencia de las ecuaciones (10-208) y (10-210), se observa que las dos ecuaciones características son idénticas si $K_P = 1$ y $K_D = K_t$. Sin embargo, la ecuación (10-210) tiene un cero en $s = -K_P / K_D$, mientras que la ecuación (10-208) no lo tiene. Por tanto, las respuesta del sistema con la realimentación por tacómetro está definida sólo por la ecuación característica, mientras que la respuesta del sistema con el control PD también depende del cero en $s = -K_P / K_D$, el cual puede tener un efecto significativo en el sobrepaso de la respuesta al escalón.

Con referencia al análisis en estado estable, la función de transferencia de la trayectoria directa del sistema con realimentación por tacómetro es:

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n + K_t\omega_n^2)} \qquad (10\text{-}211)$$

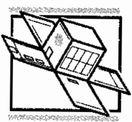
▲ Para un sistema tipo 1, la realimentación de tacómetro decrementa la constante de error-rampa, pero no afecta la constante de error al escalón.

Ya que el sistema es todavía de tipo 1, las características básicas del error en estado estable no se alteran por la realimentación por tacómetro; esto es, cuando la entrada es una función escalón, el error en estado estable es cero. Sin embargo, para una entrada función rampa, el error en estado estable es $(2\zeta + K_t\omega_n)/\omega_n$, mientras que el sistema con el control PD de la Fig. 10-3 es $2\zeta/\omega_n$. Por tanto, *para un sistema tipo 1, la realimentación por tacómetro reduce la constante de error rampa* K_v mientras que no afecta la constante de error escalón K_P.

10-11-2 Control realimentado de lazos menores mediante filtros activos

En lugar de emplear un tacómetro, para reducir costos y para ahorro de espacio, un filtro activo con elementos *RC* y amplificadores operacionales se puede emplear en el lazo menor de realimentación para compensación. Este enfoque se ilustra mediante el ejemplo siguiente.

Ejemplo 10-17



Considere que para el sistema rastreador solar de segundo orden en el ejemplo 10-9, en lugar de emplear un controlador en serie en la trayectoria directa, se adopta el control realimentado del lazo menor, como se muestra en la Fig. 10-72(a), con:

$$G_p(s) = \frac{2500}{s(s+25)} \qquad (10\text{-}212)$$

y

$$H(s) = \frac{K_t s}{1 + Ts} \qquad (10\text{-}213)$$

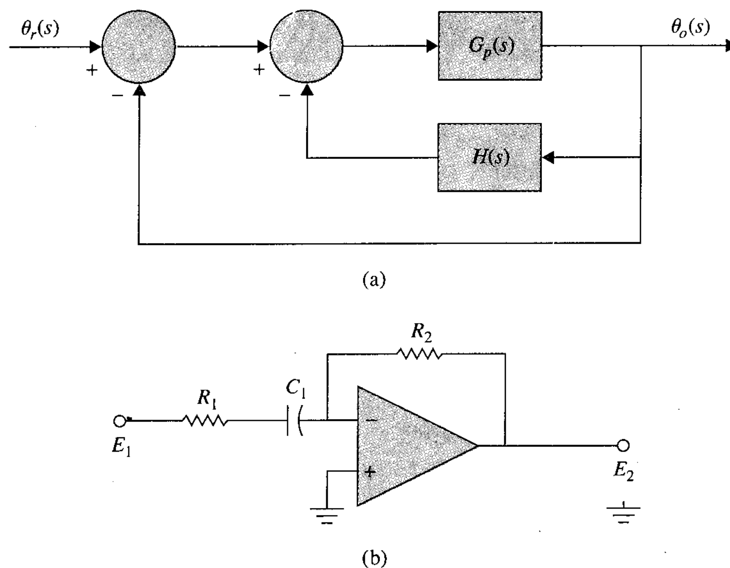


Figura 10-72 (a) Sistema de control rastreador solar con control de lazo menor. (b) Realización mediante un circuito con amplificadores operacionales de $K_t s/(1 + Ts)$.

Para mantener el sistema como tipo 1, es necesario que $H(s)$ contenga un cero en $s = 0$. La ecuación (10-213) se puede realizar mediante el circuito con amplificadores operacionales mostrado en la Fig. 10-72(b). Este circuito no se puede aplicar como un controlador en serie en la trayectoria directa, ya que actúa como circuito abierto en el estado estable cuando la frecuencia es cero. Como un controlador de lazo menor, la propiedad de transmisión cero a las señales de cd no involucra ningún problema.

La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema de la Fig. 10-72(a) es:

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_e(s)} = G(s) = \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)H(s)} = \frac{2500(1 + Ts)}{s[(s + 25)(1 + Ts) + 2500K_t]} \tag{10-214}$$

La ecuación característica del sistema es:

$$Ts^3 + (25T + 1)s^2 + (25 + 2500T + 2500K_t)s + 2500 = 0 \tag{10-215}$$

Para mostrar los efectos de los parámetros K_t y T, se construye el contorno de las raíces de la ecuación (10-215) al considerar primero que K_t es fija y T es variable. Al dividir ambos miembros de la ecuación (10-215) entre los términos que no contienen a T, se obtiene:

$$1 + \frac{Ts(s^2 + 25s + 2500)}{s^2 + (25 + 2500K_t)s + 5000} = 0 \tag{10-216}$$

Cuando el valor de K_t es relativamente grande, los dos polos de la última ecuación son reales, con uno muy cerca del origen. Es más efectivo escoger K_t para que los polos de la ecuación (10-216) sean complejos.

La Fig. 10-73 muestra los contornos de las raíces de la ecuación (10-215) con $K_t = 0.02$ y T varía desde 0 hasta ∞. Cuando $T = 0.006$, las raíces de la ecuación característica están en −56.72, $-67.47 + j52.85$ y $-64.47 - j52.85$. Los atributos de la respuesta al escalón unitario son:

$$\text{sobrepaso máximo} = 0\% \qquad t_r = 0.04485 \text{ s} \qquad t_s = 0.06061 \text{ s} \qquad t_{máx} = 0.4 \text{ s}$$

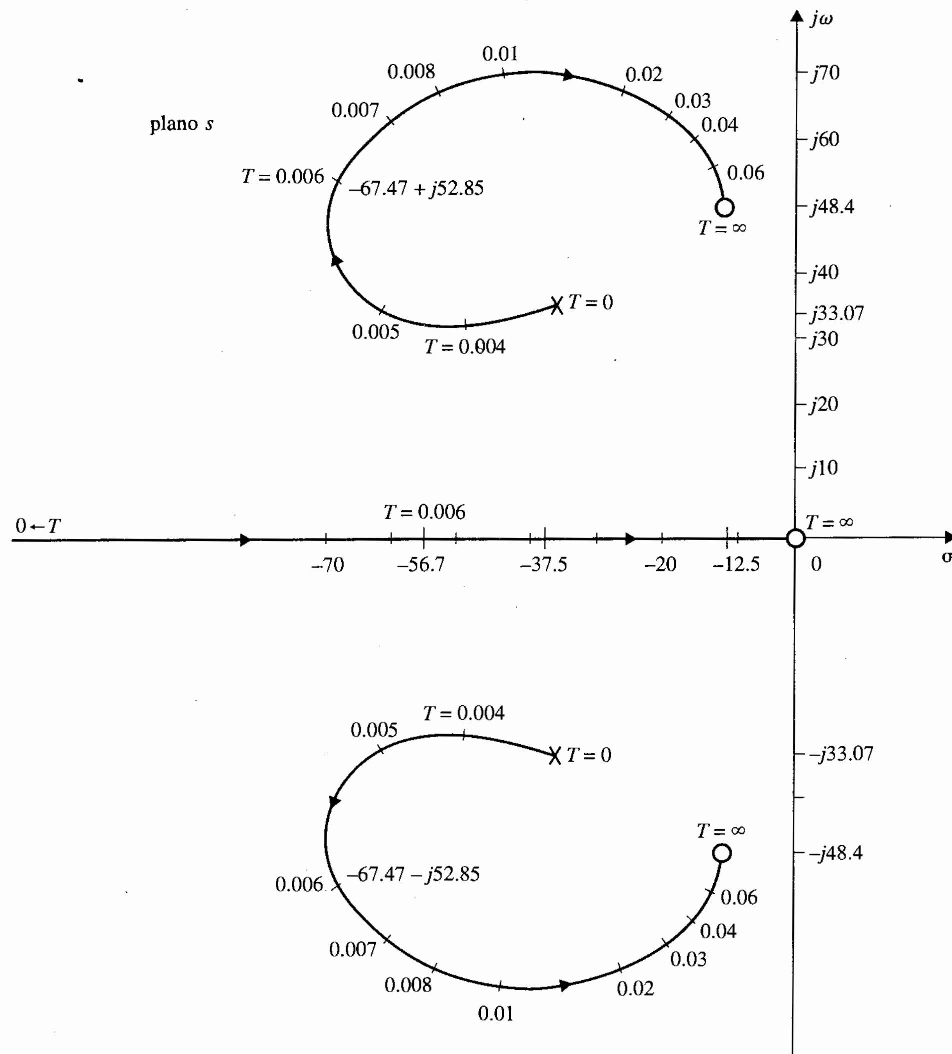


Figura 10-73 Contornos de las raíces de $Ts^3 + (25\,T + 1)s^2 + (25 + 2500\,K_t + 2500\,T)\,s + 2500 = 0$. $K_t = 0.02$.

La constante de error rampa del sistema es:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \frac{100}{1 + 100K_t} \tag{10-217}$$

Por tanto, así como con la realimentación por tacómetro, el controlador del lazo menor de realimentación de la ecuación (10-213) reduce la constante de error rampa K_v, aunque el sistema es aún de tipo 1. ▲

10-12 Control mediante la realimentación de estado

La mayoría de las técnicas de diseño en la teoría de control moderna están basadas en la configuración de la realimentación de estado. Esto es, en lugar de emplear controladores con configuración fija en las trayectorias directas o de realimentación, el control se realiza al realimentar las variables de estado a través de ganancias constantes. El diagrama de bloques de un sistema con control mediante la realimentación de estado se muestra en la Fig. 10-2(c). Un diagrama de bloques mas detallado se muestra en la Fig. 10-74.

Se puede mostrar que el control PID y el control realimentado por tacómetro discutidos anteriormente son casos especiales del esquema de control mediante la realimentación del estado. En el caso del control mediante la realimentación por tacómetro, se considera el sistema prototipo de segundo orden descrito en la ecuación (10-207). El proceso está descompuesto mediante descomposición directa y está representado por el diagrama de bloques de la Fig. 10-75(a). Si los estados $x_1(t)$ y $x_2(t)$ están físicamente accesibles, estas variables se pueden realimentar a través de ganancias constantes reales $-k_1$ y k_2, respectivamente, para formar el control $u(t)$, como se muestra en la Fig. 10-75(b). La función de transferencia del sistema con realimentación del estado es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n + k_2)s + k_1} \tag{10-218}$$

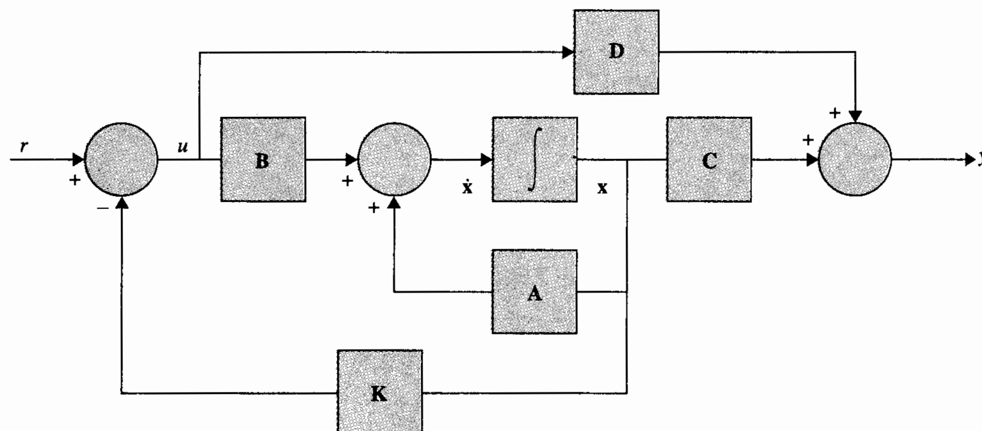


Figura 10-74 Diagrama de bloques del sistema de control mediante la realimentación de estado.

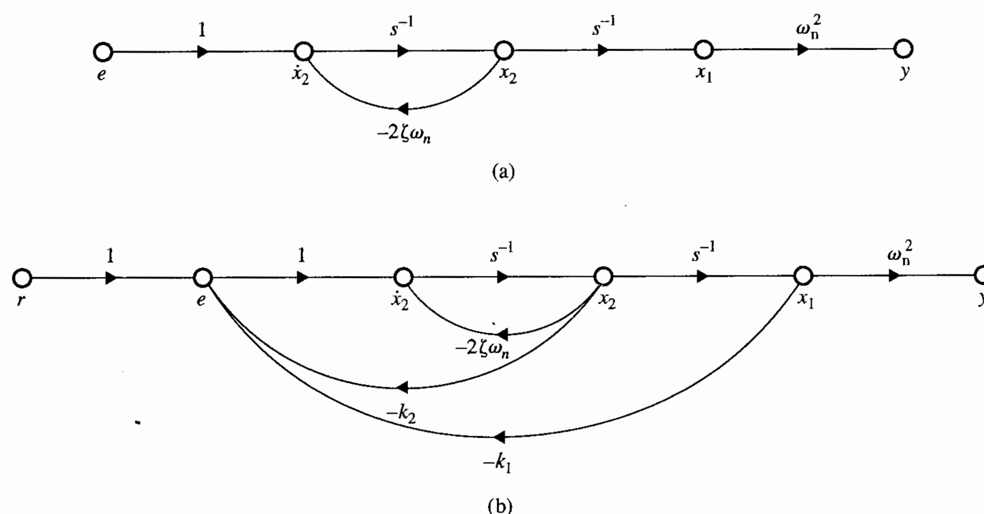


Figura 10-75 Control de un sistema de segundo orden con realimentación de estado.

Para propósitos de comparación, se presentan las funciones de transferencia de los sistema con realimentación por tacómetro, ecuación (10-208) y con el control PD de la ecuación (10-210) como sigue:

$$\text{Realimentación del tacómetro:} \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n + K_t\omega_n^2)s + \omega_n^2} \qquad (10\text{-}219)$$

$$\text{PD control:} \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2(K_P + K_D s)}{s^2 + (2\zeta\omega_n + K_D\omega_n^2)s + \omega_n^2 K_P} \qquad (10\text{-}220)$$

Por tanto, la realimentación por tacómetro es equivalente a la realimentación del estado si $k_1 = \omega_n^2$ y $k_2 = K_t\omega_n^2$. Al comparar la ecuación (10-218) con la ecuación (10-220), se observa que la ecuación característica del sistema con realimentación del estado sería idéntica a la del sistema con el control PD si $k_1 = \omega_n^2 K_P$ y $k_2 = K_D\, \omega_n^2$. Sin embargo, los numeradores de las dos funciones de transferencia son diferentes.

La clase de sistemas con entrada de referencia cero, $r(t) = 0$, se conocen por lo común como **reguladores.** Cuando $r(t) = 0$, el objetivo del control es llevar a cualesquiera condiciones iniciales del sistema a cero en alguna forma predeterminada: por ejemplo, tan rápido como sea posible. Entonces un sistema de segundo orden con control PD es lo mismo que el control mediante la realimentación de estado.

Se debe enfatizar que las comparaciones realizadas anteriormente son sólo para sistemas de segundo orden. Para sistemas de orden mayor, el control PD y el control mediante la realimentación por tacómetro son equivalentes a realimentar sólo las variables de estado x_1 y x_2, mientras que la realimentación de estado puede realimentar todas las variables de estado.

Ya que el control PI incrementa el orden del sistema en uno, no puede ser equivalente a la realimentación de estado a través de ganancias constantes. En la Sec. 10-14 se muestra que si se combina la realimentación de estado con el control integral se puede realizar el control PI en el sentido del control mediante la realimentación de estado.

10-13 Diseño por ubicación de polos a través de la realimentación de estado

Cuando el lugar geométrico de las raíces se emplea para diseñar sistemas de control, el enfoque general se puede describir como **ubicación de polos;** aquí los polos son los de la función de transferencia en lazo cerrado, que también son las raíces de la ecuación característica. Al conocer la relación entre los polos en lazo cerrado y el desempeño del sistema, se puede realizar el diseño al especificar la ubicación de los polos.

Los métodos de diseño estudiados en las secciones anteriores todos están caracterizados por la propiedad de que los polos se seleccionan con base en qué es lo que se puede alcanzar con la configuración fija y los límites físicos de los parámetros del controlador. Una pregunta natural sería: *¿Bajo qué condición los polos pueden ser colocados en forma arbitraria?* Esta es una filosofía nueva de diseño que en apariencia sólo se puede alcanzar bajo ciertas condiciones.

Cuando se tiene un proceso controlado de tercer orden o mayor, los controladores PD, PI, de adelanto de fase de una etapa o el de atraso de fase no son capaces de controlar en forma independiente todos los polos del sistema, ya que solo hay dos parámetros libres en cada uno de estos controladores.

Para investigar la condición requerida para colocar los polos en forma arbitraria en un sistema de orden n, se considera que el proceso está descrito por la ecuación siguiente:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \qquad (10\text{-}221)$$

donde $\mathbf{x}(t)$ es un vector de estado de $n \times 1$ y $u(t)$ es el control escalar. El control mediante la realimentación del estado es:

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + r(t) \qquad (10\text{-}222)$$

donde K es una matriz de realimentación de $1 \times n$ con elementos de ganancia constantes. Al sustituir la ecuación (10-222) en la ecuación (10-221), el sistema en lazo cerrado está representado por la ecuación de estado:

▲ Si un sistema es completamente de estado controlable, sus valores característicos pueden ser asignados de forma arbitraria a través de la realimentación de estado.

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t) \qquad (10\text{-}223)$$

A continuación se mostrará que si el par [**A, B**] es completamente controlable, existe una matriz K que puede dar un conjunto arbitrario de valores característicos de (**A** – **BK**); esto es, las n raíces de la ecuación característica:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}| = 0 \qquad (10\text{-}224)$$

se pueden ubicar en forma arbitraria. Para mostrar que esto es cierto, se hace referencia a la Sec. 5-8 donde se indica que si un sistema es por completo controlable, siempre se puede representar en la forma canónica controlable (FCC); esto es, en la ecuación (10-221):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10-225}$$

La matriz de ganancia de realimentación $\boldsymbol{K}$ se expresa como:

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n] \tag{10-226}$$

donde $k_1, k_2, \ldots, k_n$ son constantes reales. Entonces:

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 - k_1 & -a_1 - k_2 & -a_2 - k_3 & \cdots & -a_{n-1} - k_n \end{bmatrix} \tag{10-227}$$

Los valores característicos de **A** – **BK** se encuentran de la ecuación característica:

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})| = s^n + (a_{n-1} + k_n)s^{n-1} + (a_{n-2} + k_{n-1})s^{n-2} + \cdots + (a_0 + k_1) = 0 \tag{10-228}$$

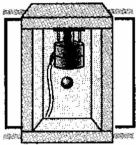
Claramente, los valores característicos se pueden asignar en forma arbitraria ya que las ganancias $k_1, k_2, \ldots, k_n$ están aisladas en cada coeficiente de la ecuación característica. En forma intuitiva, tiene sentido que un sistema deba ser controlable para que los polos sean colocados en forma arbitraria. Si una o más variables de estado no son controlables, los polos asociados con estas variables de estado también son no controlables y no se pueden mover como se desea. El ejemplo siguiente ilustra el diseño de un sistema de control mediante la realimentación del estado.

Ejemplo 10-18

Considere el sistema de suspensión magnética de una bola analizado en la Sec. 5-16. Este es un sistema regulador típico en el que el problema de control es mantener la bola es su posición de equilibrio. En la Sec. 5-16 se mostró que el sistema sin control es inestable.

El modelo de estado linealizado del sistema de suspensión magnética de una bola se representa mediante ecuaciones de estado:

$$\frac{d\,\Delta\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}^*\,\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^*\,\Delta v(t) \tag{10-229}$$



donde $\Delta \mathbf{x}(t)$ denota el vector de estado linealizado y $\Delta v(t)$ el voltaje de entrada linealizado. Las matrices de coeficientes son:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 64.4 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} \qquad (10\text{-}230)$$

Los valores característicos de $\mathbf{A}^*$ son $s = -100$, -8.025 y 8.025. Por tanto, el sistema sin control realimentado es inestable.

Se tienen las siguientes especificaciones de diseño:

1. El sistema debe ser estable.
2. Para cualquier perturbación inicial en la posición de la bola desde su posición de equilibrio, la bola debe regresar a la posición de equilibrio con error en estado estable cero.
3. La respuesta en el tiempo se debe establecer dentro del 5% de la perturbación inicial en no más de 0.5 s.
4. El control se debe realizar mediante la realimentación de estado.

$$\Delta v(t) = -\mathbf{K}\,\Delta \mathbf{x}(t) = -[k_1 \quad k_2 \quad k_3]\,\Delta \mathbf{x}(t) \qquad (10\text{-}231)$$

donde k_1, k_2 y k_3 son constantes reales.

Un diagrama de estado del sistema de suspensión en "lazo abierto" se muestra en la Fig. 10-76(a) y del mismo sistema pero en "lazo cerrado" con realimentación de estado se muestra en la Fig. 10-76(b). Se debe seleccionar la posición deseada de los valores característicos de $s\mathbf{I} - \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*K$ para que el requisito 3 sobre la respuesta en el tiempo sea satisfecho. Sin entrar al procedimiento de prueba y error, se puede comenzar con las decisiones siguientes:

1. La dinámica del sistema debe ser controlada por dos raíces dominantes.
2. Para alcanzar la respuesta relativamente rápida, las dos raíces dominantes deben ser complejas.
3. El amortiguamiento que es controlador por las partes reales de las raíces complejas debe ser adecuado, y las partes imaginarias deben ser lo suficiente grandes para que el transitorio decaiga con rapidez.

Después de unas pruebas mediante el empleo de la función **svdesign** de **CSAD/MATLAB,** se encuentra que las siguientes raíces de la ecuación característica satisfacen los requisitos de diseño:

$$s = -20 \qquad s = -6 + j4.9 \qquad s = -6 - j4.9$$

La ecuación característica correspondiente es:

$$s^3 + 32s^2 + 300s + 1200 = 0 \qquad (10\text{-}232)$$

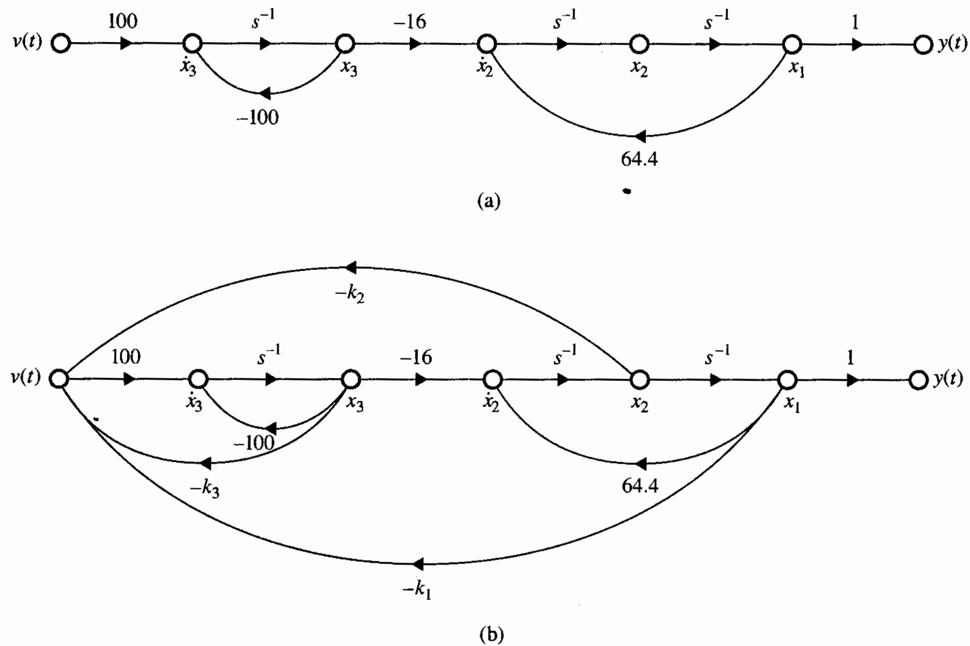


Figura 10-76 (a) Diagrama de estado del sistema de suspensión magnético de una bola. (b) Diagrama de estado de sistema de suspensión magnético de una bola con realimentación de estado.

La ecuación característica del sistema en lazo cerrado con realimentación de estado se escribe como:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*\mathbf{K}| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ -64.4 & s & 16 \\ 100k_1 & 100k_2 & s + 100 + 100k_3 \end{vmatrix} \tag{10-233}$$

$$= s^3 + 100(k_3 + 1)s^2 - (64.4 + 1600k_2)s - 1600k_1 - 6440(k_3 + 1) = 0$$

que también se puede obtener directamente de la Fig. 10-76(c) mediante el empleo de la fórmula de ganancia de las gráficas de flujo de señales. Al igualar los coeficientes de las ecuaciones (10-232) y (10-233), se obtienen las ecuaciones simultáneas siguientes:

$$\begin{aligned} 100(k_3 + 1) &= 32 \\ -64.4 - 1600k_2 &= 300 \\ -1600k_1 - 6440(k_3 + 1) &= 1200 \end{aligned} \tag{10-234}$$

Al resolver las tres últimas ecuaciones y asegurándose que las soluciones existen y son únicas, se obtiene la matriz de ganancias de realimentación:

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] = [-2.038 \quad -0.22775 \quad -0.68] \tag{10-235}$$

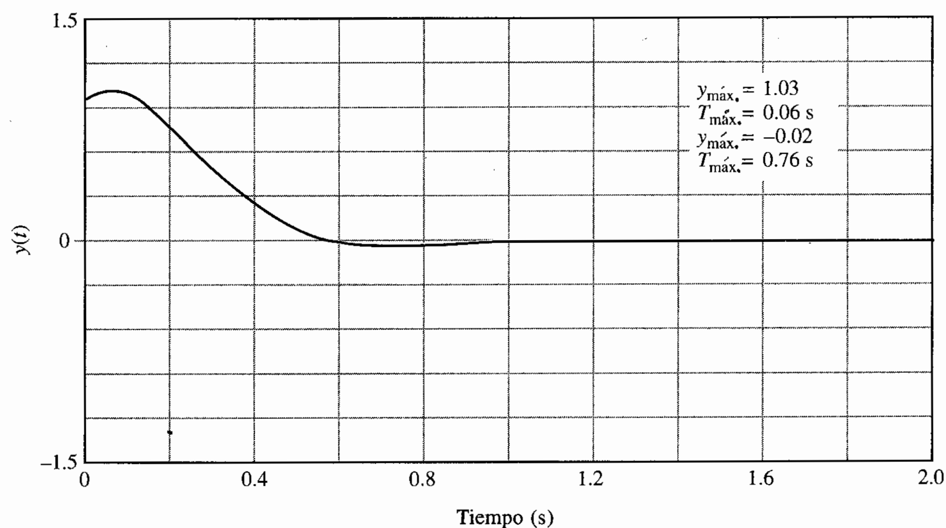


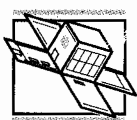
Figura 10-77 Respuesta del sistema de suspensión magnético de una bola con realimentación de estado, sujeto a las condiciones iniciales $y(0) = x_1(0) = 1$.

La Fig. 10-77 muestra que la respuesta de la salida $y(t)$ cuando el sistema está sujeto a la condición inicial:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (10\text{-}236)$$

▲

Ejemplo 10-19



En este ejemplo, se diseña un control mediante realimentación de estado para el sistema rastreador solar de segundo orden tratado en el ejemplo 10-9. La función de transferencia del proceso controlado está dada por la ecuación (10-131) con $K = 1$. El diagrama de estado del proceso en la FCC se muestra en la Fig. 10-78(a). El problema involucra el diseño por realimentación de estado con:

$$\theta_e(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) = -[k_1 \quad k_2]\mathbf{x}(t) \qquad (10\text{-}237)$$

Las ecuaciones de estado se representan en forma matricial como:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\theta_e(t) \qquad (10\text{-}238)$$

donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -25 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (10\text{-}239)$$

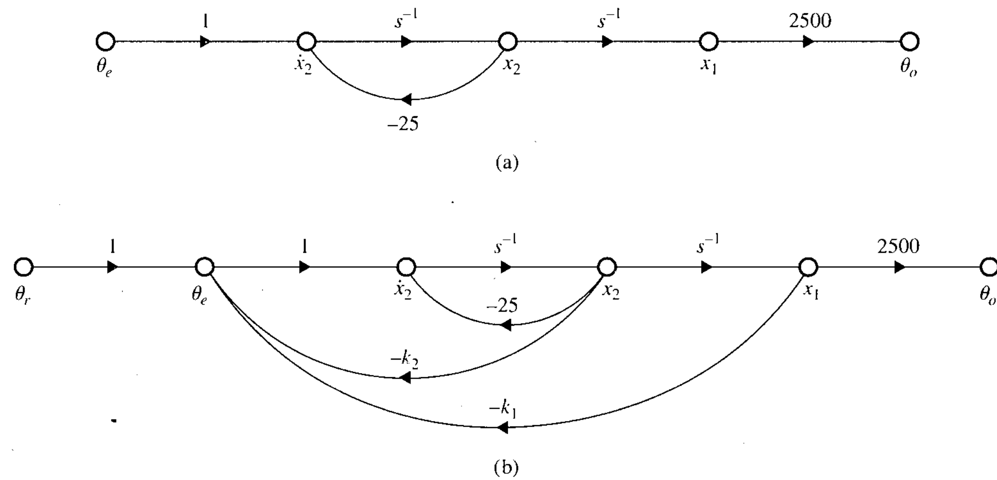


Figura 10-78 (a) Diagrama de estado del sistema rastreador solar de segundo orden. (b) Diagrama de estado del sistema rastreador solar de segundo orden con realimentación de estado.

La ecuación de salida es:

$$\theta_o(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \tag{10-240}$$

donde:

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0] \tag{10-241}$$

Los objetivos de diseño son:

1. El error en estado estable debido a una entrada función escalón debe ser igual a 0.
2. Con el control mediante la realimentación del estado, la respuesta al escalón unitario debe tener el sobrepaso, el tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamientos mínimos.

La función de transferencia del sistema con realimentación del estado se escribe como:

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{2500}{s^2 + (25 + k_2)s + k_1} \tag{10-242}$$

Para el error en estado estable cero para una entrada escalón, los términos constantes en el numerador y denominador deben ser iguales, o $k_1 = 2500$. Esto significa que aunque el sistema es por completo controlable, no se pueden asignar, en forma arbitraria, las dos raíces de la ecuación característica que ahora es:

$$s^2 + (25 + k_2)s + 2500 = 0 \tag{10-243}$$

En otras palabras, sólo una de las raíces de la ecuación (10-243) se puede asignar en forma arbitraria. El problema se resuelve mediante el empleo de **svdesign** de **CSAD/MATLAB.** Después de varias prue-

bas, se encuentra que el sobrepaso máximo, el tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamiento están todos al mínimo cuando $k_2 = 75$. Las dos raíces están en $s = -50$ y -50. Los atributos de la respuesta al escalón son:

$$\text{sobrepaso máximo} = 0 \text{ porciento} \qquad t_r = 0.06717 \text{ s} \qquad t_s = 0.09467 \text{ s}$$

La matriz de ganancia de realimentación de estado es:

$$\mathbf{K} = [2500 \quad 75] \tag{10-244}$$

▲ El control mediante la realimentación de estado produce un sistema tipo 0.

La lección que se aprende de este ejemplo ilustrativo es que el control mediante la realimentación del estado por lo general produce un sistema que es tipo 0. Para que el sistema siga una entrada escalón sin error en estado estable, lo cual requiere un sistema tipo 1 o mayor, la ganancia de realimentación k_1 del sistema en el diagrama de estado FCC no se puede asignar en forma arbitraria. Esto significa que para un sistema de orden n, sólo $n-1$ raíces de la ecuación característica se pueden ubicar en forma arbitraria. ▲

10-14 Realimentación de estado con el control integral

El control mediante la realimentación del estado tratado en la Sec. 10-13 tiene la deficiencia de que no mejora el tipo de sistema. Como resultado, el control mediante la realimentación de estado con ganancia de realimentación contante sólo es útil para sistemas reguladores en los cuales el sistema no sigue entradas si todas las raíces de la ecuación característica son ubicadas a voluntad.

En general, la mayoría de los sistemas de control debe seguir entradas. Una solución a este problema es introducir control integral, tal como el controlador PI, junto con la realimentación de estado. El diagrama de bloques de un sistema con realimentación de estado con ganancias constantes y con el control integral de la salida se muestra en la Fig. 10-79. El

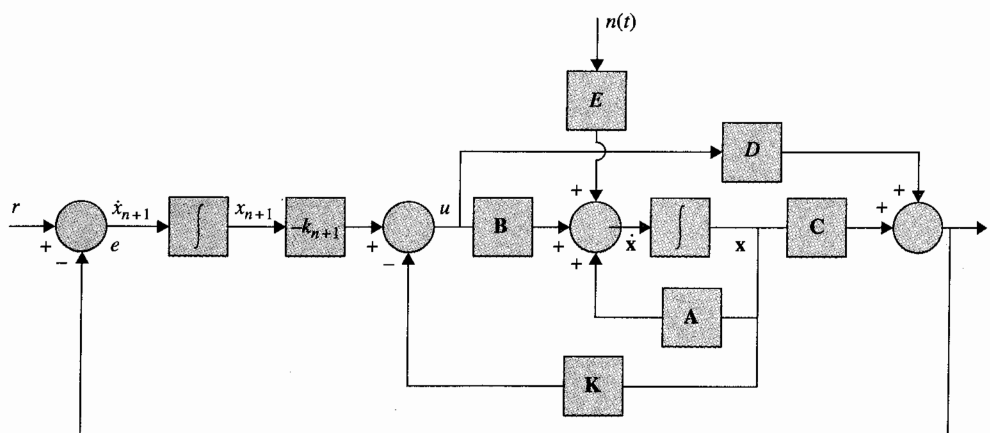


Figura 10-79 Diagrama de bloques del sistema de control con realimentación de estado y realimentación integral de la salida.

sistema también está sujeto a ruido en la entrada $n(t)$. Para un sistema SISO, el control integral añade un integrador al sistema. Como se muestra en la Fig. 10-79, la salida del integrador $(n + 1)$ se designa como x_{n+1}. Las ecuaciones dinámicas del sistema de la Fig. 10-79 se escriben como:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{E}n(t) \tag{10-245}$$

$$\frac{dx_{n+1}(t)}{dt} = r(t) - y(t) \tag{10-246}$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Du(t) \tag{10-247}$$

donde $\mathbf{x}(t)$ es el vector de estado de $n \times 1$; $u(t)$ e $y(t)$ son la señal de control escalar y la salida, respectivamente; $r(t)$ es la entrada de referencia escalar; y $n(t)$ es la entrada de perturbación escalar. Los coeficientes matrices se representan como **A, B, C, D** y **E,** con dimensiones adecuadas. La señal de control $u(t)$ esta relacionada con las variables de estado a través de realimentación constante de estado y realimentación integral:

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) - k_{n+1}x_{n+1}(t) \tag{10-248}$$

donde:

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad \cdots \quad k_n] \tag{10-249}$$

con elementos de ganancia reales constantes y k_{n+1} es la ganancia escalar de realimentación integral.

Al sustituir la ecuación (10-248) en la (10-245), y al combinar con la ecuación (10-246), las $n + 1$ ecuaciones de estado del sistema completo con ganancia constante y realimentación integral se escriben como:

$$\frac{d\overline{\mathbf{x}}(t)}{dt} = (\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{B}\mathbf{K}})\overline{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t) + \overline{\mathbf{E}}n(t) \tag{10-250}$$

donde:

$$\overline{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_{n+1}(t)}{dt} \end{bmatrix} \quad [(n+1) \times 1] \tag{10-251}$$

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \quad [(n+1) \times (n+1)] \qquad \overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ D \end{bmatrix} \quad [(n+1) \times 1] \tag{10-252}$$

$$\overline{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \quad k_{n+1}] = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n \quad k_{n+1}] \quad [1 \times (n+1)] \tag{10-253}$$

$$\overline{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ 0 \end{bmatrix} \quad [(n+1) \times 1] \tag{10-254}$$

Al sustituir la ecuación (10-248) en la (10-247), la ecuación de salida del sistema completo se escribe como:

$$y(t) = \overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{x}}(t) \tag{10-255}$$

donde:

$$\overline{\mathbf{C}} = [\mathbf{C} - D\mathbf{K} \quad D\mathbf{K}] \quad [1 + (n+1)] \tag{10-256}$$

Los objetivos de diseño son:

1. El valor en estado estable de la salida $y(t)$ siga a la entrada función escalón con error cero; esto es:

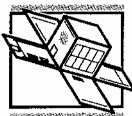
$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = 0 \tag{10-257}$$

2. Los $n+1$ valores característicos de $(\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{BK}})$ estén colocados en los lugares deseados.

Para que la última condición sea posible, el par $[\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}]$ debe ser por completo controlable.

Los ejemplos siguientes ilustran las aplicaciones de la realimentación de estado con el control integral.

Ejemplo 10-20



En el ejemplo 10-19 se demostró el control mediante la realimentación de estado con ganancias constantes, el sistema rastreador solar de segundo orden tiene una de sus dos raíces colocada a voluntad para que el sistema siga una entrada escalón sin error en estado estable. Ahora se considera el mismo sistema rastreador solar de segundo orden del ejemplo 10-19 excepto que se añade un control integral en la trayectoria directa. El diagrama de estado del sistema completo es muestra en la Fig. 10-80. Los coeficientes matrices son:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [2500 \quad 0] \quad D = 0 \tag{10-258}$$

De la ecuación (10-252):

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -25 & 0 \\ -2500 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10-259}$$

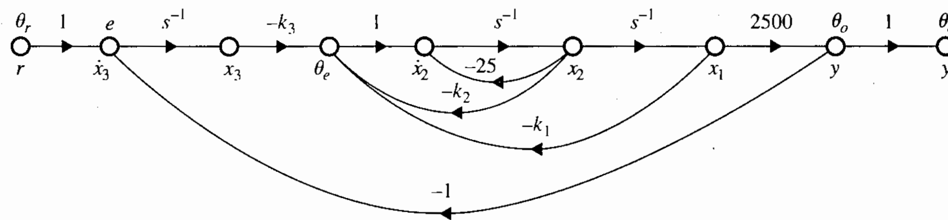


Figura 10-80 Sistema rastreador solar con realimentación de estado y control integral del ejemplo 10-20.

Se puede mostrar que el par $[\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}]$ es completamente controlable. Por tanto, los valores característicos de $(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{BK}})$ se pueden colocar en forma arbitraria. Al sustituir $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}$, y $\bar{\mathbf{K}}$ en la ecuación característica del sistema en lazo cerrado con realimentación del estado e integral, se tiene:

$$
\begin{aligned}
|s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{BK}}| &= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ k_1 & s + 25 + k_2 & k_3 \\ -2500 & 0 & s \end{vmatrix} \\
&= s^3 + (25 + k_2)s^2 + k_1 s + 2500k_3 = 0
\end{aligned}
\tag{10-260}
$$

que también se encuentra de la Fig. 10-80 mediante la fórmula de ganancia de las gráficas de flujo de señales.

Los objetivos de diseño son:

1. La salida en estado estable debe seguir una función escalón con error cero.
2. El tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamiento deben ser menores que 0.05 s.
3. El sobrepaso máximo de la respuesta al escalón debe ser menor que 5 porciento.

Como las tres raíces de la ecuación característica se pueden colocar en forma arbitraria, no es realista requerir tiempos de levantamiento y asentamiento mínimos, como en el ejemplo 10-19.

Otra vez, para obtener tiempos de levantamiento y asentamiento cortos, las raíces de la ecuación característica deben colocarse a la izquierda lejos en el plano s, y la frecuencia natural debe ser alta. Se debe tener en mente que *las raíces con magnitudes grandes producirán ganancias grandes de la matriz de realimentación de estado.*

La función **svdesign** de **CSAD/MATLAB** se puede emplear para realizar un diseño eficiente. Después de varias pruebas, las especificaciones de diseño se satisfacen al colocar las raíces en:

$$s = -200 \qquad -50 + j50 \quad \text{y} \quad -50 - j50$$

La ecuación característica deseada es:

$$s^3 + 300s^2 + 25\,000s + 1\,000\,000 = 0 \tag{10-261}$$

Al igualar los coeficientes de las ecuaciones (10-260) y (10-261), se obtiene:

$$k_1 = 25\,000 \qquad k_2 = 275 \quad \text{y} \quad k_3 = 400$$

Los atributos de la respuesta al escalón unitario son:

sobrepaso máximo = 4 porciento $\quad t_r = 0.03247$ s $\quad t_s = 0.04667$ s

Observe que la alta ganacia de realimentación de k_1, la cual se debe a los valores grandes de las raíces seleccionados, puede dar problemas físicos; si así fuera, se deben revisar las especificaciones de diseño. ▲

Ejemplo 10-21

En este ejemplo se ilustra la aplicación de la realimentación de estado con el control integral a un sistema con una entrada de perturbación.

Considere un motor de cd que está descrito por las ecuaciones de estado siguientes:

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{-B}{J}\omega(t) + \frac{K_i}{J}i_a(t) - \frac{1}{J}T_L u_s(t) \tag{10-262}$$

$$\frac{di_a(t)}{dt} = \frac{-K_b}{L}\omega(t) - \frac{R}{L}i_a(t) + \frac{1}{L}e_a(t) \tag{10-263}$$

donde:

$i_a(t)$ = corriente de la armadura, A
$e_a(t)$ = voltaje aplicado a la armadura, V
$\omega(t)$ = velocidad de la armadura, rad/s
B = coeficiente de fricción viscosa del motor y la carga = 0
J = momento de inercia del motor y la carga = 0.02 N-m/rad/s^2
K_i = constante de par del motor = 1 N-m/A
K_b = constante de fuerza contraelectromotriz = 1 V/rad/s
T_L = par de carga constante (magnitud no conocida), N-m
L = inductancia de la armadura = 0.005 H
R = resistencia de la armadura = 1 Ω

La ecuación de salida es:

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = [1 \quad 0]\mathbf{x}(t) \tag{10-264}$$

El problema de diseño es encontrar el control $u(t) = e_a(t)$ a través de realimentación de estado y control integral tal que:

$$\textbf{1.}\ \lim_{t\to\infty} i_a(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty}\frac{d\omega(t)}{dt} = 0 \tag{10-265}$$

2. $\lim_{t\to\infty} \omega(t)$ = entrada escalón = $r(t) = u_s(t)$

3. Los valores propios del sistema en lazo cerrado con realimentación de estado y control integral estén en $s = -300, -10 + j10$ y $-10 - j10$.

Las variables de estado se definen como $x_1(t) = \omega(t)$ y $x_2(t) = i_a(t)$. Las ecuaciones de estado de las ecuaciones (10-262) y (10-263) se escriben en forma matricial.

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{E}n(t) \tag{10-267}$$

donde $n(t) = T_L u_s(t)$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\dfrac{B}{J} & \dfrac{K_i}{J} \\ -\dfrac{K_b}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 50 \\ -200 & -200 \end{bmatrix} \quad (10\text{-}268)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix} \quad (10\text{-}269)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10\text{-}270)$$

De la ecuación (10-252):

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 0 \\ -200 & -200 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10\text{-}271)$$

$$\overline{\mathbf{C}} = [\mathbf{C} - D\mathbf{K} \quad D\mathbf{K}] = [1 \quad 0 \quad 0] \qquad \overline{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10\text{-}272)$$

El control está dado por:

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) - k_{n+1}x_{n+1}(t) = \overline{\mathbf{K}}\mathbf{x}(t) \quad (10\text{-}273)$$

donde:

$$\overline{\mathbf{K}} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] \quad (10\text{-}274)$$

La Fig. 10-81 muestra el diagrama de estado del sistema diseñado completo. El coeficiente matriz del sistema en lazo cerrado es:

$$\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 0 \\ -200 - 200k_1 & -200 - 200k_2 & -200k_3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10\text{-}275)$$

La ecuación característica es:

$$|s\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{K}}| = s^3 + 200(1 + k_2)s^2 + 10\,000(1 + k_1)s - 10\,000k_3 = 0 \quad (10\text{-}276)$$

la cual se determina más fácil al aplicar la fórmula de ganancia de las gráficas de flujo de señales a la Fig. 10-81.

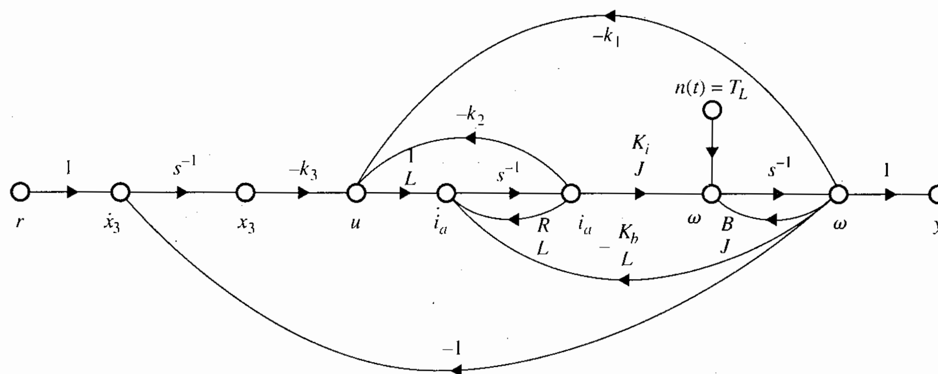


Figura 10-81 Sistema de control del motor de cd con realimentación de estado y control integral y par con perturbación del ejemplo 10-21.

Para las tres raíces asignadas, la última ecuación debe ser igual a:

$$s^3 + 320s^2 + 6200s + 60\,000 = 0 \tag{10-277}$$

Al igual los coeficientes de las ecuaciones (10-276) y (10-277), se obtiene:

$$k_1 = -0.38 \qquad k_2 = 0.6 \qquad k_3 = -6.0$$

Al aplicar la fórmula de ganancia a la gráfica de flujo de señales de la Fig. 10-81 entre las entradas $r(t)$ y $n(t)$ y los estados $\omega(t)$ y $i_a(t)$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \Omega(s) \\ I_a(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_c(s)} \begin{bmatrix} -\frac{1}{J}\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k_2}{L}s\right) & -\frac{k_3 K_i}{JL} \\ -\frac{1}{J}\left(-\frac{K_b}{L}s - \frac{k_1}{L}s + \frac{k_3}{L}\right) & -\frac{k_3}{L}\left(s + \frac{B}{J}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{T_L}{s} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix} \tag{10-278}$$

donde $\Delta_c(s)$ es el polinomio de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado.

Al aplicar el teorema del valor final a la última ecuación, los valores en estado estable de las variables de estado son:

$$\lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} = \lim_{s\to 0} s \begin{bmatrix} \Omega(s) \\ I_a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K_i \\ 1 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_L \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ T_L \end{bmatrix} \tag{10-279}$$

Por tanto, la velocidad del motor $\omega(t)$ se aproxima a la entrada de referencia constante función escalón $r(t) = u_s(t)$ cuando t se aproxima al infinito, independientemente del par de perturbación T_L. Al sustituir

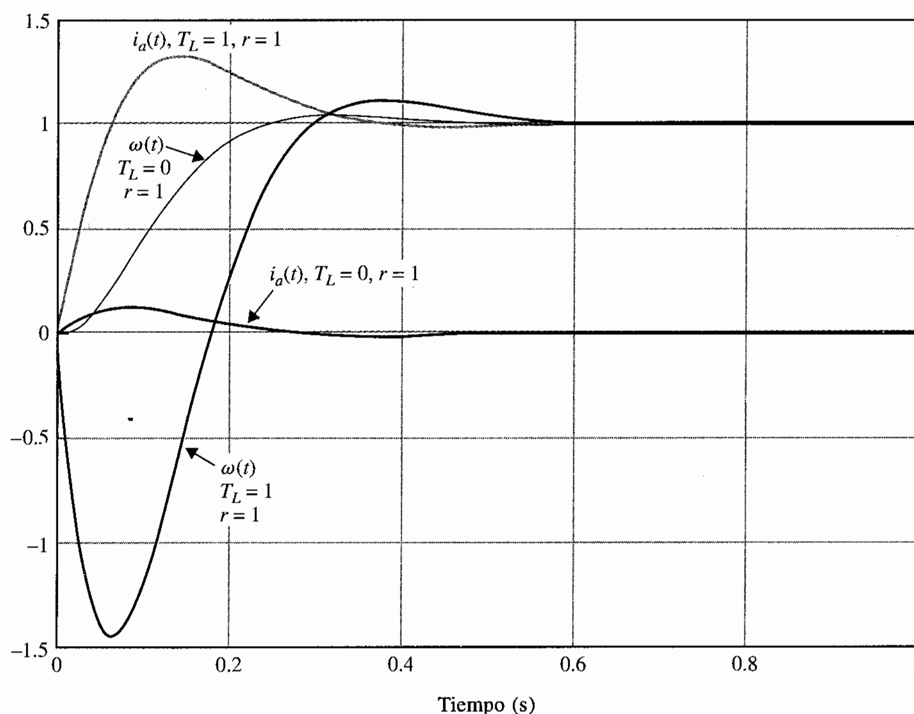


Figura 10-82 Respuestas en el tiempo del sistema de control del motor de cd con realimentación de estado y control integral y par con perturbación del ejemplo 10-21.

los parámetros del sistema en la ecuación (10-278), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \Omega(s) \\ I_a(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_c(s)} \begin{bmatrix} -50(s+320)s & 60{,}000 \\ 6200s + 60{,}000 & 1200s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{T_L}{s} \\ \dfrac{1}{s} \end{bmatrix} \qquad (10\text{-}280)$$

donde Δ_c (s) es el primer miembro de la ecuación (10-277). La Fig. 10-82 muestra las respuestas en el tiempo de $\omega(t)$ y $i_a(t)$ cuando $T_L = 1$ y $T_L = 0$. La entrada de referencia es una función escalón unitario. ▲

10-15 Resumen

Este capítulo está dedicado al diseño de sistemas lineales de control. El capítulo comienza dando algunas consideraciones fundamentales sobre el diseño del sistema. Se revisan las especificaciones en los dominios del tiempo y la frecuencia. Se ilustran los esquemas de configuración fija empleados en la práctica, tales como serie, en la trayectoria directa y prealimentada, realimentada y de lazo menor y de

realimentación de estado. Los tipos de controladores considerados son el PD, PI, PID, adelanto de fase, atraso de fase, adelanto-atraso, cancelación de polos y ceros y filtro de muesca. Los diseños se realizan tanto en el dominio del tiempo /dominio s como en el dominio de la frecuencia. El diseño en el dominio del tiempo se caracteriza por especificaciones como el factor de amortiguamiento relativo, sobrepaso máximo, tiempo de levantamiento, tiempo de retardo, tiempo de asentamiento, o simplemente, la localización de las raíces de la ecuación característica, manteniendo en mente que los ceros de la función de transferencia del sistema también afectan la respuesta transitoria. El desempeño se mide generalmente mediante la respuesta al escalón y el error en estado estable. Los diseños en el dominio de la frecuencia se realizan normalmente mediante el empleo de las trazas de Bode, o las trazas de ganancia-fase. Las especificaciones de diseño en el dominio de la frecuencia son el margen de fase, el margen de ganancia, M_r, BW, etcétera.

Se demostró el efecto de reducción del ruido y perturbaciones del control prealimentado. Una sección está dedicada al diseño de sistemas de control robusto. Se discutió la realimentación de estado a través de ganancias constantes y con realimentación dinámica. El diseño por realimentación del estado es más versátil que el diseño de controladores de configuración fija convencionales ya que se controla directamente la ecuación característica. Un sistema inestable que es controlable, siempre se puede estabilizar mediante control mediante la realimentación de estado. La desventaja con la realimentación de estado es que todos los estados deben detectarse y realimentarse para control, lo cual puede no ser práctico.

Aunque las técnicas de diseño cubiertas en este capítulo se describen con procedimientos analíticos, el material promueve con fuerza el empleo de computadoras. La disponibilidad de programas de computadora amigables ha cambiado totalmente la complejidad del diseño de sistemas de control.

Preguntas de repaso

1. ¿Qué es un controlador PD? Escriba su función de transferencia entrada-salida.
2. Un controlador PD tiene las constantes K_D y K_P. Indique los efectos de estas constantes sobre el error en estado estable de un sistema. ¿El control PD cambia el tipo de sistema?
3. Indique los efectos del control PD sobre el tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamiento de un sistema de control.
4. ¿Cómo afecta el control PD al ancho de banda de un sistema de control?
5. Una vez que el valor de K_D de un controlador PD está fijo, al incrementar el valor de K_P se incrementa el margen de fase en forma monótona. (V) (F)
6. Si un controlador PD es diseñado para que las raíces de la ecuación característica tengan mejor amortiguamiento que el sistema original, el sobrepaso máximo del sistema siempre se reduce. (V) (F)
7. ¿Qué significa cuando un sistema se describe como robusto?
8. Un sistema compensado con un controlador PD es por lo regular más robusto que un sistema compensado con un controlador PI. (V) (F)
9. ¿Qué es un controlador PI? Escriba su función de transferencia entrada-salida.
10. Un controlador PI tiene las constantes K_P y K_I. Indique los efectos del controlador PI sobre el error en estado estable de un sistema. ¿El controlador PI cambia el tipo de sistema?
11. Indique los efectos del control PI sobre el tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamiento de un sistema de control.
12. ¿Cómo afecta el controlador PI al ancho de banda de un sistema?
13. ¿Qué es un controlador PID? Escriba su función de transferencia entrada-salida.

R

14. Indique las limitaciones del controlador de adelanto de fase.
15. ¿Cómo afecta el controlador de adelanto de fase al ancho de banda de un sistema?
16. Indique los efectos generales del controlador de adelanto de fase sobre los tiempos de levantamiento y asentamiento.
17. Para el controlador de adelanto de fase, $G_c(s) = (1 + aTs)/(1 + Ts)$, $a > 1$, ¿cuál es el efecto del controlador sobre el desempeño en estado estable del sistema?
18. El controlador de atraso de fase es por lo general menos efectivo si el sistema no compensado es muy inestable para comenzar con él. **(V) (F)**
19. La fase máxima que está disponible en un controlador de adelanto de fase de una etapa es 90°. **(V) (F)**
20. El objetivo de diseño de un controlador de adelanto de fase es colocar el adelanto de fase máximo en la nueva frecuencia de cruce de ganancia. **(V) (F)**
21. El objetivo de diseño de un controlador de adelanto de fase es colocar el adelanto de fase máximo en la frecuencia en donde la magnitud del sistema no compensado $G_p(j\omega)$ es $-10 \log_{10} a$, donde a es la ganancia del controlador de adelanto de fase. **(V) (F)**
22. El controlador de adelanto de fase puede no ser efectivo si la pendiente negativa de la función de transferencia es demasiado inclinada cerca de la frecuencia de cruce de ganancia. **(V) (F)**
23. Para el controlador de atraso de fase, $G_c(s) = (1 + aTs)/(1 + Ts)$, $a < 1$, ¿cuál es el efecto del controlador sobre el desempeño en estado estable del sistema?
24. Indique los efectos generales del controlador de atraso de fase sobre el tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamiento.
25. ¿Cómo afecta el controlador de atraso de fase al ancho de banda?
26. Para un controlador de atraso de fase, si el valor de T es grande y el valor de a es pequeño, es equivalente a añadir una atenuación pura a al sistema no compensado original en las frecuencias bajas. **(V) (F)**
27. El principio de diseño del controlador de atraso de fase es emplear la propiedad de atenuación de frecuencia cero del controlador. **(V) (F)**
28. Las frecuencias de corte del controlador de atraso de fase no deben ser muy bajas o el ancho de banda del sistema será muy bajo. **(V) (F)**
29. Indique las limitaciones del esquema de cancelación de polos y ceros.
30. ¿Cómo está relacionada la función de sensibilidad con el ancho de banda del sistema?

Las respuestas a las preguntas verdadero-falso se dan a continuación de la sección de problemas.

Referencias

1. **J. C. WILLEMS and S. K. MITTER,** ''Controllability, Observability, Pole Allocation, and State Reconstruction,'' *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-16, pp. 582–595, Dec. 1971.
2. **H. W. SMITH and E. J. DAVISON,** ''Design of Industrial Regulators,'' *Proc. IEE (London),* Vol. 119, pp. 1210–1216, Aug. 1972.
3. **F. N. BAILEY and S. MESHKAT,** ''Root Locus Design of a Robust Speed Control,'' *Proc. Incremental Motion Control Symposium,* pp. 49–54, June 1983.

Problemas

La mayoría de los problemas siguientes se pueden resolver mediante el empleo de un programa de computadora. Esto es muy recomendable si el lector tiene acceso a tal programa.

▲ Diseño de controlador en serie para satisfacer los requerimientos de error en estado estable.

10-1. El diagrama de bloques de un sistema de control con un controlador en serie se muestra en la Fig. 10P-1. Encuentre la función de transferencia del controlador $G_c(s)$ de forma que las especificaciones siguientes sean satisfechas:

La constante de error rampa K_v es 5.
La función de transferencia en lazo cerrado es de la forma:

$$M(s) = \frac{Yh(s)}{R(s)} = \frac{K}{(s^2 + 20s + 200)(s + a)}$$

donde K y a son constantes reales. Encuentre los valores de K y a.
La estrategia de diseño es colocar los polos en lazo cerrado en $-10 + j10$ y $-10 - j10$, y ajustar los valores de K y a para satisfacer el requisito de error en estado estable. Por tanto la función de transferencia en lazo cerrado es la función especificada. El valor de a es grande por lo que no afectará la respuesta transitoria en forma apreciable. Encuentre el sobrepaso máximo del sistema diseñado.

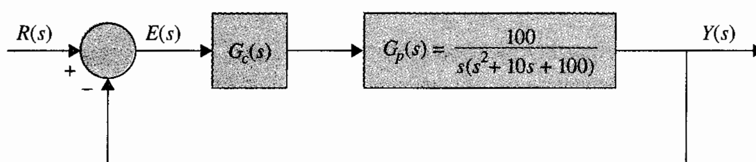


Figura 10P-1

▲ Diseño de controlador en serie para satisfacer los requerimientos de error en estado estable.

10-2. Repita el problema 10-1 si la constante de error rampa es 9. ¿Cuál es el valor máximo de K_v, que se puede obtener? Comente sobre las dificultades que pueden salir al intentar obtener un valor grande de K_v.

▲ Diseño de sistemas con controlador PD.

10-3. Un sistema de control con un controlador PD se muestra en la Fig. 10P-3.

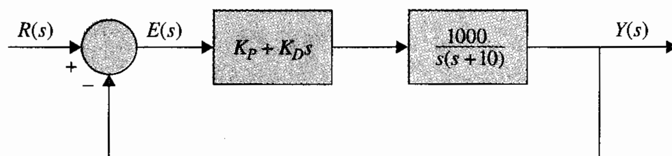


Figura 10P-3

(a) Encuentre los valores de K_P y K_D tal que la constante de error rampa K_v sea 1000 y el factor de amortiguamiento relativo sea 0.5.

(b) Encuentre los valores de K_P y K_D tal que la constante de error rampa K_v sea 1000 y el factor de amortiguamiento relativo sea 0.707.

(c) Encuentre los valores de K_P y K_D tal que la constante de error rampa K_v sea 1000 y el factor de amortiguamiento relativo sea 1.0.

▲ Diseño de sistemas con controlador PD

10-4. Para el sistema de control mostrado en la Fig. 10P-3, ajuste el valor de K_P tal que la constante de error rampa sea 10,000. Varíe el valor de K_D de 0.2 a 1.0 en incrementos de 0.2 y determine los valores del margen de fase, margen de ganancia, M_r, BW y el sobrepaso máximo de la respuesta al escalón del sistema.

▲ Diseño de sistema de control de localización de un aeronave con controlador PD.

10-5. Considere el modelo de segundo orden del sistema de control de altitud de un aeronave mostrado en la Fig. 7-24. La función de transferencia del proceso es:

$$G_p(s) = \frac{4500K}{s(s + 361.2)}$$

(a) Diseñe un controlador PD en serie con la función de transferencia $G_c(s) = K_D + K_P s$ tal que las especificaciones sean satisfechas:

Error en estado estable debido a una entrada rampa unitaria ≤ 0.001
Sobrepaso máximo ≤ 5 porciento
Tiempo de levantamiento $t_r \leq 0.005$ s.
Tiempo de asentamiento $t_s \leq 0.005$ s.

(b) Repita la parte (a) para todas las especificaciones dadas y además, el ancho de banda del sistema debe ser menor que 850 rad/s.

▲ Diseño del sistema de control de nivel de líquidos con controlador PD.

10-6. La Fig. 10P-6 muestra el diagrama de bloques del sistema de control de líquido descrito en los problemas 6-13 y 7-29. El número de flujos de entrada se denota como N. Considere $N = 20$. Diseñe un controlador PD tal que con una entrada escalón unitario, el tanque se llene dentro del 5% del nivel de referencia en menos de 3 s sin sobrepaso.

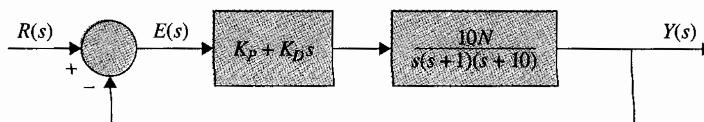


Figura 10P-6

▲ Diseño del sistema de control de nivel de líquidos con controlador PD.

10-7. Para el sistema de control de nivel de líquido descrito en el problema 10-6:

(a) Ajuste K_P para que la constante de error rampa sea 1. Varíe el valor de K_D desde 0 hasta 0.5 y encuentre el valor de K_D que produce el margen de fase máximo. Obtenga el valor del margen de fase, M_r y BW.

(b) Dibuje la gráfica de la función de sensibilidad $|S_G^M(j\omega)|$ del sistema no compensado y del sistema compensado con los valores de K_D y K_P determinados en la parte (a). ¿Cómo afecta el controlador PD a la sensibilidad?

▲ Diseño de un sistema con controlador PI

10-8. Un sistema de control con un proceso $G_p(s)$ de tipo 0 y un controlador PI se muestra en la Fig. 10P-8.

(a) Encuentre el valor de K_I tal que la constante de error rampa K_v sea 10.
(b) Encuentre el valor de K_P tal que la magnitud de las partes imaginarias de las raíces complejas de la ecuación característica del sistema sea 15 rad/s. Encuentre las raíces de la ecuación característica.
(c) Bosqueje los contornos de las raíces de la ecuación característica con el valor de K_I determinado en la parte (a) y para $0 \leq K_P \leq \infty$.

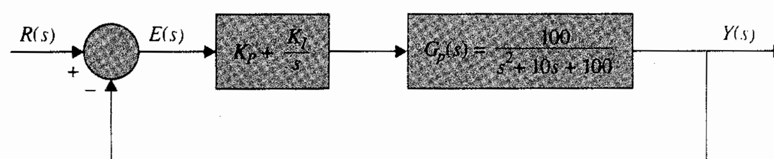


Figura 10P-8

▲ Diseño de un sistema con controlador PI

10-9. Para el sistema de control descrito en el problema 10-8:

(a) Ajuste K_I tal que la constante de error rampa sea 10. Encuentre el valor de K_P tal que el margen de fase sea máximo. Obtenga los valores del margen de fase, margen de ganancia, M_r y BW. ¿Cómo está relacionado el valor óptimo de K_P con los contornos de las raíces construido en el problema 10-8(c)?
(b) Dibuje la gráfica de sensibilidad $|S_G^M(j\omega)|$ de los sistemas compensado y no compensado con los valores de K_I y K_P seleccionados en la parte (a). Comente sobre el efecto del control PI sobre la sensibilidad.

▲ Diseño de sistemas con controlador PI

10-10. Para el sistema de control mostrado en la Fig. 10P-8:

(a) Encuentre el valor de K_I tal que la constante de error rampa K_v sea 100.
(b) Con el valor de K_I encontrado en la parte (a), encuentre el valor crítico de K_P tal que el sistema sea estable. Bosqueje el contorno de las raíces de la ecuación característica para $0 \leq K_P < \infty$.
(c) Muestre que el sobrepaso máximo es alto para valores grandes y pequeños de K_P. Emplee el valor de K_I encontrado en la parte (a). Encuentre el valor de K_P cuando el sobrepaso máximo es mínimo. ¿Cuál es el valor del sobrepaso máximo?

▲ Diseño de sistemas con controlador PI

10-11. Repita el problema 10-10 para $K_v = 10$.

▲ Diseño de sistemas con controlador PID

10-12. Un sistema de control con un proceso tipo 0 y un controlador PID se muestran en la Fig. 10P-12. Diseñe los parámetros del controlador tal que las siguientes especificaciones sean satisfechas:

Constante de error rampa $K_v = 100$ Sobrepaso máximo < 2 porciento
Tiempo de levantamiento $t_r < 0.01$ s.

Dibuje la gráfica de la respuesta al escalón unitario del sistema.

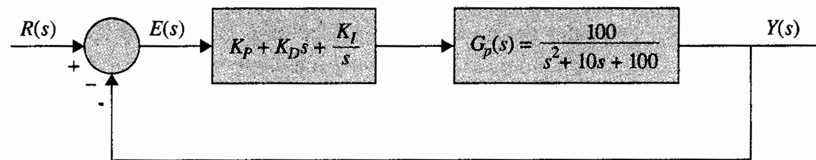


Figura 10P-12



▲ Diseño del control del motor de un auto.

10-13. Los fabricantes de automóviles han invertido un gran esfuerzo para cumplir con los estándares de desempeño de emisiones establecidos por el gobierno. Los sistemas de potencia de los automóviles modernos consisten de un motor de combustión interna que tiene un dispositivo de limpieza interno denominado convertidor catalítico. Este sistema requiere un control de relación aire/combustible (A/F), del tiempo de encendido de las bujías, la recirculación de los gases de escape y la inyección de aire. El problema de sistemas de control considerado en este ejercicio trata con el control de la relación aire/combustible. En general, en función de la composición del combustible y otros factores, una relación estequiométrica A/F es 14.7:1, esto es, 14.7 gramos de aire por cada gramo de combustible. Un valor de A/F mayor o menor podría causar que gran cantidad de hidrocarburos, monóxido de carbono y óxidos de nitrógeno aparezcan en el tubo de escape. El sistema de control, cuyo diagrama de bloques se muestra en la Fig. 10P-13, se considera para controlar la relación aire/combustible tal que la salida deseada sea mantenida para un mandato de entrada. La Fig. 10P-13 muestra que el detector mide la composición de la mezcla de los gases de escape que entran al convertidor catalítico. El controlador electrónico detecta la diferencia o el error entre las señales de comando y la del detector y calcula la señal de control necesaria para alcanzar la composición de los gases de escape deseada. La variable de salida $y(t)$ denota la relación aire/combustible. La función de transferencia del motor está dada por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_p(s) = \frac{e^{-T_d s}}{1 + \tau s}$$

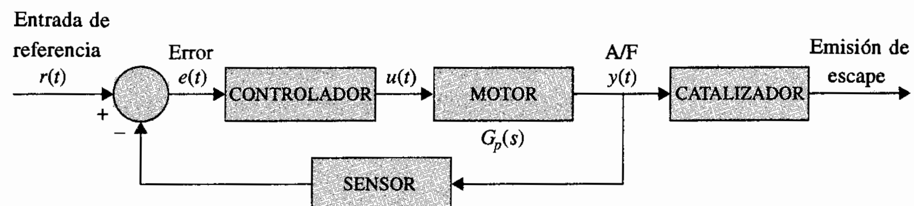


Figura 10P-13

donde T_d es el tiempo de retardo y es de 0.2 s. La constante de tiempo τ es de 0.25 s. Aproxime el tiempo de retardo por una serie de poder:

$$e^{-T_d s} \cong \frac{1}{1 + T_d s + T_d^2 s^2/2}$$

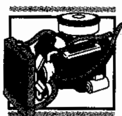
(a) Sea el controlador un controlador PI, de tal forma que:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + \frac{K_I}{s}$$

Encuentre el valor de K_1 para que la constante del error rampa K_v sea 2. Determine el valor de K_P para que el sobrepaso máximo de la respuesta al escalón unitario sea mínimo y el tiempo de asentamiento sea mínimo. Proporcione los valores del sobrepaso máximo y el tiempo de asentamiento. Grafique la respuesta al escalón unitario de $y(t)$. Encuentre el valor marginal de K_P para la estabilidad del sistema.

(b) ¿Puede mejorarse el desempeño del sistema al emplear un controlador PID?

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + K_D s + \frac{K_I}{s}$$

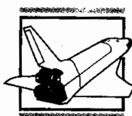


▲ Diseño del sistema de control del motor de un auto, dominio de la frecuencia

10-14. Una de las ventajas del análisis en el dominio de la frecuencia y los métodos de diseño es que los sistemas con retraso puros pueden tratarse sin aproximación. Considere el sistema de control del motor del automóvil visto en el problema 10-13. El proceso tiene la función de transferencia:

$$G_p(s) = \frac{e^{-0.2s}}{1 + 0.25s}$$

Sea el controlador del tipo PI de tal forma que $G_c(s) = K_P + K_I/s$. Establezca el valor de K_I para que la constante del error rampa K_v sea 2. Encuentre el valor de K_P para que el margen de fase sea un máximo. ¿Como se compara este K_P "óptimo" con el valor de K_P encontrado en el problema 10-13(a)? Encuentre el valor crítico de K_P para la estabilidad del sistema. ¿Cómo se compara K_P con el valor crítico de K_P encontrado en el problema 10-13?



▲ Diseño del sistema de control del telescopio espacial

10-15. El telescopio para rastreo de estrellas y asteroides en el transbordador espacial puede ser modelado como una masa pura M. Está suspendido mediante rodamientos magnéticos para que no exista fricción, y su localización es controlada por actuadores magnéticos localizados en la base de la sección de carga. El modelo dinámico para el control del movimiento en el eje z se muestra en la Fig. 10P-15(a). Ya que hay componentes eléctricos en el telescopio, energía eléctrica debe ser alimentada al telescopio a través de un cable. El resorte mostrado se utiliza para modelar el cableado, lo que ejerce una fuerza de resorteo sobre la masa. La fuerza producida por los actuadores magnéticos se denota por $f(t)$. La ecuación de fuerza de movimiento en la dirección z es:

$$f(t) - K_s z(t) = M\frac{d^2 z(t)}{dt^2}$$

donde K_s = 1 lb/pie, M = 150 lb(masa), $f(t)$ está en libras y $z(t)$ se mide en pies.

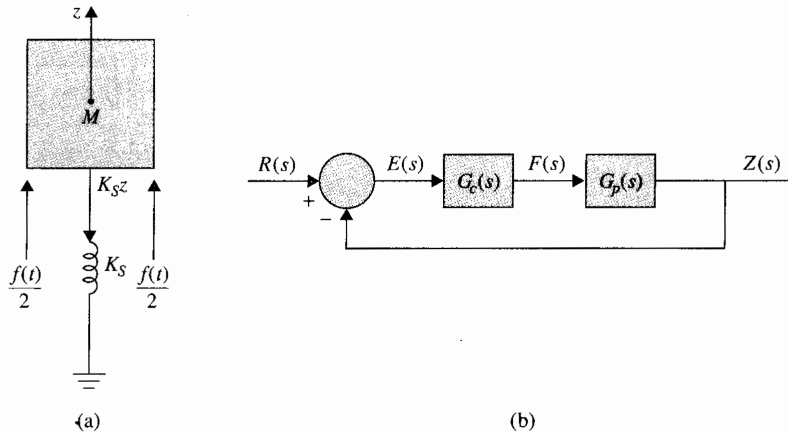


Figura 10P-15

(a) Muestre que la respuesta natural de la salida del sistema $z(t)$ es oscilatoria sin amortiguamiento. Encuentre la frecuencia natural no amortiguada del sistema en lazo abierto del transbordador espacial.

(b) Diseñe el controlador PID:

$$G_c(s) = K_P + K_D s + \frac{K_T}{s}$$

que se muestra en la Fig. 10-15(b), de tal forma que se satisfagan las siguientes especificaciones de desempeño:

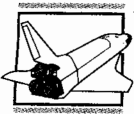
constante de error-rampa $K_v = 100$
Las raíces complejas de la ecuación característica corresponden a el factor de amortiguamiento relativo a 0.707 y una frecuencia natural no amortiguada de 1 rad/s.

Calcule y dibuje la respuesta al escalón unitario del sistema diseñado. Encuentre el sobrepaso máximo. Comente los resultados del diseño.

(c) Diseñe el controlador PID para que las siguientes especificaciones se satisfagan:

Constante de error rampa $K_v = 100$ Sobrepaso máximo < 5 porciento

Calcule y grafique la respuesta al escalón unitario del sistema diseñado. Encuentre las raíces de la ecuación característica del sistema diseñado.



▲ Diseño del sistema de control del telescopio espacial.

10-16. Repita el problema 10-15(b) con las siguientes especificaciones:

constante error-rampa $K_v = 100$
Las raíces complejas de la ecuación característica corresponden a un factor de amortiguamiento relativo de 1.0 y a una frecuencia natural no amortiguada de 1 rad/s.

▲ Diseño del sistema de control de inventario

10-17. Un sistema de control de inventario se modela mediante las siguientes ecuaciones de estado:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -2x_2(t)$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -2u(t)$$

donde $x_1(t)$ es el nivel de inventario, $x_2(t)$ nivel de ventas del producto y $u(t)$ el nivel de producción. La ecuación de salida es $y(t) = x_1(t)$. Una unidad de tiempo es 1 día. La Fig. 10P-17 muestra el diagrama de bloques del sistema de control de inventario en lazo cerrado con un controlador en serie. Sea el controlador un controlador PD, $G_c(s) = K_P + K_D s$.

(a) Encuentre los parámetros del controlador PD, K_P y K_D, para que las raíces de la ecuación característica correspondan a un factor de amortiguamiento relativo de 0.707 y $\omega_n = 1$ rad/s. Dibuje la respuesta al escalón unitario de $y(t)$ y encuentre el sobrepaso máximo.
(b) Encuentre los valores de K_P y K_D para que el sobrepaso sea cero y el tiempo de levantamiento menor que 0.06 s.
(c) Diseñe el controlador PD para que $M_r = 1$ y BW ≤ 40 rad/s.

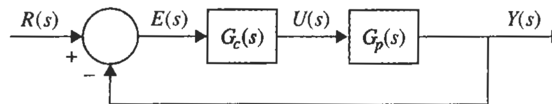


Figura 10P-17

▲ Diseño del controlador de adelanto de fase.

10-18. El diagrama de bloques de un sistema de control tipo 2 con un controlador en serie $G_c(s)$ se muestra en la Fig. 10P-18. El objetivo es diseñar un controlador PD para que las especificaciones siguientes se satisfagan:

Sobrepaso máximo < 10 porciento   Tiempo de levantamiento < 0.5 s.

(a) Obtenga la ecuación característica del sistema en lazo cerrado y determine los rangos de los valores de K_P y K_D para estabilidad. Muestre la región de estabilidad en K_D con respecto al plano K_P.
(b) Construya el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica con $K_D = 0$ y $0 \le K_P < \infty$. Después construya los contornos de las raíces para $0 \le K_D < \infty$ y varios valores de K_P con rangos desde 0.001 a 0.01.
(c) Diseñe el controlador PD para satisfacer las especificaciones de desempeño dadas arriba. Emplee la información sobre los contornos de las raíces para ayudar a su diseño. Grafique la respuesta al escalón unitario de $y(t)$.

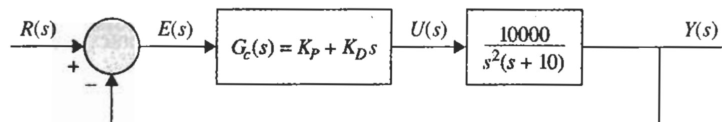


Figura 10P-18

(d) Verifique los resultados de diseño obtenidos en la parte (c) en el dominio de la frecuencia. Determine el margen de fase, el margen de ganancia, M_r y BW del sistema diseñado.

▲ Diseño del controlador PD para el sistema de balanceo de la escoba

10-19. Considere el sistema de control de balance de la escoba descrito en los problemas 4-23 y 5-41. Las matrices **A*** y **B*** están dadas en el problema 5-41 para el modelo linearizado de señal pequeña.

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}^* \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^* \Delta r(t)$$
$$\Delta y(t) = \mathbf{C}\, \Delta \mathbf{x}(t)$$
$$\mathbf{D}^* = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

La Fig. 10P-19 muestra el diagrama de bloque del sistema con un controlador PD en serie. Determine si el controlador PD puede estabilizar el sistema; si es así, encuentre los valores de K_P y K_D. Si el controlador PD no puede estabilizar el sistema, explique por qué.

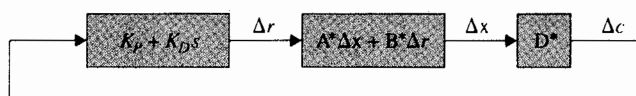


Figura 10P-19

▲ Diseño de un controlador en serie

10-20. El proceso de un sistema de control con realimentación unitaria tiene la siguiente función de transferencia:

$$G_p(s) = \frac{100}{s^2 + 10s + 100}$$

Diseñe un controlador en serie (PD, PI o PID) para que las siguientes especificaciones de desempeño se satisfagan.

Error de estado estable debido a entrada escalón = 0. Tiempo de levantamiento < 0.02 s. Sobrepaso máximo < 2 porciento

Lleve a cabo el diseño en el dominio de la frecuencia y verifique el diseño en el dominio del tiempo.

▲ Diseño de un controlador de adelanto de fase para el sistema de control de inventario

10-21. Para el sistema de control de inventario en la Fig. 10P-17, sea el controlador del tipo de adelanto de fase:

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \qquad a > 1$$

Determine los valores de a y T para que las siguientes especificaciones de desempeño se satisfagan:

Error de estado estable debido a entrada escalón = 0. Sobrepaso máximo < 5 porciento

(a) Diseñe el controlador empleando el contorno de las raíces con T y a como parámetros variables. Grafique la respuesta al escalón unitario del sistema diseñado. Dibuje las trazas de Bode de $G(s) = G_c(s)G_p(s)$ y encuentre el MF, GM, M_r y BW del sistema diseñado.

(b) Diseñe el controlador de adelanto de fase para que las siguientes especificaciones de desempeño se satisfagan:

Error en estado estable debido a entrada escalón = 0 $M_r < 1.1$
Margen de fase > 75°.

Construya las trazas de Bode de $G(s)$ y realice el diseño en el dominio de la frecuencia. Encuentre los atributos de tiempo de respuesta del sistema diseñado.

▲ Diseño de un controlador de adelanto de fase

10-22. Considere que el proceso de un sistema de control con realimentación unitaria es:

$$G_p(s) = \frac{1000}{s(s+10)}$$

Sea el controlador en serie un controlador de adelanto de fase de etapa única.

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \qquad a > 1$$

(a) Determine los valores de a y T para que el cero de $G_c(s)$ cancele el polo de $G_p(s)$ en $s = -10$. El factor de amortiguamiento relativo del sistema diseñado debe ser unitario. Encuentre los atributos de la respuesta al escalón unitario del sistema diseñado.

(b) Realice el diseño en el dominio de la frecuencia empleando las trazas de Bode. Las especificaciones de diseño son:

Fase de margen $>75°$ $\qquad M_r < 1.1$

Encuentre los atributos de la respuesta al escalón unitario del sistema diseñado.

▲ Diseño del controlador de adelanto de fase para el sistema de control de nivel de líquido

10-23. Considere que el controlador en el sistema de control de nivel de líquido que se muestra en la Fig. 10P-6 es controlador de adelanto de fase:

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \qquad a > 1$$

(a) Para $N = 10$, seleccione los valores de a y T para que el sobrepaso máximo sea minimizado. El valor de a no debe exceder 1000. Encuentre los atributos de la respuesta al escalón unitario del sistema diseñado. Grafique la respuesta al escalón unitario.

(b) Para $N = 10$, diseñe el controlador de adelanto de fase en el dominio de la frecuencia. Encuentre los valores de a y T para que el margen de fase sea maximizado sujeto a la condición que BW < 100. El valor de a no debe exceder 1000.

▲ Diseño de controladores de etapa única y de dos etapas de adelanto de fase.

10-24. La función de transferencia del proceso de un sistema de control con realimentación unitaria es:

$$G_P(s) = \frac{6}{s(1 + 0.2s)(1 + 0.5s)}$$

(a) Construya las trazas de Bode de $G_p(j\omega)$ y determine el MF, GM, M_r y BW del sistema.

(b) Diseñe un controlador de adelanto de fase de etapa única con la función de transferencia:

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \qquad a > 1$$

para que el margen de fase sea máximo. El valor de a no debe ser mayor que 1000. Determine el MF y M_r del sistema diseñado. Determine los atributos de la respuesta al escalón unitario.

(c) Utilice el sistema diseñado en la parte (b) como base, diseñe un controlador de adelanto de fase de dos etapas para que el margen de fase sea de por lo menos 85°. La función del controlador de adelanto de fase de dos etapas es:

$$G_c(s) = \left(\frac{1 + aT_1 s}{1 + T_1 s}\right)\left(\frac{1 + bT_2 s}{1 + T_2 s}\right) \qquad a > 1, \quad b > 1$$

donde a y T_1 se determinan en la parte (b). El valor de b no debe exceder 1000. Encuentre los valores de MF y M_r del sistema diseñado. Encuentre los atributos de la respuesta al escalón unitario.

(d) Dibuje las respuestas al escalón unitario de la salida en las partes (a), (b) y (c).

▲ Diseño de un sistema de anillo de fase cerrada, controlador de adelanto de fase.

10-25. Un sistema de control de un motor de cd mediante un anillo de fase cerrada se describe en el problema 4-20. El diagrama de bloques se muestra en la Fig. 10P-25. Los parámetros del sistema y las funciones de transferencia están dadas como sigue:

Comando de velocidad de referencia, f_r = 120 pulsos /s.
Ganancia del detector de fase, K_p = 0.06 V/pulso/s.
Ganancia del amplificador, K_a = 20
Ganancia del codificador, K_e = 5.73 pulsos/rad

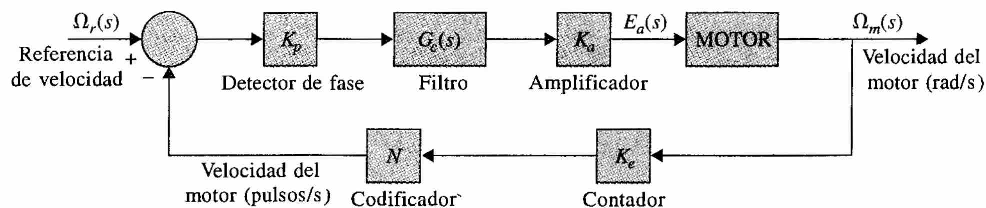


Figura 10P-25

Ganancia del contador, $N = 1$
Función de transferencia del motor:

$$\frac{\Omega_m(s)}{E_a(s)} = \frac{10}{s(1 + 0.05s)}$$

(a) Sea la función de transferencia del filtro (controlador) de la forma de:

$$G_c(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1 + R_2Cs}{R_1Cs}$$

donde $R_1 = 2 \times 10^6\Omega$ y $C = 1\mu F$. Determine el valor de R_2 para que las raíces complejas de la ecuación característica en lazo cerrado tengan un factor de amortiguamiento relativo máximo. Bosqueje el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica para $0 \leq R_2 < \infty$. Calcule y grafique las respuestas al escalón unitario de la velocidad del motor $f_\omega(t)$ (pulsos/s) con los valores encontrados de R_2, cuando la entrada es 120 pulsos/s. Convierta la velocidad en pulsos/s a rpm.

(b) Sea la función de transferencia del filtro:

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \qquad a > 1$$

Cuando $T = 0.01$. Encontrar a de modo que las raíces complejas de la ecuación característica tengan un factor de amortiguamiento relativo máximo. Calcule y grafique las respuesta al escalón unitario de la velocidad del motor $f_\omega(t)$ (pulsos/s) cuando la entrada es de 120 pulsos/s.

(c) Diseñe un controlador de adelanto de fase en el dominio de la frecuencia para que el margen de fase sea por lo menos 60°.

▲ Diseño del sistema de control de nivel de líquido, control de atraso de fase.

10-26. Considere que el controlador en el sistema de control de nivel de líquido que se muestra en la Fig. 10P-18 es un controlador de etapa única de atraso de fase:

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \qquad a < 1$$

(a) Para $N = 20$, seleccione los valores de a y T para que las dos raíces complejas de la ecuación característica correspondan a un factor de amortiguamiento relativo de aproximadamente 0.707. Dibuje la respuesta al escalón unitario de la salida $y(t)$. Encuentre los atributos de la respuesta al escalón unitario. Dibuje las trazas de Bode de $G_c(s)G_p(s)$ y determine el margen de fase del sistema diseñado.

(b) Para $N = 20$, diseñe el controlador de atraso de fase en el dominio de la frecuencia para que el margen de fase sea aproximadamente 60°. Grafique la respuesta al escalón unitario de la salida $y(t)$ y encuentre los atributos de la respuesta al escalón unitario.

▲ Diseño del controlador de adelanto de fase y atraso de fase.

10-27. El proceso controlado de un sistema de control con realimentación unitaria es:

$$G_p(s) = \frac{K}{s(s + 5)^2}$$

▲ sis de ine

El controlador en serie tiene la función de transferencia:

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$

(a) Diseñe un controlador de atraso de fase ($a > 1$) para que las siguientes especificaciones de desempeño se satisfagan:

Constante error rampa $K_v = 10$ Sobrepaso máximo próximo al mínimo

El valor de a no debe exceder 1000. Dibuje la respuesta al escalón unitario y de sus atributos.

(b) Diseñe un controlador de atraso de fase en el dominio de la frecuencia para que las especificaciones de desempeño siguientes se satisfagan:

Constante error rampa $K_v = 10$ Margen de fase próximo al máximo

El valor de a no debe exceder 1000.

(c) Diseñe un controlador de atraso de fase ($a < 1$), para que las siguientes especificaciones de desempeño se satisfagan:

Constante error rampa $K_v = 10$ Tiempo de levantamiento $t_r < 2$ s.
Sobrepaso máximo < 1 porciento Tiempo de asentamiento $t_s < 2.5$ s.

Encuentre el MF, GM, M_r y BW del sistema diseñado.

(d) Diseñe el controlador de atraso de fase en el dominio de la frecuencia para que las siguientes especificaciones de desempeño se satisfagan:

Constante error rampa $K_v = 10$ Margen de fase $\geq 70°$

Verifique los atributos de la respuesta al escalón unitario del sistema diseñado y compárelo con aquellos obtenidos en la parte (c).

▲ Diseño del sistema de control del motor de cd con inercia en el eje.

10-28. El proceso controlado del sistema de control de un motor de dc con realimentación unitaria tiene la función de transferencia:

$$G_p(s) = \frac{6.087 \times 10^{10}}{s(s^3 + 423.42s^2 + 2.6667 \times 10^6 s + 4.2342 \times 10^8)}$$

Debido a las especificaciones en el eje del motor, el proceso de la función de transferencia contiene dos polos ligeramente amortiguados que causarán oscilaciones en la respuesta de salida. El siguiente criterio de rendimiento debe satisfacerse:

Sobrepaso máximo < 1 porciento
Tiempo de levantamiento $t_r < 0.15$ s
Tiempo de asentamiento $t_s < 0.15$ s
Respuesta de salida no debe tener oscilaciones
Constante de error rampa no se afecta

(**a**) Diseñe un controlador en serie de atraso de fase:

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \qquad a > 1$$

para que todos los atributos de la respuesta al escalón (excepto para las oscilaciones) se satisfagan.

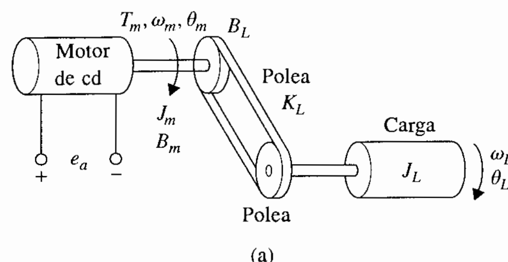
(**b**) Para eliminar las oscilaciones debidas a la inercia del eje del motor, adicione otra etapa al controlador con la función de transferencia:

$$G_{c1}(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_z\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta_p\omega_n s + \omega_n^2}$$

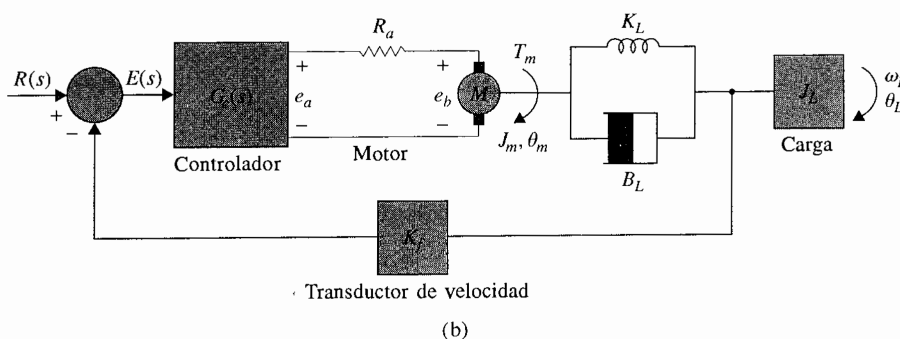
para que los ceros de $G_{c1}(s)$ cancelen los dos polos complejos de $G_p(s)$. Establezca el valor de ζ_p para que los dos polos de $G_{c1}(s)$ no tengan efecto apreciable sobre la respuesta del sistema. Determine los atributos de la respuesta al escalón unitario para ver si todos los requerimientos se satisfacen. Dibuje las respuestas al escalón unitario del sistema no compensado, el sistema compensado con el controlador de adelanto de fase diseñado en la parte (b).

▲ Diseño del sistema de unidad de cinta de computadora, controlador PI

10-29. Una unidad de cinta de computadora que utiliza un motor de cd de imán permanente se muestra en la Fig. 10P-29(a). El sistema de lazo cerrado es modelado mediante el diagrama de bloque en la Fig. 10P-29(b). La constante K_L representa la constante del resorte de la cinta



(a)



(b)

Figura 10P-29

elástica y B_L denota el coeficiente de fricción viscosa entre la cinta y las poleas. Los parámetros del sistema son como sigue:

K_i = constante de par del motor = 10 oz-pulg/A
K_b = constante de fuerza contraelectromotriz = 0.0706 V/rad/s.
B_m = coeficiente de fricción del motor = 3 oz-pulg/rad/s.
R_a = 0.25.Ω $\qquad$ $L_a \cong 0$ H
K_L = 3000 oz-pulg/rad $\qquad$ B_L = 10 oz-pulg/rad/s.
J_L = 6 oz-pulg-s² $\qquad$ K_f = 1 V/rad/s.
J_m = 0.05 oz-pulg/rad/s².

(a) Escriba las ecuaciones de estado del sistema entre e_a y θ_L empleando θ_L, ω_L, θ_m y ω_m como las variables de estado y e_a como la entrada. Dibuje un diagrama de estado empleando las ecuaciones de estado. Derive las funciones de transferencia:

$$\frac{\Omega_m(s)}{E_a(s)} \quad \text{y} \quad \frac{\Omega_L(s)}{E_a(s)}$$

(b) El objetivo del sistema es controlar la velocidad de la cinta, ω_L, con exactitud. Considere que el controlador PI con la función de transferencia $G_c(s) = K_P + K_I/s$ es utilizado. Encuentre los valores de K_P y K_I para que las siguientes especificaciones sean satisfechas.

Constante error-rampa $K_v = 100$
Tiempo de levantamiento < 0.02 s.
Tiempo de asentamiento < 0.02 s.
Sobrepaso máximo < 1% o al mínimo

Dibuje la respuesta al escalón unitario de $\omega_L(t)$ del sistema.

(c) Diseñe el controlador PI en el dominio de la frecuencia. El valor de K_I será seleccionado en la parte (b). Varíe el valor de K_P y calcule los valores de MF, GM, M_r y BW. Encuentre el valor de K_P para que MF sea máximo. ¿Cómo se compara este valor de K_P con el resultado obtenido en la parte (b)?

▲ Sistema de control de motor con eje flexible, controlador de muesca

10-30. La Fig. 10P-30 muestra el diagrama de bloques del sistema de un motor de dc que tiene un eje flexible entre el motor y la carga. La función de transferencia entre el par del motor y el

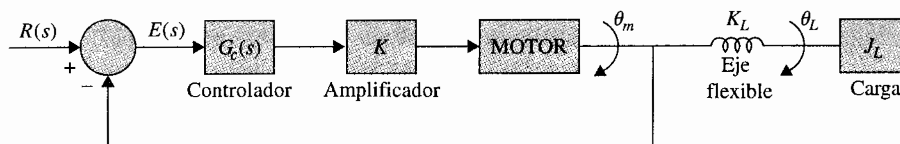


Figura 10P-30

desplazamiento del motor es:

$$G_p(s) = \frac{\Theta_m(s)}{T_m(s)} = \frac{J_L s^2 + B_L s + K_L}{s[J_m J_L s^3 + (B_m J_L + B_L J_m)s^2 + (K_L J_m + K_L J_L + B_m B_L)s + B_m K_L]}$$

donde: $J_L = 0.01$, $B_L = 0.1$, $K_L = 10$, $J_m = 0.01$, $B_m = 0.1$, y $K = 100$.

(a) Calcule y grafique la respuesta al escalón unitario de $\theta_m(t)$. Encuentre los atributos de la respuesta al escalón unitario.

(b) Diseñe un controlador de muesca de segundo orden con la función de transferencia:

$$G_c(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_z \omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta_p \omega_n s + \omega_n^2}$$

para que sus ceros cancelen los polos complejos de $G_p(s)$. Los dos polos de $G_c(s)$ deberán ser seleccionados para que no afecten la respuesta en estado estable del sistema y el sobrepaso máximo sea un mínimo. Calcule los atributos de la respuesta al escalón unitario y grafique la respuesta.

(c) Realice el diseño del controlador de segundo orden en el dominio de la frecuencia. Grafique las trazas de Bode del no compensado $G_p(s)$ y encuentre los valores de MF, GM, M_r y BW. Haga que los dos ceros de $G_c(s)$ cancelen los dos polos complejos de $G_p(s)$. Determine el valor de ζ_p mediante la determinación de la cantidad de atenuación requerida del controlador de muesca de segundo orden y empleando la ecuación (10-155). Encuentre el MF, GM, M_r y BW del sistema compensado. ¿Cómo se comparan los resultados del diseño en el dominio de la frecuencia con los resultados en la parte (b)?

▲ Diseño del controlador de muesca

10-31. La función de transferencia del proceso de un sistema de control con realimentación unitaria es:

$$G_p(s) = \frac{500(s + 10)}{s(s^2 + 10s + 1000)}$$

(a) Grafique las trazas de Bode de $G_p(s)$ y determine el MF, GM, M_r y BW del sistema no compensado. Calcule y grafique la respuesta al escalón unitario del sistema.

(b) Diseñe un controlador de muesca en serie de segundo orden con la función de transferencia:

$$G_c(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_z \omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta_p \omega_n s + \omega_n^2}$$

para que sus ceros cancelen los polos complejos de $G_p(s)$. Determine el valor de ζ_p empleando el método detallado en la subsección 10-8-2. Encuentre el MF, GM, M_r y BW del sistema diseñado. Calcule y grafique la respuesta al escalón unitario.

(c) Diseñe el controlador de muesca en serie de segundo orden para que sus ceros cancelen los polos complejos de $G_p(s)$. Determine el valor de ζ_p para que las especificaciones siguientes se satisfagan.

Sobrepaso máximo < 1 porciento

Tiempo de asentamiento < 0.5 s.

Tiempo de levantamiento < 0.4 s.

▲ Diseño del controlador de trayectoria directa

10-32. Diseñe los controladores $G_{cf}(s)$ y $G_c(s)$ para el sistema que se muestra en la Fig. 10P-32 para que las siguientes especificaciones se satisfagan:

Constante de error rampa $K_v = 50$
Raíces dominantes de la ecuación característica en $-5 \pm j5$ aproximadamente
Tiempo de levantamiento < 0.1 s.
Sobrepaso máximo ≤ 8 porciento
El sistema debe ser robusto cuando K varía ± 20% del valor nominal, con el tiempo de levantamiento y el sobrepaso máximo permaneciendo dentro de las especificaciones.

Calcule y grafique las respuestas al escalón unitario para verificar el diseño.

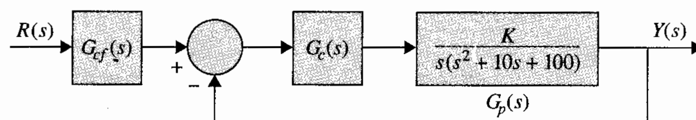


Figura 10P-32

▲ Diseño del control de la trayectoria directa, sistema de control del motor

10-33. La Fig. 10P-33 muestra el diagrama de bloques de un sistema de control de un motor. La función de transferencia del proceso controlado es:

$$G_p(s) = \frac{1000K}{s(s+a)}$$

donde K denota el agregado de la ganancia del amplificador y el par constante del motor y a es la inversa de la constante de tiempo del motor. Diseñe los controladores $G_{cf}(s)$ y $G_c(s)$ para que las siguientes especificaciones de desempeño se satisfagan.

Constante error rampa $K_v = 100$ cuando $a = 10$
Tiempo de levantamiento < 0.3 s.
Sobrepaso máximo < 8 porciento
Raíces dominantes de la ecuación característica $= -5 \pm j5$
El sistema debe ser robusto cuando a varía entre 8 y 12

Calcule y grafique las respuestas al escalón unitario para verificar el diseño.

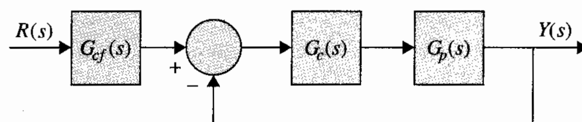


Figura 10P-33

▲ Diseño del sistema con realimentación por tacómetro

10-34. La Fig. 10P-34 muestra el diagrama de bloques de un sistema de control de un motor de cd con realimentación por tacómetro. Encuentre los valores de K y K_t para que las siguientes especificaciones se satisfagan:

Constante de error-rampa $K_v = 1$
Las raíces dominantes de la ecuación característica corresponden a un factor de amortiguamiento relativo de aproximadamente 0.707; si existen dos soluciones, seleccione el valor largo de K.

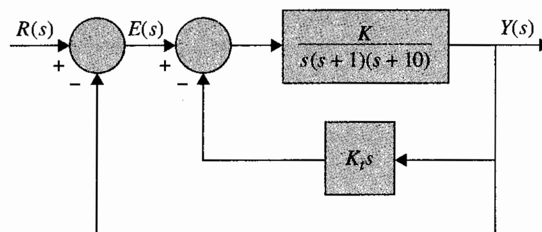


Figura 10P-34

▲ Diseño del sistema con realimentación por tacómetro

10-35. Realice el diseño con las especificaciones dadas en el problema 10-34 para el sistema que se muestra en la Fig. 10P-35.

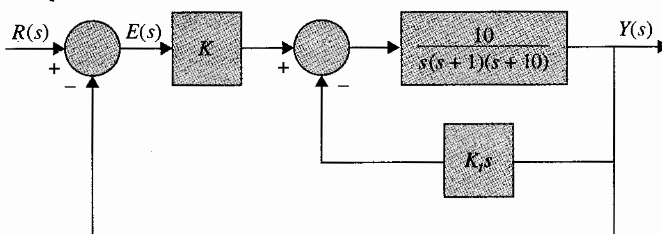


Figura 10P-35

▲ Diseño del sistema con realimentación por tacómetro

10-36. El diagrama de bloques de un sistema de control con un proceso tipo 2 se muestra en la Fig. 10P-36. El sistema no está compensado con realimentación por tacómetro y un controlador en serie. Encuentre los valores de a, T, K y K_t para que las siguientes especificaciones de desempeño se satisfagan:

Constante de error rampa $K_v = 100$
Las raíces dominantes de la ecuación característica corresponden a un factor de amortiguamiento relativo de 0.707.

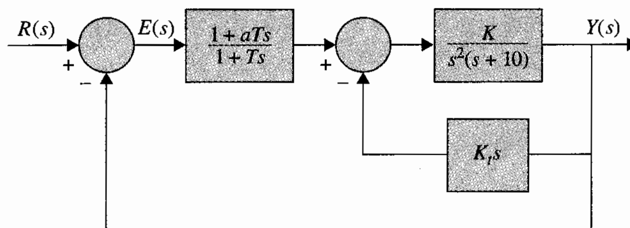


Figura 10P-36

▲ Diseño del sistema de control de posición de un aeronave. Realimentación por tacómetro.

10-37. El sistema de control de localización de la aeronave que se describe en la sección 7-6 es modelada mediante el diagrama de bloque que se muestra en la Fig. 10P-37. Los parámetros del sistema son:

K = variable $\quad K_s = 1 \quad K_1 = 10 \quad K_2 = 0.5 \quad K_t$ = variable
$R_a = 5 \quad L_a = 0.003 \quad K_i = 9.0 \quad K_b = 0.0636 \quad J_m = 0.0001$
$J_L = 0.01 \quad B_m = 0.005 \quad B_L = 1.0 \quad N = 0.1$

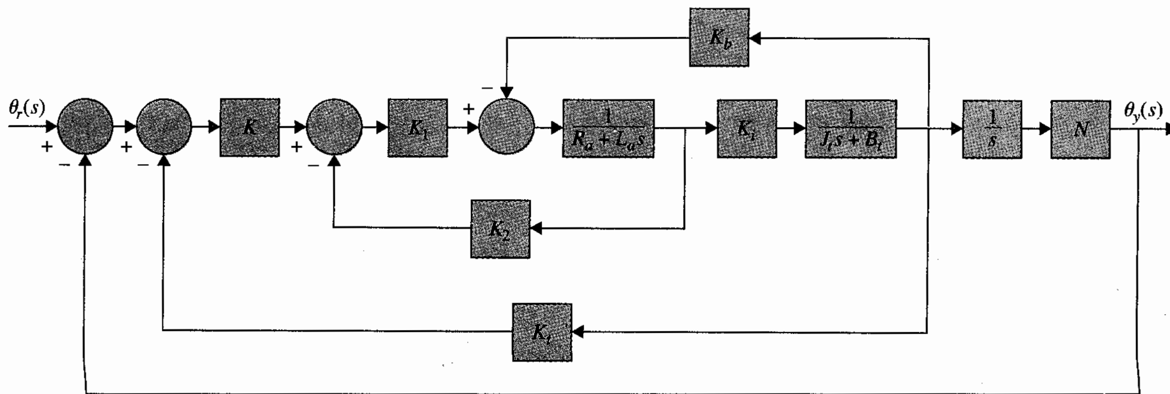


Figura 10P-37

Encuentre los valores de K y K_t para que las siguientes especificaciones se satisfagan:

Constante de error rampa $K_v = 100$
Factor de amortiguamiento relativo de las raíces complejas de la ecuación característica es de aproximadamente 0.707.

Grafique la respuesta al escalón unitario del sistema diseñado.

▲ Diseño del sistema de control con realimentación de posición, controladores de adelanto de fase de etapa única y dos etapas.

10-38. La Fig. 10P-38 muestra el diagrama de bloques de un sistema de control de posición con un controlador en serie $G_c(s)$.

(a) Determine el valor mínimo de la ganancia del amplificador K para que el valor en estado estable de la salida $y(t)$ debido a la perturbación par del escalón unitario sea ≤ 0.01.
(b) Muestre que el sistema sin compensación es inestable con el valor mínimo de K determinado en la parte (a). Construya las trazas de Bode para la función de transferencia en lazo abierto de $G(s) = Y(s)/E(s)$ y encuentre los valores de MF y GM.
(c) Diseñe un controlador de etapa única de adelanto de fase con la función de transferencia:

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \qquad a > 1$$

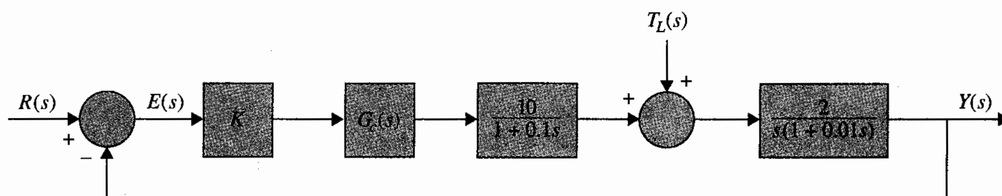


Figura 10P-38

para que el margen de fase sea 30°. Muestre que este es aproximadamente el margen de fase mayor que puede alcanzarse con un controlador de etapa única de adelanto de fase. Encuentre GM, M_r y BW del sistema compensado.

(d) Diseñe un controlador de dos fases de adelanto de fase empleando el sistema al que se llegó en la parte (c) como una base, para que el margen de fase sea 55°. Muestre que este es el mejor MF que se puede obtener para este sistema con un controlador de dos etapas de adelanto de fase. Encuentre GM, M_r y BW del sistema compensado.

▲ Diseño de controlador de adelanto de fase de dos etapas, controlador de atraso de fase, controlador de atraso-adelanto.

10-39. La función de transferencia del proceso del sistema de control con realimentación unitaria es:

$$G_p(s) = \frac{60}{s(1 + 0.2s)(1 + 0.5s)}$$

Muestre que debido a la ganancia relativa alta, el sistema no compensado es inestable.

(a) Diseñe un controlador de dos etapas de adelanto de fase con:

$$G_c(s) = \left(\frac{1 + aT_1 s}{1 + T_1 s}\right)\left(\frac{1 + bT_2 s}{1 + T_2 s}\right) \qquad a > 1, \quad b > 1 \qquad (1)$$

para que el margen de fase sea mayor que 60°. Conduzca el diseño, primeramente determinando los valores de a y T_1 para realizar un margen de fase máximo que pueda alcanzarse con un controlador de etapa única de adelanto de fase. La segunda etapa del controlador es entonces diseñada para realizar el balance del margen de fase de 60°. Determine GM, M_r y BW del sistema compensado. Calcule y grafique la respuesta al escalón unitario del sistema compensado.

(b) Diseñe un controlador de etapa única de atraso de fase con:

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \qquad a < 1$$

para que el margen de fase del sistema compensado sea mayor que 60°. Determine GM, M_r y BW del sistema compensado. Calcule y grafique la respuesta al escalón unitario del sistema compensado.

(c) Diseñe el controlador de adelanto-atraso con $G_c(s)$ como en la ecuación (1) en la parte (a). Diseñe la porción de atraso de fase primero estableciendo el margen de fase en 40°. El sistema resultante es entonces compensado mediante la porción de adelanto de fase para alcanzar un total de margen de fase de 60°. Determine GM, M_r y BW del sistema compensado. Calcule y grafique la respuesta al escalón unitario del sistema compensado.

▲ Diseño de sistema de control de laminado.

10-40. El diagrama de bloques del sistema de laminado descrito en el problema 4-26 se muestra en la Fig. 10P-40. La función de transferencia del proceso es:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{5e^{-0.1s}}{s(1 + 0.1s)(1 + 0.5s)} \qquad K_s = 1$$

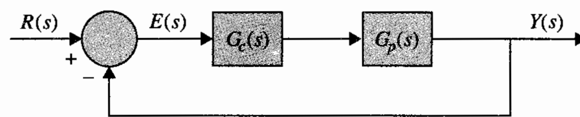


Figura 10P-40

(a) Aproxime el tiempo de retardo por:

$$e^{-0.1s} \cong \frac{1 - 0.05s}{1 + 0.05s}$$

Diseñe un controlador en serie de su elección para que el margen de fase del sistema compensado sea por lo menos 60°. Determine GM, M_r y BW del sistema compensado. Calcule y grafique las respuestas al escalón unitario del sistema compensado y no compensado.

(b) Repita la parte (a) sin emplear la aproximación del tiempo de retardo.

▲ Diseño del sistema de control respiratorio, controlador PI

10-41. Los seres humanos respiran para proveer intercambio de gases en su cuerpo. Un sistema de control respiratorio se necesita para asegurar que las necesidades de los cuerpos de este intercambio de gas son alcanzados en forma adecuada. El criterio de control es una ventilación adecuada, que asegure niveles satisfactorios de ambos, oxígeno y dióxido de carbono en la corriente arterial. La respiración se controla mediante impulsos neurales que se originan dentro del cerebelo y son transmitidos a la cavidad toráxica y diafragma para gobernar el volumen y la periodicidad. Una fuente de señales son los quimioreceptores localizados cerca del centro respiratorio, que son sensibles a las concentraciones de dióxido de carbono y oxígeno. La Fig. 10P-41 muestra el diagrama de bloques de un modelo simplificado del sistema de control respiratorio del humano. El objetivo es controlar la ventilación efectiva de los pulmones para que un balance satisfactorio de concentraciones de dióxido de carbono y oxígeno sea mantenido en la corriente sanguínea en el quimioreceptor.

(a) Grafique las trazas de Bode de la función de transferencia $G(s) = Y(s)/E(s)$ cuando $G_c(s) = 1$. Encuentre el MF y GM. Determine la estabilidad del sistema.

(b) Diseñe un controlador PI, $G_c(s) = K_P + K_I/s$, para que las siguientes especificaciones se satisfagan:

Constante error rampa $K_v = 1$ Margen de fase es maximizado

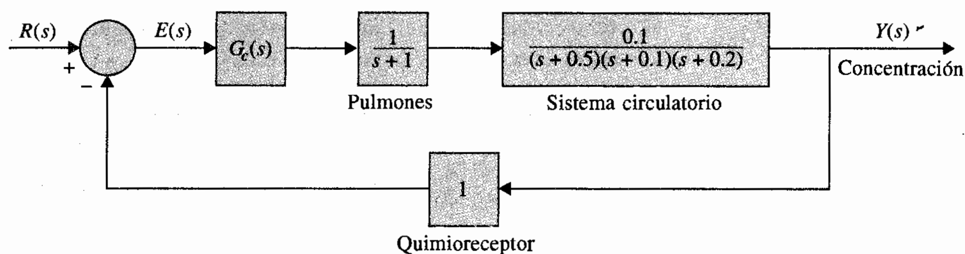


Figura 10P-41

Grafique la respuesta al escalón unitario del sistema. Encuentre los atributos de la respuesta al escalón unitario.

(c) Diseñe un controlador PI para que las siguientes especificaciones se satisfagan:

Constante error rampa $K_v = 1$ Sobrepaso máximo es maximizado

Grafique la respuesta al escalón unitario del sistema. Encuentre los atributos de la respuesta al escalón unitario. Compare los resultados del diseño en las partes (b) y (c).

▲ Control mediante la realimentación de estado

10-42. El diagrama de bloques de un sistema de control mediante la realimentación de estado se muestra en la Fig. 10P-42. Encuentre las ganancias reales de realimentación, k_1, k_2 y k_3 para que:

El error en estado estable e_{ss}[$e(t)$ sea la señal de error] debido a que la entrada escalón es cero. Las raíces complejas de la ecuación característica están en $-1 + j$ y $-1 - j$

Encuentre la tercer raíz. ¿Pueden las tres raíces ser asignadas arbitrariamente alcanzando aun los requerimientos de estado estable?

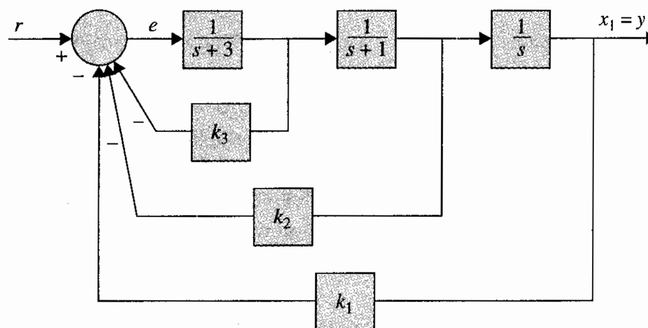


Figura 10P-42

▲ Control mediante la realimentación de estado

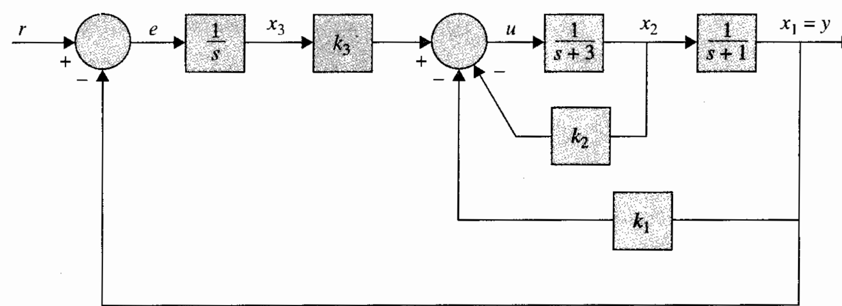
10-43. El diagrama de bloques de un sistema de control mediante la realimentación de estado se muestra en la Fig. 10P-43(a). Las ganancias de realimentación k_1, k_2 y k_3 son constantes reales.

(a) Encuentre los valores de las ganancias de realimentación para que:

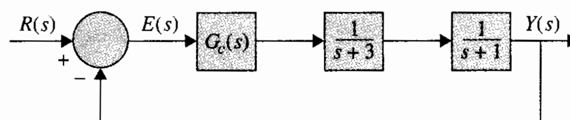
El error en estado estable e_{ss}[$e(t)$ sea la señal de error] debido a que la entrada escalón es cero. Las raíces de la ecuación característica están en $-1 + j$, $-1 - j$ y -10.

(b) En vez de emplear la realimentación de estado un controlador en serie es implementado, como se muestra en la Fig. 10P-43(b). Encuentre la función de transferencia del controlador $G_c(s)$ en términos de k_1, k_2 y k_3 encontrados en la parte (a) y los otros parámetros del sistema.

10-44. El problema 10-19 ha revelado que es imposible estabilizar el sistema de control de balance de la escoba descrita en los problemas 4-23 y 5-41 con un controlador en serie PD. Considere



(a)



(b)

Figura 10P-43

▲ Sistema de balanceo de la escoba con control mediante la realimentación de estado.

que el sistema está ahora controlado mediante la realimentación de estado con $\Delta r(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$, donde:

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4]$$

(a) Encuentre las ganancias de realimentación k_1, k_2, k_3 y k_4 para que los valores característicos de $\mathbf{A}^* - \mathbf{B}^*\mathbf{K}$ estén en $-1 + j$, $-1 - j$, -10 y -10. Calcule y grafique las respuestas de $\Delta x_1(t)$, $\Delta x_2(t)$, $\Delta x_3(t)$ y $\Delta x_4(t)$ para la condición inicial, $\Delta x_1(0) = 0.1$, $\Delta\theta(0) = 0.1$, y las demás condiciones iniciales son cero.

(b) Repita la parte (a) para los valores característicos en $-2 + j2$, $-2 - j2$, -20 y -20. Comente sobre las diferentes entre los dos sistemas.

▲ Sistema de suspensión de bola con control mediante la realimentación de estado.

10-45. Las ecuaciones de estado linearizadas del sistema de control de suspensión magnética de la bola descrito en el problema 4-25 se expresan como:

$$\Delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}^* \Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^* \Delta i(t)$$

donde:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 115.2 & -0.05 & -18.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -37.2 & 0 & 37.2 & -0.1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -6.55 \\ 0 \\ -6.55 \end{bmatrix}$$

Sea la corriente de control $\Delta i(t)$ la derivada a partir de la realimentación de estado $\Delta i(t) = -\mathbf{K}\,\Delta\mathbf{x}(t)$, donde:

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4]$$

(a) Encuentre los elementos de K para que los valores característicos de $\mathbf{A}^* - \mathbf{B}^*\mathbf{K}$ estén en $-1 + j, -1 - j, -10$ y -10.

(b) Grafique las respuestas de $\Delta x_1(t) = \Delta y_1(t)$ (desplazamiento del magneto) y $\Delta x_3(t) = \Delta y_2(t)$ (desplazamiento de la bola) con la condición inicial:

$$\Delta\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c) Repita la parte (b) con la condición inicial:

$$\Delta\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Comente sobre las respuestas del sistema en lazo cerrado con los dos juegos de condiciones iniciales empleadas en (b) y (c).

▲ Control de temperatura del horno eléctrico, realimentación de estado, control PI

10-46. La temperatura $x(t)$ en el horno eléctrico mostrado en a Fig. 10P-46 se describe mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2x(t) + u(t) + n(t)$$

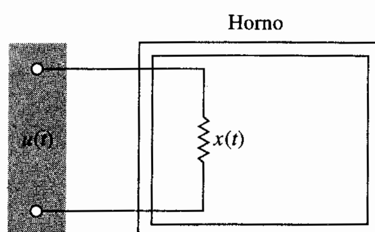


Figura 10P-46

donde $u(t)$ es la señal de control y $n(t)$ la perturbación constante de la magnitud desconocida debido a pérdida de calor. Se desea que la temperatura $x(t)$ siga una referencia de entrada r que es una constante.

(a) Diseñe un sistema de control con un control integral y de estado para que las siguientes especificaciones se satisfagan:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = R = \text{constante}$$

Los valores característicos del sistema de lazo cerrado son -10 y -10

Grafique las respuestas de $x(t)$ para $t \geq 0$ con $r = 1$ y $n(t) = -1$ y entonces con $r = 1$ y $n(t) = 0$, todo con $x(0) = 0$.

(b) Diseñe un controlador PI para que:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + \frac{K_I}{s}$$

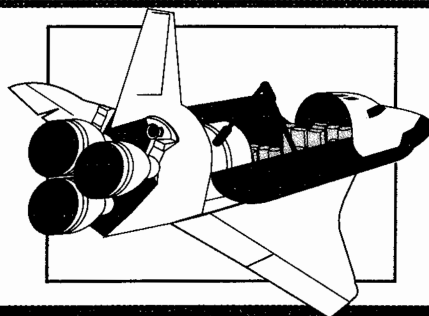
$$E(s) = R(s) - X(s) \qquad \text{donde} \quad R(s) = R/s$$

Encuentre K_P y K_I para que las raíces de la ecuación característica estén en -10 y -10. Grafique las respuestas de $x(t)$ para $t \geq 0$ con $R = 1$ y $n(t) = -1$ y entonces con $R = 1$ y $n(t) = 0$, todas $x(0) = 0$.

Respuestas a las preguntas de falso-verdadero

5. (F) **6.** (F) **8.** (V) **18.** (V) **19.** (V) **20.** (V) **21.** (V)
22. (V) **26.** (V) **27.** (V) **28.** (V)

11 Sistemas de control de datos discretos



PALABRAS CLAVE Y TEMAS

- ▲ Controladores digitales
- ▲ Control de adelanto de fase
- ▲ Diseño mediante respuesta con oscilaciones muertas
- ▲ Controlador digital PID
- ▲ Control de atraso de fase
- ▲ Diseño mediante realimentación de estado
- ▲ Diseño mediante el lugar geométrico de las raíces

11-1 Introducción

El diseño de sistemas de control en tiempo discreto es similar en principio al diseño de sistemas de control en tiempo continuo. El objetivo del diseño es básicamente, determinar el controlador para que el sistema tenga un desempeño de acuerdo a las especificaciones. De hecho, en la mayoría de las situaciones, el proceso controlado es el mismo, excepto que en sistemas en tiempo discreto el controlador está diseñado para procesar datos digitales o muestreados.

El diseño de sistemas de control en tiempo discreto que se expone en este capítulo es sólo para propósitos introductorios. El tema puede encontrarse en libros dedicados a control

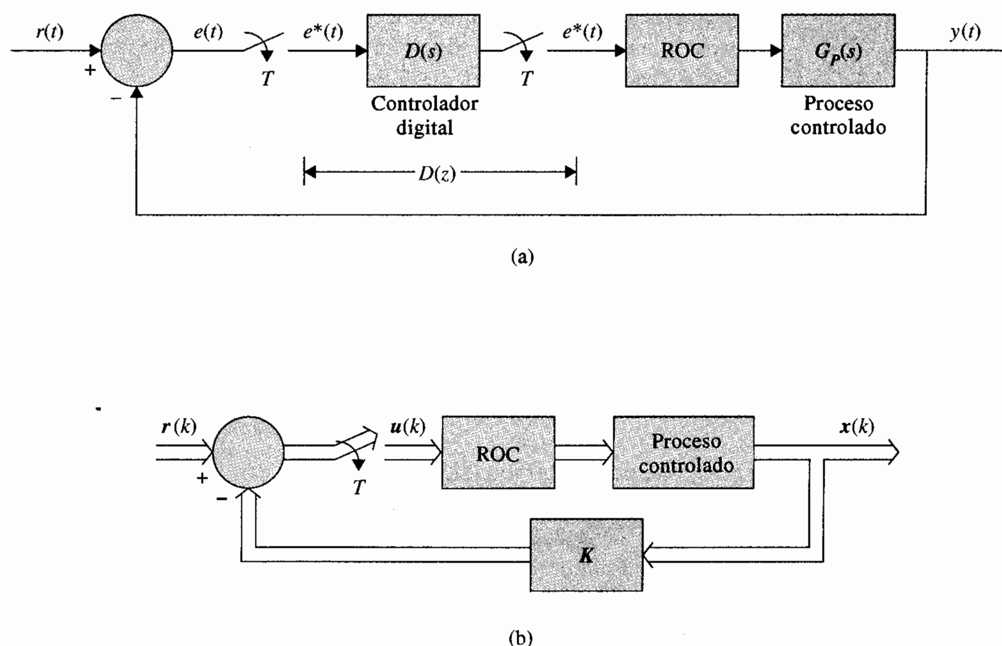


Figura 11-1 (a) Sistema de control digital con controlador digital en cascada (b) Sistema de control digital con realimentación de estado.

digital para un estudio más profundo. En este capítulo sólo se trata con el diseño de un sistema de control con controlador digital en cascada y un sistema por realimentación del estado digital. Los diagramas de bloques de estos sistemas se muestran en la Fig. 11-1.

Tal como con el diseño de sistemas de control en tiempo continuo, el diseño de sistemas en tiempo discreto puede llevarse a cabo ya sea en el dominio de la frecuencia, o en el dominio del tiempo. Con la disponibilidad de todos los programas de computadora, el diseño de sistemas de control digital puede hacerse con una cantidad mínima de esfuerzo mediante prueba-y-error.

11-2 Implementación digital de controladores analógicos

Parece que la mayoría de las personas aprenden como diseñar sistemas en tiempo continuo antes que digitales, si es que aprenden estos últimos. Por tanto, no es sorpresa que la mayoría de los ingenieros prefieran diseñar sistemas en tiempo continuo en vez de sistemas de control digital. Idealmente, si el diseñador intenta utilizar control digital, el sistema debería ser diseñado para que las dinámicas del controlador pudiesen ser descritas por una función de transferencia z o por ecuaciones en diferencias. Sin embargo, existen situaciones bajo las cuales el controlador analógico ya está diseñado, pero la disponibilidad y ventajas del control digital sugieren que el controlador sea implementado por elementos digitales. Por tanto, los problemas discutidos en esta sección son dobles; primero, se investiga como se pueden aproximar

controladores en tiempo continuo tales como PID, de adelanto o atraso de fase, y otros por controladores digitales; segundo, se investiga el problema de implementación de controladores digitales a través de procesos digitales.

11-2-1 Implementación digital del controlador PID

El controlador PID en el dominio en tiempo continuo se describe como:

$$G_c(s) = K_P + K_D s + \frac{K_I}{s} \tag{11-1}$$

El componente proporcional K_P se implementa en forma digital mediante una ganancia constante K_P. Ya que una computadora digital o procesador tiene una longitud de palabra finita, la constante K_P no puede realizarse con resolución infinita.

La derivada con respecto al tiempo de una función $f(t)$ en $t = kT$ se puede aproximar mediante la **regla de diferencia hacia atrás,** empleado los valores de $f(t)$ medidos en $t = kT$ y $(k - 1)T$; esto es:

$$\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=kT} = \frac{1}{T}\Big(f(kT) - f[(k-1)T]\Big) \tag{11-2}$$

Para encontrar la función de transferencia z de la operación derivada descrita anteriormente, se toma la transformada z en ambos lados de la ecuación (11-2). Se tiene:

$$\mathcal{Z}\left(\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=kT}\right) = \frac{1}{T}(1 - z^{-1})F(z) = \frac{z-1}{Tz}F(z) \tag{11-3}$$

Por lo que la función de transferencia z del diferenciador digital es:

$$G_D(z) = K_D\frac{z-1}{Tz} \tag{11-4}$$

donde K_D es la constante proporcional de la derivada del controlador. Al sustituir z por e^{Ts} en la ecuación (11-4), se puede mostrar que el periodo de muestreo T se aproxima a cero, $G_D(z)$ se aproxima a $K_D s$, que es la función de transferencia de la derivada del controlador analógico. En general, la selección del periodo de muestreo es muy importante, el valor de T debe ser lo suficientemente pequeño, para que la aproximación digital sea exacta.

Hay un número de reglas de integración numérica que pueden emplearse para aproximar de forma digital al controlador integral K_I/s. Los tres métodos básicos de aproximación numérica del área de una función son: **integración trapezoidal, integración rectangular hacia adelante** e **integración rectangular hacia atrás.** Estas se describen a continuación.

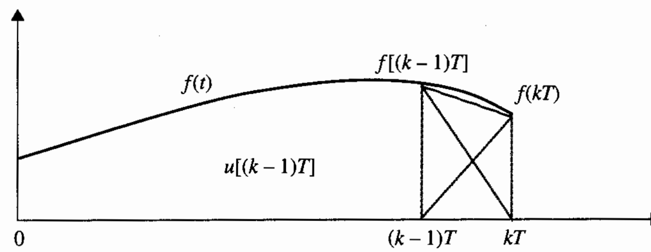


Figura 11-2 Regla de integración trapezoidal.

Integración trapezoidal

La **regla de integración trapezoidal** aproxima el área bajo la función $f(t)$ mediante una serie de trapezoides, como se muestra en la Fig. 11-2. Sea el integral de $f(t)$ evaluado en $t = kT$ designado como $u(kT)$. Entonces:

$$u(kT) = u[(k-1)T] + \frac{T}{2}\{f(kT) + f[(k-1)T]\} \tag{11-5}$$

donde el área bajo $f(t)$ para $(k - 1)T \leq t < kT$ se aproxima mediante el área del trapezoide en el intervalo. Tomando la transformada z en ambos miembros de la ecuación (11-5), se tiene la función de transferencia del integrador digital como:

$$G_I(z) = K_I \frac{U(z)}{F(z)} = \frac{K_I T(z+1)}{2(z-1)} \tag{11-6}$$

donde K_I es la constante proporcional.

Integración rectangular hacia adelante

Para la integración rectangular hacia adelante, se aproxima el área bajo $f(t)$ mediante rectángulos como se muestra en la Fig. 11-3. La integral de $f(t)$ en $t = kT$ se aproxima por:

$$u(kT) = u[(k-1)T] + Tf(kT) \tag{11-7}$$

Al tomar la transformada z en ambos miembros de la ecuación (11-7), la función de transferencia del integrador digital empleando la regla rectangular hacia adelante es:

$$G_I(z) = K_I \frac{U(z)}{f(z)} = \frac{K_I T z}{z-1} \tag{11-8}$$

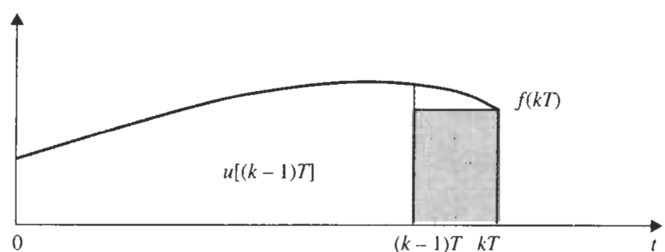


Figura 11-3 Regla de integración rectangular hacia adelante.

Integración rectangular hacia atrás

Para la integración rectangular hacia atrás, la regla de aproximación digital se ilustra en la Fig. 11-4. La integral de $f(t)$ en $t = kT$ se aproxima mediante:

$$u(kT) = u[(k-1)T] + Tf[(k-1)T] \tag{11-9}$$

La función de transferencia z del integrador digital empleando la regla de integración rectangular hacia atrás es:

$$G_I(z) = K_I \frac{U(z)}{F(z)} = \frac{K_I T}{z-1} \tag{11-10}$$

Al combinar las operaciones proporcional, derivada e integración descritas anteriormente, el controlador digital PID es modelado mediante la siguientes funciones de transferencia.

Integración trapezoidal

$$G_c(z) = \frac{(K_P + TK_I/2 + K_D/T)z^2 + (TK_I/2 - K_P - 2K_D/T)z + K_D/T}{z(z-1)} \tag{11-11}$$

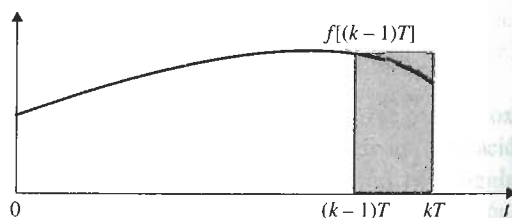


Figura 11-4 Regla de integración rectangular hacia atrás.

Integración rectangular hacia adelante

$$G_c(z) = \frac{(K_P + K_D/T + TK_I)z^2 - (K_P + 2K_D/T)z + K_D/T}{z(z-1)} \tag{11-12}$$

Integración rectangular hacia atrás

$$G_c(z) = \frac{(K_P + K_D/T)z^2 + (TK_I - K_P - 2K_D/T)z + K_D/T}{z(z-1)} \tag{11-13}$$

Cuando $K_I = 0$, la función de transferencia del controlador digital PID es:

$$G_c(z) = \frac{(K_P + K_D/T)z - K_D/T}{z} \tag{11-14}$$

Una vez que la función de transferencia de un controlador digital se determina, el controlador puede implementarse mediante un procesador digital o computadora. El operador z^{-1} se interpreta como un tiempo de retardo de T s. En la práctica, el tiempo de retardo se implementa mediante el almacenamiento de una variable en alguna localidad de memoria en la computadora y entonces se saca después de que han pasado T s. La Fig. 11-5 ilustra el diagrama de bloques del programa digital del controlador PID empleando la regla de integración trapezoidal.

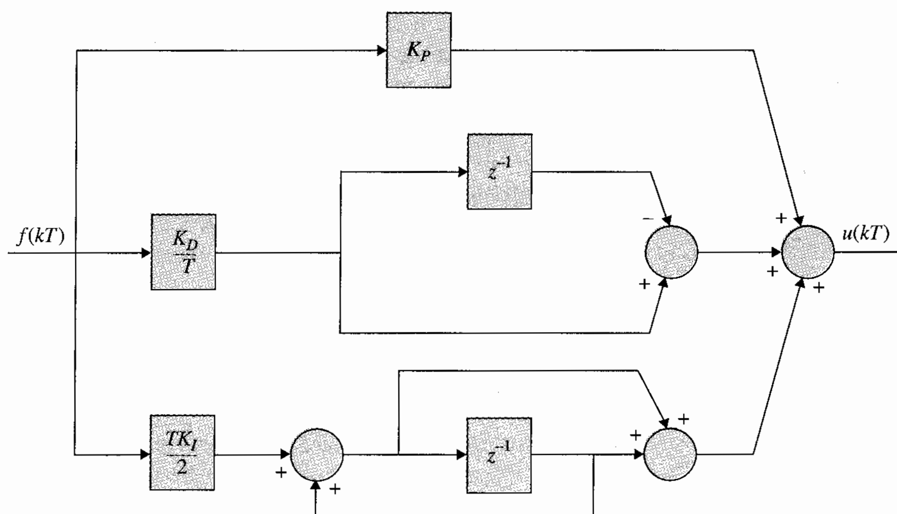


Figura 11-5 Diagrama de bloque de la implementación de un programa digital del controlador PID.

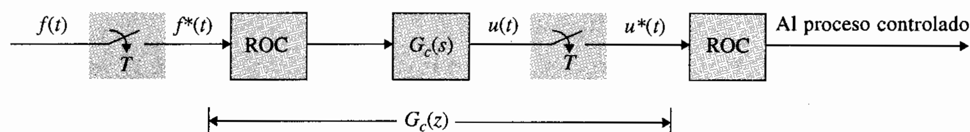


Figura 11-6 Realización de un controlador digital mediante un controlador analógico con unidades de muestreo y retención.

11-2-2 Implementación digital de controladores de atraso y adelanto

En principio, cualquier controlador en tiempo continuo puede convertirse a un controlador digital sólo añadiendo unidades de muestreo y retención en las terminales de entrada y salida del controlador, y seleccionando una frecuencia de muestreo tan pequeña como práctica. La Fig. 11-6 ilustra el esquema básico, y $G_c(s)$ como la función de transferencia del controlador en tiempo continuo y $G_c(z)$ el controlador digital equivalente. El periodo de muestreo T deberá ser lo suficientemente pequeño para que las características dinámicas del controlador en tiempo continuo no se pierdan a través de la digitalización. La configuración del sistema que se muestra en la Fig. 11-6 sugiere que tanto el controlador en tiempo continuo $G_c(s)$, como el controlador digital equivalente $G_c(z)$ se pueden obtener mediante el arreglo mostrado. Por otra parte, el controlador digital dado $G_c(z)$, se puede realizar empleando un controlador analógico $G_c(s)$ y unidades de muestreo, y retención como se muestra en la Fig. 11-6.

Ejemplo 11-1

Como un ejemplo ilustrativo, considere que el controlador en tiempo continuo en la Fig. 11-6 está representado por la función de transferencia:

$$G_c(s) = \frac{s + 1}{s + 1.61} \tag{11-15}$$

De la Fig. 11-6 la función de transferencia del controlador digital se escribe:

$$\begin{aligned} G_c(z) &= \frac{U(z)}{F(z)} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{s+1}{s(s+1.61)}\right] \\ &= \frac{z - (0.62e^{-1.61T} + 0.38)}{z - e^{-1.61T}} \end{aligned} \tag{11-16}$$

La implementación del programa digital de la ecuación (11-16) se muestra en la Fig. 11-7. ▲

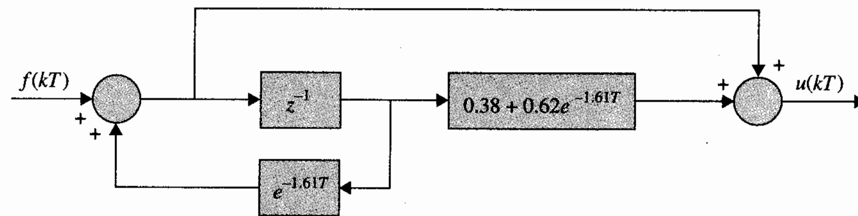


Figura 11-7 Realización del programa digital de la ecuación (11-16).

11-3 Controladores digitales

▲ Una de las ventajas del controlador digital es que su programa puede ser alterado con facilidad.

Los controladores digitales pueden ser realizados por redes digitales, computadoras digitales, microprocesadores o procesadores digitales de señales (DSPs). Una ventaja distintiva de los controladores digitales implementados por microprocesadores o DSPs es que el algoritmo de control contenido en el controlador puede ser alterado con facilidad al cambiar el programa. El cambiar los componentes de un controlador en tiempo continuo es más bien difícil cuando el controlador ya ha sido construido.

11-3-1 Realización física de controladores digitales

La función de transferencia de un controlador digital se puede expresar como:

$$G_c(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \tag{11-17}$$

donde n y m son enteros positivos. Se dice que la función de transferencia $G_c(z)$ es físicamente realizable si su salida no es precedida por ninguna entrada. Esto significa que las series de expansión de $G_c(z)$ no deben tener ninguna potencia positiva en z. En términos de la $G_c(z)$ dada en la ecuación (11-17), si $b_0 \neq 0$, entonces $a_0 \neq 0$. Si $G_c(z)$ se expresa como:

$$G_c(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \tag{11-18}$$

entonces los requerimientos de la realización física son $n \geq m$.

Las técnicas de descomposición presentadas en el Cap. 5 se pueden aplicar para realizar la función de transferencia del controlador digital mediante un programa digital. Se considera que un programa digital es capaz de realizar operaciones aritméticas de adición, sustracción, multiplicación por una constante y corrimiento (shift). Los tres métodos básicos de descomposición para programación digital se discuten a continuación.

Programa directo mediante descomposición directa

Al aplicar la descomposición directa a la ecuación (11-17), se tienen las siguientes ecuaciones:

$$E_2(z) = \frac{1}{a_0}(b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m})X(z) \tag{11-19}$$

$$X(z) = \frac{1}{a_0}E_1(z) - \frac{1}{a_0}(a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n})X(z) \tag{11-20}$$

La Fig. 11-8 muestra la gráfica de señal de flujo de un programa digital directo de la ecuación (11-17) mediante la descomposición directa para $m = 2$ y $n = 3$. Las ramas con ganancias de z^{-1} representan los tiempos de retardo o corrimiento de un periodo de muestreo.

Programa digital mediante descomposición en cascada

La función de transferencia $G_c(z)$ se puede escribir como producto de funciones de transferencia de primer o segundo orden, cada uno realizable a través de un programa digital simple. El programa digital de la función de transferencia total está entonces representado por estos programas digitales simples conectados en cascada. La ecuación (11-17) se escribe en forma factorial como:

$$G_c(z) = G_{c1}(z)G_{c2}(z)\cdots G_{cn}(z) \tag{11-21}$$

donde los factores individuales pueden expresarse como sigue:

Polo real y cero: $$G_{ci}(z) = K_i\frac{1 + c_i z^{-1}}{1 + d_i z^{-1}} \tag{11-22}$$

Polos complejos conjugados (no ceros): $$G_{ci}(z) = \frac{K_i}{1 + d_{i1}z^{-1} + d_{i2}z^{-2}} \tag{11-23}$$

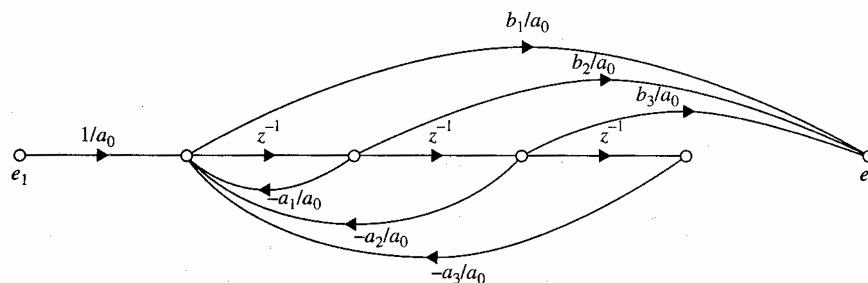


Figura 11-8 Gráfica de flujo de señales de un programa digital mediante descomposición directa de la ecuación (11-17) con $n = 3$ y $m = 2$.

Polos complejos conjugados con un cero: $$G_{ci}(z) = K_i \frac{1 + c_i z^{-1}}{1 + d_{i1} z^{-1} + d_{i2} z^{-2}} \qquad (11\text{-}24)$$

y varias otras formas posibles arriba al segundo orden.

Programa digital mediante descomposición paralela

La función de transferencia en la ecuación (11-17) se puede expandir en una suma de términos simples de primer o segundo orden mediante la expansión de la fracción parcial. Estos términos son realizables mediante programas digitales conectados en paralelo.

Ejemplo 11-2

Considere la siguiente función de transferencia de un controlador digital:

$$G_c(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{10(1 + 0.5z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.2z^{-1})} \qquad (11\text{-}25)$$

Ya que los coeficientes de inicio del numerador y denominador polinominales en z^{-1} son todos constantes, la función de transferencia es físicamente realizable. La función de transferencia $G_c(z)$ se realiza por los tres tipos de programas digitales arriba discutidos.

Programación digital directa

La ecuación (11-25) se escribe:

$$G_c(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{10(1 + 0.5z^{-1})X(z)}{(1 - z^{-1})(1 - 0.2z^{-1})X(z)} \qquad (11\text{-}26)$$

Al expandir el numerador y denominador de la última ecuación, y realizar la ecuación se tiene:

$$E_2(z) = (10 + 5z^{-1})X(z) \qquad (11\text{-}27)$$
$$X(z) = E_1(z) + 1.2z^{-1}X(z) - 0.2z^{-2}X(z) \qquad (11\text{-}28)$$

Las dos últimas ecuaciones se realizan mediante el programa digital que se muestra en la Fig. 11-9.

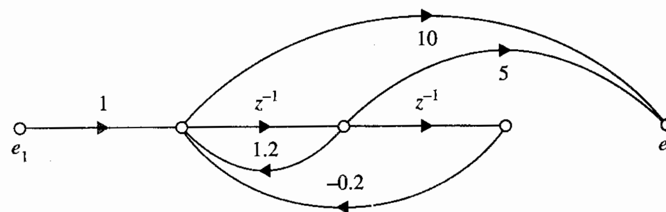


Figura 11-9 Programa digital directo de la ecuación (11-25).

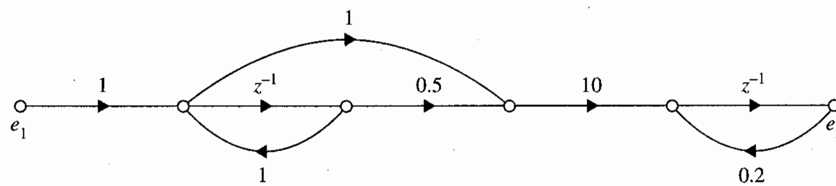


Figura 11-10 Programa digital en cascada de la ecuación (11-25).

Programación digital en cascada

El segundo miembro de la ecuación (11-25) se dividió en dos factores en una de varias formas posibles.

$$G_c(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 - z^{-1}} \frac{10}{1 - 0.2z^{-1}} \tag{11-29}$$

La Fig. 11-10 muestra la gráfica de flujo de señales del programa digital en cascada del controlador.

Programación digital en paralelo

El segundo miembro de la ecuación (11-25) se expande mediante la fracción parcial en dos términos separados.

$$G_c(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{18.75}{1 - z^{-1}} - \frac{8.75}{1 - 0.2z^{-1}} \tag{11-30}$$

La Fig. 11-11 muestra la gráfica de flujo de señales del programa digital en paralelo del controlador. ▲

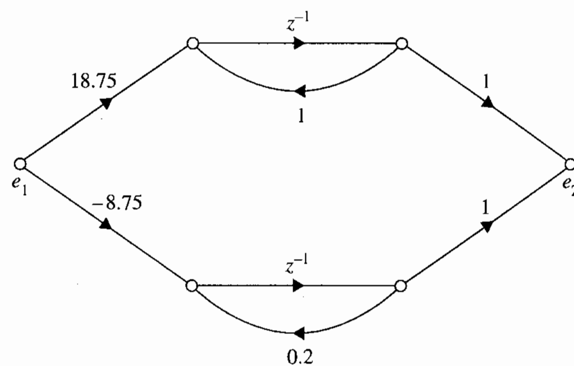


Figura 11-11 Programa digital en paralelo de la ecuación (11-25).

11-4 Diseño de sistemas de control en tiempo discreto en el dominio de la frecuencia y el plano z

La transformación w presentada en la Sec. 7-10 se puede emplear para llevar a cabo el diseño de sistemas de control en tiempo discreto en el dominio de la frecuencia. Una vez que la función de transferencia del proceso controlado es transformada al dominio w, todas las técnicas de diseño para sistemas de control en tiempo continuo se pueden aplicar al diseño de sistemas en tiempo discreto.

11-4-1 Controladores de adelanto y de atraso de fase en el dominio w

Tal como en el dominio s, los controladores de adelanto y atraso de fase de una etapa en el dominio w se pueden expresar mediante la función de transferencia:

$$G_c(w) = \frac{1 + a\tau w}{1 + \tau w} \tag{11-31}$$

donde $a > 1$ corresponde al adelanto de fase, y $a < 1$ corresponde al atraso de fase. Cuando w se sustituye por $j\omega_w$, las trazas de Bode de la ecuación (11-31) son idénticas a aquellas de las Figs. 10-28 y 10-45 para $a > 1$ y $a < 1$, respectivamente. Una vez que el controlador está diseñado en el dominio w, el controlador en el dominio z se obtiene mediante la sustitución de la relación de la transformación w en la ecuación (6-47), esto es:

$$w = \frac{2}{T}\frac{z - 1}{z + 1} \tag{11-32}$$

El siguiente ejemplo ilustra el diseño de un sistema de control en tiempo discreto empleando la transformación w en el dominio de la frecuencia y el plano z.

Ejemplo 11-3

Considere el sistema de control del rastreador solar descrito en la Sec. 4-7 y que se muestra en la Fig. 10-29. Ahora suponga que el sistema es en tiempo discreto, de tal forma que hay un muestreo y retención en la trayectoria directa. El periodo de muestreo es 0.01 s. La función de transferencia del proceso controlado es:

$$G_p(s) = \frac{2500}{s(s + 25)} \tag{11-33}$$

La función de la transferencia z de la trayectoria directa, incluyendo el muestreo y retención es:

$$G_{h0}G_p(z) = (1 - z^{-1})\mathscr{Z}\left(\frac{2500}{s^2(s + 25)}\right) \tag{11-34}$$

Al llevar a cabo la transformada z en la ecuación (11-34) con $T = 0.01$ s, se tiene:

$$G_{h0}G_p(z) = \frac{0.1152z + 0.106}{(z-1)(z-0.7788)} \tag{11-35}$$

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema en tiempo discreto es:

$$\frac{\Theta_o(z)}{\Theta_r(z)} = \frac{G_{h0}G_p(z)}{1 + G_{h0}G_p(z)} = \frac{0.1152z + 0.106}{z^2 - 1.6636z + 0.8848} \tag{11-36}$$

La respuesta al escalón unitario del sistema no compensadc se muestra en la Fig. 11-12. El sobrepaso máximo es de 66%.

Al llevar a cabo el diseño en el dominio de la frecuencia empleando la transformación w de la ecuación (6-46),

$$z = \frac{(2/T) + w}{(2/T) - w} \tag{11-37}$$

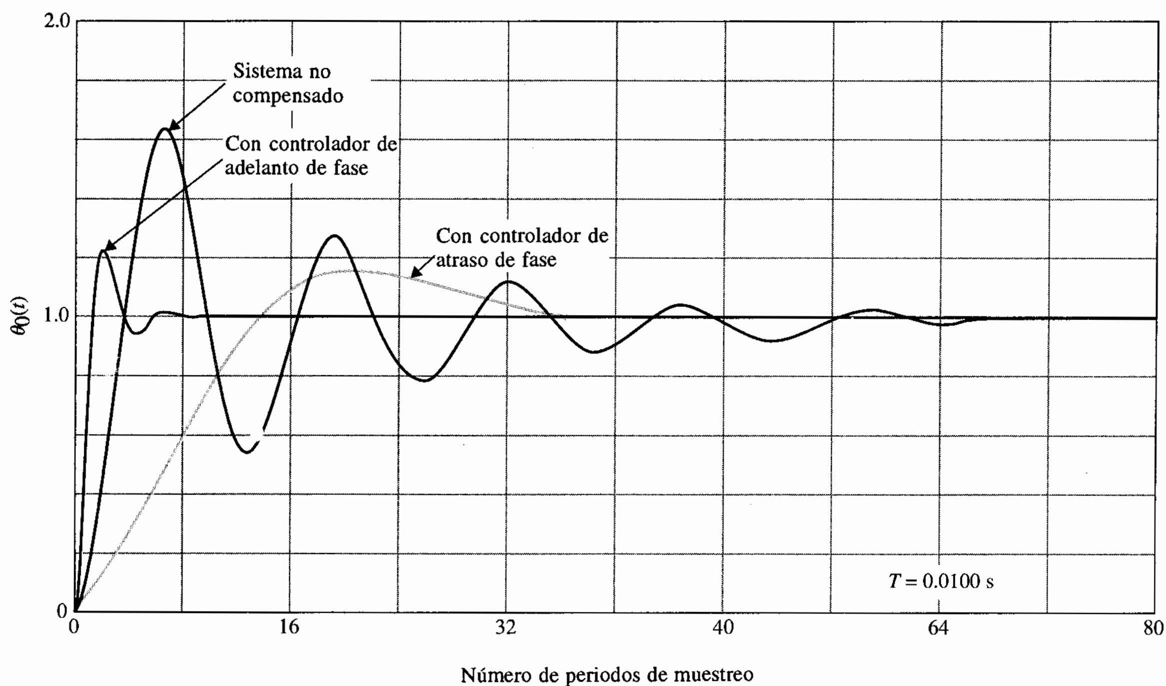


Figura 11-12 Respuestas al escalón del sistema del rastreador solar en tiempo discreto en el ejemplo 11-3.

Al sustituir la ecuación (11-37) por la ecuación (11-35), se tiene:

$$G_{h0}G_p(w) = \frac{100(1 - 0.005w)(1 + 0.000208w)}{w(1 + 0.0402w)} \qquad (11\text{-}38)$$

Las trazas de Bode de la última ecuación se muestran en la Fig. 11-13. Los márgenes de ganancia y fase del sistema no compensado son 6.39 dB y 14.77°, respectivamente.

Diseño del controlador de atraso de fase en el dominio de la frecuencia

Primero se diseña el sistema empleando un controlador de atraso de fase con la función de transferencia dada en la ecuación (11-31) con $a < 1$. Se requiere que el margen de fase del sistema sea de por lo menos 50°. De las trazas de Bode en la Fig. 11-13, un margen de fase de 50° se puede realizar si el punto de cruce de ganancia está en $\omega_w = 12.8$ y la ganancia de la curva de magnitud de $G_{h0}G_p(j\omega_w)$ es de 16.7 dB. Por lo que se necesitan –16.7 dB de atenuación para bajar la curva de magnitud de tal forma que cruzará al eje 0-dB en $\omega_w = 12.8$. Se hace:

$$20 \log_{10} a = -16.7 \text{ dB} \qquad (11\text{-}39)$$

de donde se obtiene $a = 0.1462$. A continuación, se hace $1/a\tau$ para que esté por lo menos una década abajo del punto de cruce de ganancia en $\omega_w = 12.8$. Se hace:

$$\frac{1}{a\tau} = 1 \qquad (11\text{-}40)$$

Por tanto:

$$\frac{1}{\tau} = a = 0.1462 \qquad (11\text{-}41)$$

El controlador de atraso de fase en el dominio w es:

$$G_c(w) = \frac{1 + a\tau w}{1 + \tau w} = \frac{1 + w}{1 + 6.84w} \qquad (11\text{-}42)$$

Al sustituir la relación de la transformada z-w, $w = (2/T)(z - 1)/(z + 1)$ en la ecuación (11-42), el controlador de atraso de fase en el dominio z se obtiene como:

$$G_c(z) = 0.1468 \frac{z - 0.99}{z - 0.9985} \qquad (11\text{-}43)$$

Las trazas de Bode de la función de transferencia de la trayectoria directa con el controlador de atraso de fase de la ecuación (11-42) se muestra en la Fig. 11-13. El margen de fase del sistema compensado es aumentado a 55°. La respuesta al escalón unitario del atraso de fase del sistema compensado se muestra en la Fig. 11-12. El sobrepaso máximo se reduce a 16%.

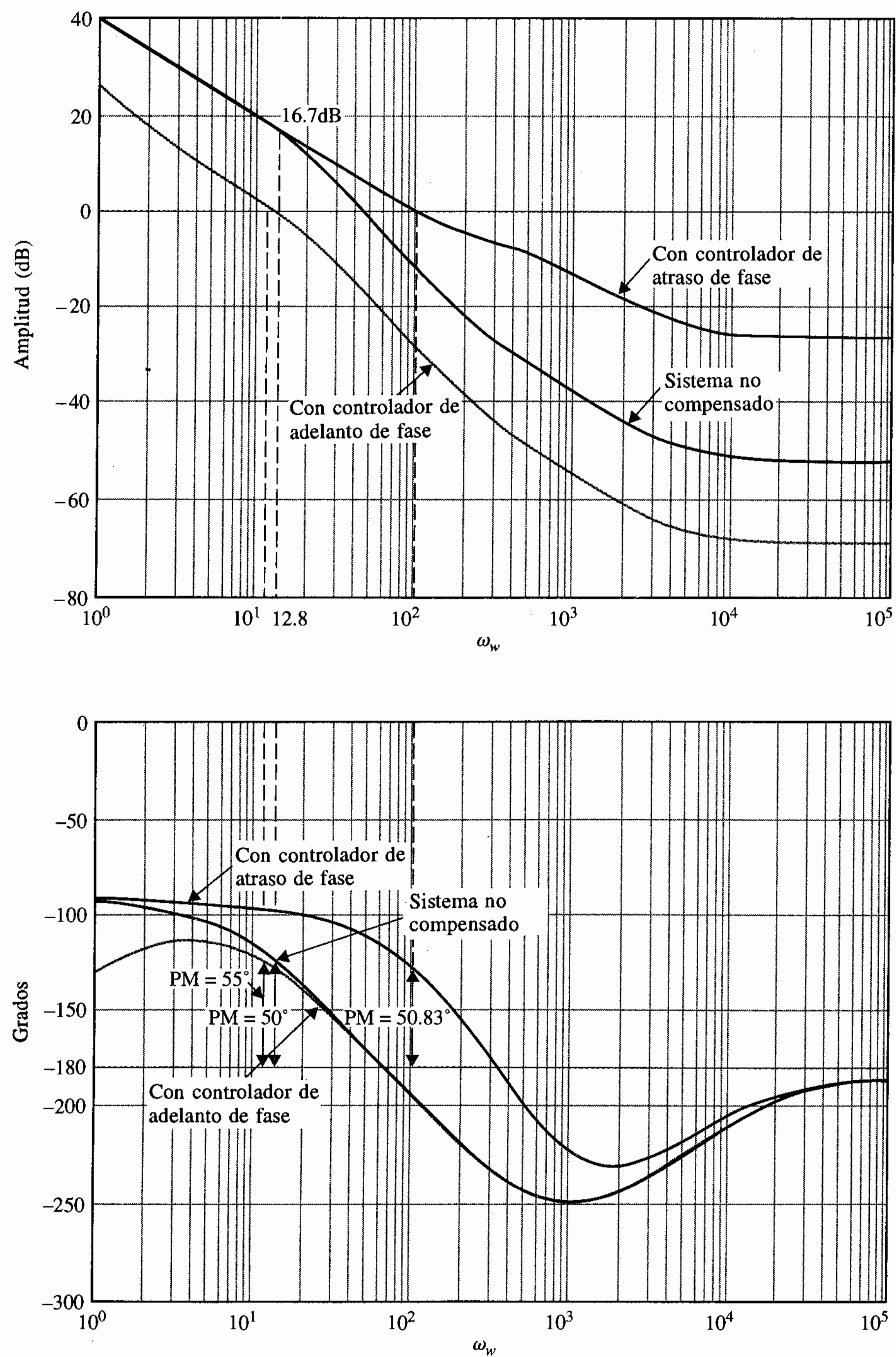


Figura 11-13 Trazas de Bode del sistema del rastreador solar en tiempo discreto en el ejemplo 11-3.

Diseño del controlador de adelanto de fase en el dominio de la frecuencia

Un controlador de adelanto de fase se obtiene al emplear $a > 1$ en la ecuación (11-31). El mismo principio para el diseño de controladores de adelanto de fase de sistemas en tiempo continuo descrito en el Cap. 10, se puede aplicar aquí. Ya que la pendiente de la curva de fase cercana al cruce de ganancia es más bien empinada, como se muestra en la Fig. 11-13, se espera que alguna dificultad pueda surgir en el diseño del controlador de adelanto de fase para el sistema. No obstante, se puede asignar un valor relativamente largo para a en vez de emplear la cantidad de adelanto de fase requerida como guía.

Al hacer $a = 20$. La ganancia del controlador en valores altos de ω_w es:

$$20 \log_{10} a = 20 \log_{10} 20 = 26 \text{ dB} \tag{11-44}$$

De la técnica de diseño detallada en el Cap. 10, el nuevo cruce de ganancia debería encontrarse en el punto donde la curva de magnitud es $-26/2 = -13$ dB. Por lo que el significado geométrico de las dos frecuencias de corte del controlador de adelanto de fase deberían estar en el punto donde la curva de magnitud de $G_{h0}G_p(j\omega)$ es -13 db. De la Fig. 11-13 se tiene $\omega_w = 115$. Por tanto:

$$\frac{1}{\tau} = 115\sqrt{a} = 514 \tag{11-45}$$

La función de transferencia en el dominio w del controlador de adelanto de fase es:

$$G_c(w) = \frac{1 + a\tau w}{1 + \tau w} = \frac{1 + 0.03888w}{1 + 0.001944w} \tag{11-46}$$

La función de transferencia del controlador de adelanto de fase en el dominio z es:

$$G_c(z) = \frac{8.7776z - 6.7776}{1.3888z + 0.6112} \tag{11-47}$$

Las trazas de Bode del sistema compensado de adelanto de fase se muestran en la Fig. 11-13. El margen de fase del sistema compensado es 50.83°. La respuesta al escalón unitario del sistema compensado de adelanto de fase se muestra en la Fig. 11-12. El sobrepaso máximo es del 27%, pero el tiempo de levantamiento es más rápido.

Diseño del controlador digital PD en el plano z

El controlador digital PD se describe mediante la función de transferencia en la ecuación (11-14) y se repite como:

$$G_c(z) = \frac{(K_P + K_D/T)z - K_D/T}{z} \tag{11-48}$$

Para satisfacer la condición de $G_c(1) = 1$, de tal forma que $G_c(z)$ no afecte el error en estado estable del sistema, se pone $K_P = 1$. Al aplicar el controlador digital PD como controlador en cascada al sistema rastreador solar, la función de transferencia de la trayectoria directa del sistema compensado es:

$$G_c(z)G_{h0}G_p(z) = \frac{(1 + 100K_D)z - 100\,K_D}{z}\,\frac{0.1152z + 0.106}{(z-1)(z-0.7788)} \tag{11-49}$$

Se puede emplear el método de los contornos de las raíces para investigar los efectos de variar K_D. La ecuación característica del sistema en lazo cerrado es:

$$z(z^2 - 1.6636z + 0.8848) + 11.52K_D(z - 1)(z + 0.9217) = 0 \qquad (11\text{-}50)$$

Al dividir ambos miembros de la última ecuación entre los términos que no contienen a K_D, la función de transferencia de la trayectoria directa equivalente con K_D apareciendo como factor multiplicativo es:

$$G_{eq}(z) = \frac{11.52K_D(z - 1)(z + 0.9217)}{z(z^2 - 1.6636z + 0.8848)} \qquad (11\text{-}51)$$

Los contornos de las raíces del sistema para $K_D > 0$ se muestran en la Fig. 11-14. Estos contornos de las raíces muestran que la efectividad del controlador digital PD está limitada para este sistema, ya que los contornos no se sumergen lo suficiente hacia el eje real. De hecho, se puede mostrar que el mejor valor de K_D desde el punto de vista del sobrepaso es 0.022 y el máximo sobrepaso es 28%.

Diseño del controlador digital PI en el plano z

El controlador digital PI presentado en la Sec. 11-2-1 se puede utilizar para mejorar el desempeño en estado estable al incrementar el tipo del sistema, y al mismo tiempo, mejorar la estabilidad relativa a través del uso del principio "dipolo". Seleccionemos la implementación por integración rectangular hacia atrás del controlador PID dado en la ecuación (11-13). Con $K_D = 0$, la función de transferencia del controlador digital PI se convierte en:

$$G_c(z) = \frac{K_Pz - (K_P - K_IT)}{z - 1} = K_P\frac{z - (1 - K_IT/K_P)}{z - 1} \qquad (11\text{-}52)$$

El principio del diseño "dipolo" del controlador PI es colocar el cero de $G_c(z)$ muy cercano al polo en $z = 1$. La ganancia efectiva provista por el controlador es en esencia igual a K_P.

Para crear un problema del lugar geométrico de las raíces, la función de transferencia en la ecuación (11-35) se escribe como:

$$G_{h0}G_p(z) = \frac{K(z + 0.9217)}{(z - 1)(z - 0.7788)} \qquad (11\text{-}53)$$

donde $K = 0.1152$. El lugar geométrico de las raíces del sistema se dibuja como se muestra en la Fig. 11-15. Las raíces de la ecuación característica cuando $K = 0.1152$ son $0.8318 + j0.4392$ y $0.8318 - j0.4392$. Como se mostró, el sobrepaso máximo del sistema es de 66%. Si K se reduce a 0.01152, las raíces de la ecuación característica están en $0.8836 + j0.0926$ y $0.8836 - j0.0926$. El sobrepaso máximo se reduce a sólo el 3%. Se puede mostrar que si la ganancia en el numerador de la ecuación (11-33) se reduce a 250, el sobrepaso máximo del sistema se reduciría al 3%. Esto significa que para realizar una mejora similar del sobrepaso máximo, el valor de K_P en la ecuación (11-52) debe hacerse a 0.1 Al mismo tiempo, se deja que el cero de $G_c(z)$ esté en 0.995. Por lo que el valor correspondiente de K_I es 0.05.

$$G_c(z) = 0.1\frac{z - 0.995}{z - 1} \qquad (11\text{-}54)$$

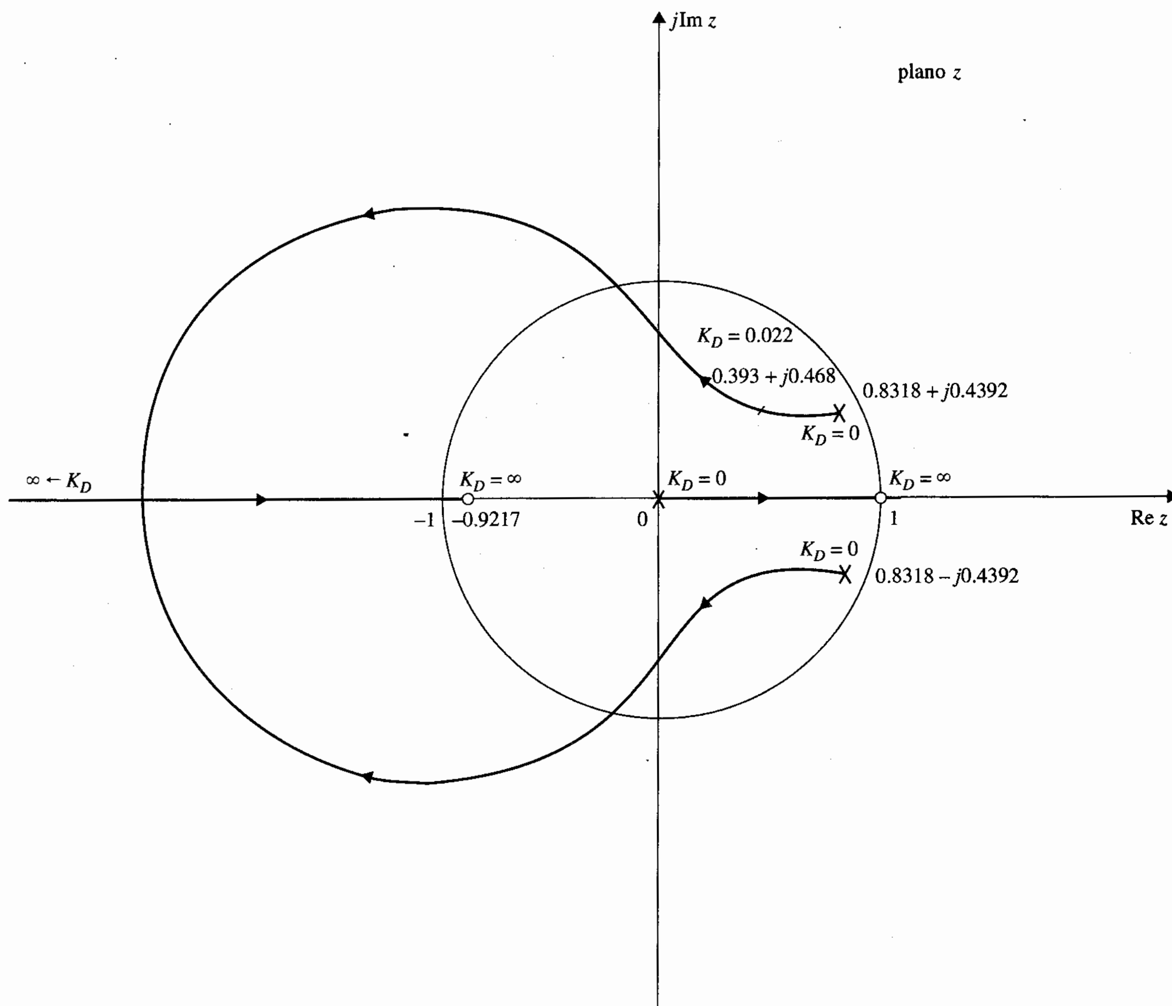


Figura 11-14 Contornos de las raíces del sistema del rastreador solar en el ejemplo 11-3 con controlador digital PD, K_D varía.

La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema con el controlador PI se convierte en:

$$G_c(z)G_{h0}G_p(z) = \frac{0.1K(z + 0.995)(z + 0.9217)}{(z - 1)^2(z - 0.7788)} \tag{11-55}$$

donde $K = 0.1152$. El lugar geométrico de las raíces del sistema compensado se muestra en la Fig. 11-15. Cuando $K = 0.1152$, las dos raíces dominantes de la ecuación característica están en $0.8863 + j0.0898$ y $0.8863 - j0.0898$. La tercera raíz está en 0.9948, que está muy cercana al polo de $G_c(z)$ en $z = 1$, y por tanto, el efecto sobre la respuesta transitoria es despreciable. Se puede mostrar que el actual sobrepaso

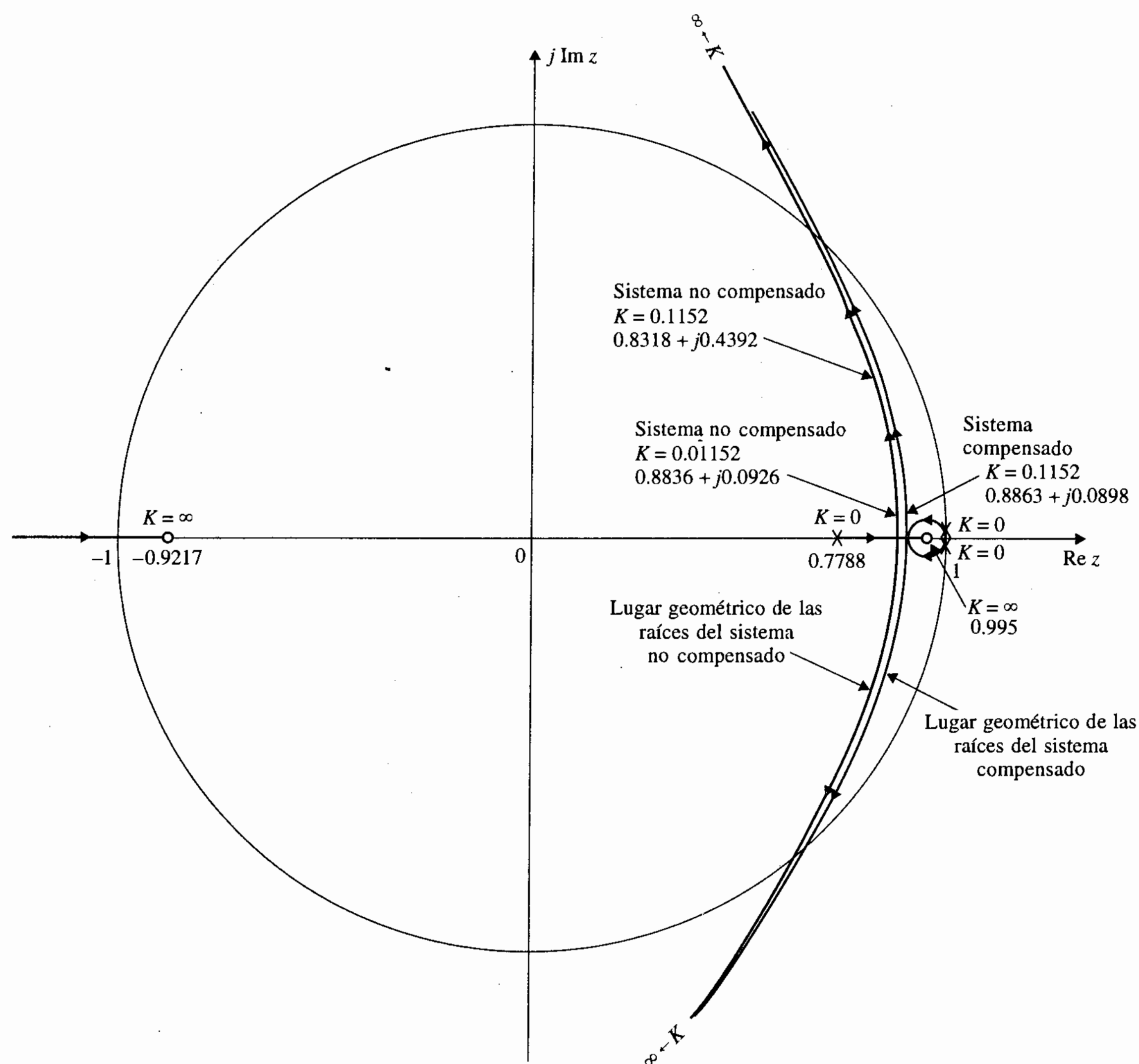


Figura 11-15 Lugar geométrico de las raíces del sistema del rastreador solar en el ejemplo 11-3, con y sin controlador digital PI.

máximo del sistema con la función de transferencia de la trayectoria directa en la ecuación (11-55) es aproximadamente del 8%.

Este problema de diseño sólo ilustra las mecánicas al diseñar un controlador de adelanto de fase y de atraso de fase empleando el método de la transformación w en el dominio de la frecuencia y controladores digitales PD y controladores PI en el plano z. No se intento optimizar el sistema en relación a un conjunto de especificaciones de desempeño. ▲

11-5 Diseño de sistemas en tiempo discreto con respuesta con oscilaciones muertas

Una diferencia entre un sistema de control en tiempo continuo y un sistema de control en tiempo discreto es que éste último es capaz de exhibir una respuesta con oscilaciones muertas. Una respuesta con oscilaciones muertas es aquella que alcanza la trayectoria de referencia deseada en un tiempo mínimo sin error. En contraste, un sistema en tiempo continuo alcanza la trayectoria final de estado estable o valor en teoría solo cuando el tiempo llega a infinito. La operación de conmutación de muestreo permite a los sistemas en tiempo discreto ser capaces de tener un periodo transitorio finito. La Fig. 11-16 muestra una respuesta en el tiempo con oscilaciones muertas típico de un sistema en tiempo discreto sujeto a una entrada escalón unitario. La respuesta de salida alcanza el estado estable deseado con cero error en un número mínimo de periodos de muestreo sin oscilaciones entre muestras.

H.R. Sirisena [5] mostró que un sistema de control en tiempo discreto dado con el proceso controlado está descrito por:

$$G_{h0}G_p(z^{-1}) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} \tag{11-56}$$

para que el sistema tenga una respuesta con oscilaciones muertas a una entrada escalón, la función de transferencia del controlador digital está dada por:

$$G_c(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(1) - Q(z^{-1})} \tag{11-57}$$

donde $Q(1)$ es el valor de $Q(z^{-1})$ con $z^{-1} = 1$.

El ejemplo siguiente ilustra el diseño de un sistema en tiempo discreto con una respuesta con oscilaciones muertas empleando la ecuación (11-57).

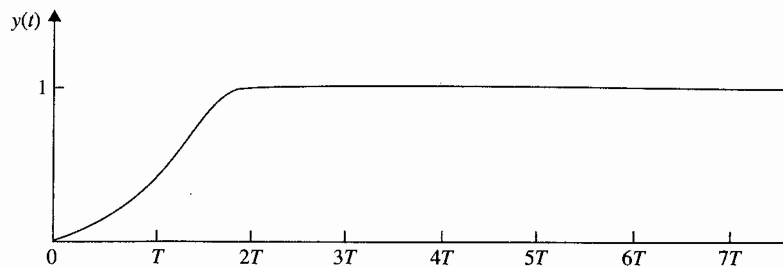
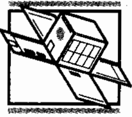


Figura 11-16 Una respuesta con oscilaciones muertas típica a una entrada escalón unitario.

Ejemplo 11-4



Considere el sistema en tiempo discreto del rastreador solar discutido en el ejemplo 11-3. La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema no compensado esta dada en la ecuación (11-35), y se escribe como:

$$G_{h0}\hat{G}_p(z^{-1}) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{0.1152z^{-1}(1 + 0.9217z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.7788z^{-1})} \tag{11-58}$$

Por lo que:

$$Q(z^{-1}) = 0.1152z^{-1}(1 + 0.9217z^{-1}) \tag{11-59}$$
$$P(z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 - 0.7788z^{-1}) \tag{11-60}$$

y $Q(1) = 0.22138$.

El controlador digital para una respuesta con oscilaciones muertas se obtiene al emplear la ecuación (11-57).

$$G_c(z^{-1}) = \frac{P(z^{-1})}{Q(1) - Q(z^{-1})} = \frac{(1 - z^{-1})(1 - 0.7788z^{-1})}{0.22138 - 0.1152z^{-1} - 0.106z^{-2}} \tag{11-61}$$

Por tanto:

$$G_c(z) = \frac{(z - 1)(z - 0.7788)}{0.22138z^2 - 0.1152z - 0.106} \tag{11-62}$$

La función de transferencia de la trayectoria directa del sistema compensado es:

$$G_c(z)G_{h0}G_p(z) = \frac{0.1152(z + 0.9217)}{0.22138z^2 - 0.1152z - 0.106} \tag{11-63}$$

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema compensado es:

$$\frac{\Theta_o(z)}{\Theta_r(z)} = \frac{G_c(z)G_{h0}G_p(z)}{1 + G_c(z)G_{h0}G_p(z)} = \frac{0.5204(z + 0.9217)}{z^2} \tag{11-64}$$

Para una entrada escalón unitario, la transformada de la salida es:

$$\Theta_o(z) = \frac{0.5204(z + 0.9217)}{z(z - 1)} = 0.5204z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots \tag{11-65}$$

Por lo que la respuesta de salida alcanza la entrada escalón unitario en dos periodos de muestreo.

Para mostrar que la respuesta de salida no tiene rizos entre muestras, se evalúa la velocidad de salida del sistema; esto es, $\omega_o(t) = d\theta_o(t)/dt$. La función de transferencia z de la velocidad de salida se escribe:

$$\frac{\Omega_o(z)}{\Theta_r(z)} = \frac{G_c(z)(1 - z^{-1})\mathcal{Z}[2500/s(s + 25)]}{G_c(z)G_{h0}G_p(z)} = \frac{100(z - 1)}{z^2} \tag{11-66}$$

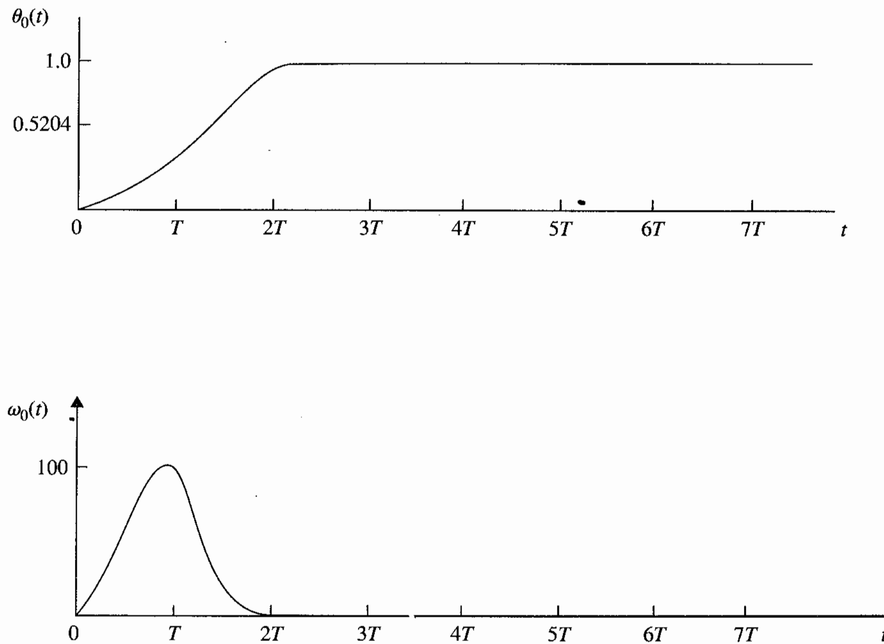


Figura 11-17 Respuestas de posición de salida y velocidad del sistema del rastreador solar en tiempo discreto en el ejemplo 11-4

La respuesta de la velocidad de salida debido a la entrada escalón unitario es:

$$\Omega_o(zx) = \frac{100}{z} = 100z^{-1} \tag{11-67}$$

▲ La sensibilidad de las raíces de un sistema con una respuesta con oscilaciones muertas es pobre.

Por lo que la velocidad de salida se convierte en cero después del segundo periodo de muestreo, lo cual prueba que la posición de la respuesta está con oscilaciones muertas sin rizos entre muestras. Las respuestas de $\theta_o(t)$ y $\omega_o(t)$ se muestran en la Fig. 11-17.

La característica de un sistema con una respuesta con oscilaciones muertas es que los polos de la función de transferencia en lazo cerrado están todos en $z = 0$. Ya que estos son polos de orden múltiple, desde el punto de vista de sensibilidad de las raíces discutido en el Cap. 8, la sensibilidad de las raíces de un sistema con una respuesta con oscilaciones muertas es muy alto. ▲

11-6 Diseño de ubicación de polos mediante la realimentación de estado

Tal como para los sistemas en tiempo continuo, el diseño de ubicación de polos a través de la realimentación de estado se puede aplicar a sistemas en tiempo discreto. Considérese el sistema en tiempo discreto descrito por la ecuación de estado:

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}u(kT) \tag{11-68}$$

donde $\mathbf{x}(kT)$ es un factor de estado $n \times 1$ y $u(kT)$ es el control de escala. El control mediante la realimentación del estado es:

$$u(kT) = -\mathbf{Kx}(kT) + r(kT) \tag{11-69}$$

donde $\mathbf{K}$ es la matriz de realimentación $1 \times n$ con elementos de ganancia constante. Al sustituir la ecuación (11-69) por la ecuación (11-68), el sistema en lazo cerrado se representa mediante la ecuación de estado:

$$\mathbf{x}[(k + 1)T] = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(kT) \tag{11-70}$$

Tal como en el caso en tiempo continuo tratado en la Sec. 10-12, se puede mostrar que si el par $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ es por completo controlable, existe una matriz $\mathbf{K}$ que puede dar una serie arbitraria de valores característicos de $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$; esto es las n raíces de la ecuación característica pueden ser colocadas de forma arbitraria.

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = 0 \tag{11-71}$$

El siguiente ejemplo ilustra el diseño de un sistema de control en tiempo discreto mediante realimentación del estado y ubicación de polos.

Ejemplo 11-5

Considere que el sistema de rastreo solar descrito en el ejemplo 10-9 está sujeto al muestreo de datos por lo que el diagrama de estado del sistema sin realimentación se muestra en la Fig. 11-18(a). El periodo de muestreo es de 0.01 s. Las dinámicas del retén de orden cero se representan mediante la rama con una función de transferencia de $1/s$. El sistema en lazo cerrado con realimentación del estado para el intervalo de tiempo $(kT) \leq t \leq (k + 1)T$ se bosqueja por el diagrama de estado que se

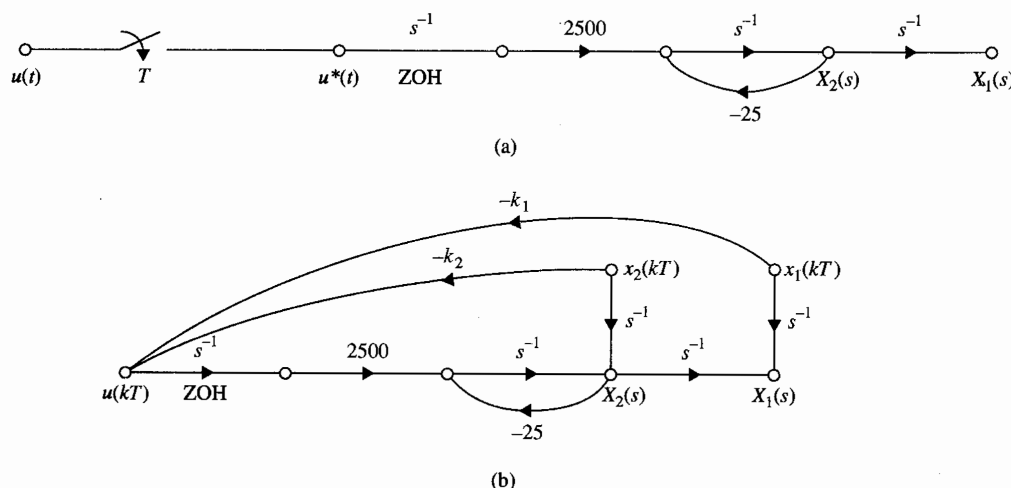
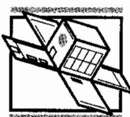


Figura 11-18 (a) Gráfica de flujo de señales del sistema del rastreador solar en tiempo discreto en lazo abierto. (b) Gráfica de flujo de señales del rastreador solar en tiempo discreto con realimentación de estado.



muestra en la Fig. 11-18(b), donde las ganancias de realimentación k_1 y k_2 forman la matriz de realimentación:

$$\mathbf{K} = [\mathrm{k}_1 \quad k_2] \tag{11-72}$$

Al aplicar la fórmula de ganancia a la SFG a la Fig. 11-18(b), con $X_1(s)$ y $X_2(s)$ como salidas y $x_1(kT)$ y $x_2(kT)$ como entradas, se tiene:

$$X_1(s) = \left[\frac{1}{s} - \frac{2500k_1}{s^2(s+25)}\right]x_1(kT) + \left[\frac{1}{s(s+25)} - \frac{2500k_2}{s^2(s+25)}\right]x_2(\mathrm{kT}) \tag{11-73}$$

$$X_2(s) = \frac{-2500k_1}{s(s+25)}x_1(kT) - \frac{2500k_2}{s(s+25)}x_2(kT) + \frac{1}{s+25}x_2(kT) \tag{11-74}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace en ambos miembros de la ecuación (11-73) y (11-74), y haciendo que $t = (k+1)T$, se tienen las ecuaciones de estado en tiempo discreto como:

$$\begin{aligned} x_1[(k+1)T] &= (1 - 0.1152k_1)x_1(kT) + (0.2212 - 0.1152k_2)x_2(kT) \\ x_2[(k+1)T] &= -22.12k_1x_1(kT) + (0.7788 - 22.12k_2)x_2(kT) \end{aligned} \tag{11-75}$$

Por lo que la matriz de coeficientes del sistema en lazo cerrado con la realimentación del estado es:

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 1 - 0.1152k_1 & 0.2212 - 0.1152k_2 \\ -22.12k_1 & 0.7788 - 22.12k_2 \end{bmatrix} \tag{11-76}$$

La ecuación característica del sistema en lazo cerrado es:

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| &= \begin{vmatrix} z - 1 + 0.1152k_1 & -0.2212 + 0.1152k_2 \\ 22.12k_1 & z - 0.7788 + 22.12k_2 \end{vmatrix} \\ &= z^2 + (-1.7788 + 0.1152k_1 + 22.12k_2)z + 0.7788 + 4.8032k_1 - 22.12k_2 = 0 \end{aligned} \tag{11-77}$$

Haciendo que el lugar deseado de las raíces de la ecuación característica sea $z = 0, 0$. Las condiciones sobre k_1 y k_2 son:

$$-1.7788 + 0.1152k_1 + 22.12k_2 = 0 \tag{11-78}$$

$$0.7788 + 4.8032k_1 - 22.12k_2 = 0 \tag{11-79}$$

Al resolver para k_1 y k_2 desde las dos ecuaciones anteriores, se tiene:

$$k_1 = 0.2033 \quad \text{y} \quad k_2 = -0.07936 \tag{11-80}$$

▲

11-7 Resumen

En este capítulo se estudió el diseño de sistemas de control lineales en tiempo discreto. Muchos diseños prácticos de sistemas de control en tiempo discreto se llevaron a cabo empleando una versión digitalizada del controlador en tiempo continuo. La implementación digital del controlador PID es primeramente presentada por el empleo de tres diferentes re-

glas de integración para la porción de integración, integración trapezoidal, integración rectangular hacia atrás, integración rectangular hacia adelante. La implementación digital de controladores en tiempo continuo puede también llevarse a cabo al adicionar unidades de muestreo y retención en las terminales de entrada y salida del controlador.

Dada la función de transferencia de un controlador digital en el dominio z, el controlador puede realizarse mediante los tres tipos básicos de descomposición o programación: programación digital directa, descomposición en paralelo, y descomposición en cascada. Al emplear la transformación w de la Sec. 7-10, la mayoría de las técnicas de diseño en el dominio de la frecuencia para sistemas en tiempo continuo pueden aplicarse al diseño de sistemas en tiempo discreto. Se dan ejemplos de cómo diseñar controladores de atraso y de adelanto de fase para sistemas de control en tiempo discreto. Una de las características distintivas de un sistema en tiempo discreto es que es capaz de alcanzar una respuesta con oscilaciones muertas. Un método de diseño de un sistema en tiempo discreto con una respuesta con oscilaciones muertas, y sin rizos entre muestras, se describe. Por último se presentó, el diseño de ubicación de polos de sistemas en tiempo discreto con la realimentación del estado.

El propósito de este capítulo es dar un repaso de los fundamentos de diseño de sistemas de control en tiempo discreto. Para un tratamiento a profundidad sobre el tema, el lector debe referirse a los libros dedicados a sistemas de control en tiempo discreto listados en la sección de referencias de este capítulo.

Preguntas de repaso

1. De la aproximación en tiempo discreto de la derivada de una función de tiempo $f(t)$, $df(t)/dt$, mediante la regla de diferencias hacia atrás.
2. Describa las tres reglas de integración digital descritas en este capítulo.
3. Mencione las condiciones para la que la función siguiente de transferencia sea físicamente realizable.

$$G_c(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

4. Mencione la ventaja de utilizar la transformación w para el diseño de sistemas en tiempo discreto.
5. ¿Qué es la respuesta con oscilaciones muertas?
6. ¿Cuál es la característica de los polos de la función de transferencia de un sistema que tiene una respuesta con oscilaciones muertas?
7. ¿Qué puede decir acerca de la sensibilidad de las raíces de un sistema con una respuesta con oscilaciones muertas?

Referencias

1. **G. F. FRANKLIN, J. D. POWELL, and M. L. WORKMAN,** *Digital Control of Dynamic Systems,* 2nd ed., Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1990.

2. **B. C. KUO,** *Digital Control Systems,* 2nd ed., Saunders College Publishing, Philadelphia, 1992.
3. **K. OGATA,** *Discrete-Time Control Systems,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.
4. **C. L. PHILLIPS and H. T. NAGLE, JR.,** *Digital Control System Analysis and Design,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
5. **H. R. SIRISENA,** "Ripple-Free Deadbeat Control of SISO Discrete Systems," IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-30, pp. 168–170, February 1985.

Problemas

▲ Integración digital

11-1. Encuentre los equivalentes digitales empleando las reglas de integración siguientes para los controladores dados: la regla de integración rectangular hacia atrás, la regla de integración rectangular hacia adelante y la regla de integración trapezoidal. Utilice la regla de diferencia hacia atrás para las derivadas.

(a) $G_c(s) = 2 + \dfrac{200}{s}$ **(b)** $G_c(s) = 10 + 0.1s$ **(c)** $G_c(s) = 1 + 0.2s + \dfrac{5}{s}$

▲ Implementación del programa digital de controladores digitales

11-2. Un controlador en tiempo continuo con unidades de muestreo y retención se muestra en la Fig. 11P-2. El periodo de muestreo es de 0.1 s. Encuentre la función de transferencia del controlador digital equivalente. Dibuje un diagrama de implementación de un programa digital para el controlador digital. Lleve a cabo el análisis para los siguientes controladores en tiempo continuo.

(a) $G_c(s) = \dfrac{10}{s + 12}$ **(b)** $G_c(s) = \dfrac{10(s + 1.5)}{s + 10}$

(c) $G_c(s) = \dfrac{s}{s + 1.55}$ **(d)** $G_c(s) = \dfrac{1 + 0.4s}{1 + 0.01s}$

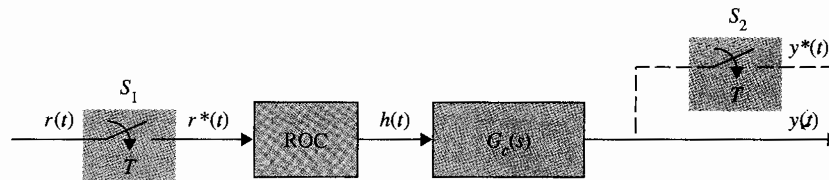


Figura 11P-2

▲ Funciones de transferencia digital físicamente realizables

11-3. Determine cuales de las siguientes funciones de transferencia digital son físicamente realizables.

(a) $G_c(z) = \dfrac{10(1 + 0.2z^{-1} + 0.5z^{-2})}{z^{-1} + z^{-2} + 1.5z^{-3}}$ **(b)** $G_c(z) = \dfrac{1.5z^{-1} - z^{-2}}{1 + z^{-1} + 2z^{-2}}$

(c) $G_c(z) = \dfrac{z + 1.5}{z^3 + z^2 + z + 1}$ (d) $G_c(z) = z^{-1} + 0.5z^{-3}$

(e) $G_c(z) = 0.1z + 1 + z^{-1}$ (f) $G_c(z) = \dfrac{z^{-1} + 2z^{-2} + 0.5z^{-3}}{z^{-1} + z^{-2}}$

▲ Sistema de control de inventario con controlador digital PD.

11-4. La función de transferencia del proceso del sistema de control de inventario descrito en el problema 10-17: es

$$G_p(s) = \frac{4}{s^2}$$

El diagrama de bloques del sistema con un controlador PD, muestreador y retén se muestra en la Fig. 11P-4.

$$G_c(s) = 1 + 10s$$

Encuentre la función de transferencia del controlador digital PD equivalente empleando la ecuación (11-48).

$$G_c(z) = \frac{(K_P + K_D/T)z - K_D/T}{z}$$

Seleccione un periodo de muestreo T para que el sobrepaso máximo de $y(kT)$ sea menor al 1%.

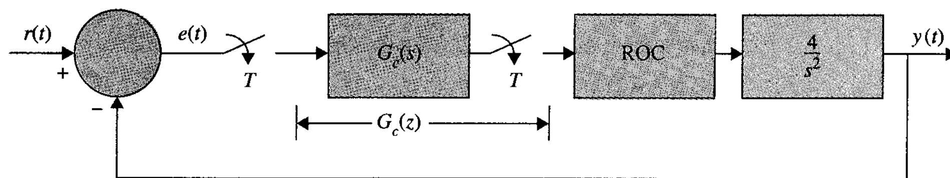


Figura 11P-4

▲ Sistema de control de inventario con controlador digital PD

11-5. La Fig. 11P-4 muestra el diagrama de bloques del sistema de control de inventario descrito en el problema 10-17 con un controlador digital PD. El periodo de muestreo desde 0.01 s. Considere que el controlador digital PD tiene la función de transferencia:

$$G_c(z) = K_P + \frac{K_D(z - 1)}{Tz}$$

(a) Encuentre los valores de K_P y K_D para que dos de las tres raíces de la ecuación característica estén en 0.5 y 0.5. Encuentre la tercer raíz. Grafique la respuesta al escalón unitario $y(kT)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

(b) Haga $K_P = 1$. encuentre el valor de K_D para que el sobrepaso máximo de $y(kT)$ sea un mínimo.

▲ Sistema de control de inventario con controlador digital de adelanto de fase

11-6. Para el sistema de control de inventario descrito en el problema 11-5, diseñe un controlador de adelanto de fase empleando la transformación w para que el margen de fase del sistema sea de por lo menos 60°. ¿Puede diseñar un controlador de atraso de fase en el dominio w? Si no, explique por qué. Utilice $T = 0.1$ s.

▲ Sistema de control de localización de una aeronave con controlador digital

11-7. La función de transferencia del proceso del sistema de control de posición de segundo orden descrito en el problema 10-5 es:

$$G_p(s) = \frac{4500K}{s(s + 361.2)}$$

Considere que el sistema es compensado mediante una serie de controlador digital $G_c(z)$ a través de un muestreador y retén. $T = 0.001$ s.

(a) Encuentre el valor de K para que la constante del error rampa discreta K_v^* sea 1000. Con el valor de K encontrado en la parte (a), dibuje la respuesta al escalón unitario de la salida $y^*(t)$, y encuentre el sobrepaso máximo.

(b) Diseñe el controlador digital para que la salida sea una respuesta con oscilaciones muertas a una entrada escalón. Grafique la respuesta al escalón unitario.

▲ Sistema del rastreador solar con controlador digital, respuesta con oscilaciones muertas

11-8. El sistema del rastreador solar descrito en el ejemplo 11-3 se considera que va a controlarse mediante un controlador digital en serie con la función de transferencia $G_c(z)$. El periodo de muestreo es 0.05 s. Diseñe el controlador para que la salida del sistema sea una respuesta con oscilaciones muertas a una entrada escalón unitario. Grafique la respuesta al escalón unitario del sistema diseñado.

▲ Sistema del rastreador solar con realimentación de estado.

11-9. Diseñe el control mediante la realimentación de estado para el sistema del rastreador solar en el ejemplo 11-5 para que las raíces de la ecuación característica estén en $z = 0.5$ y 0.5.

▲ Control mediante la realimentación de estado.

11-10. Considere el sistema de control digital:

$$\mathbf{x}[(k + 1)T] = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}u(kT)$$

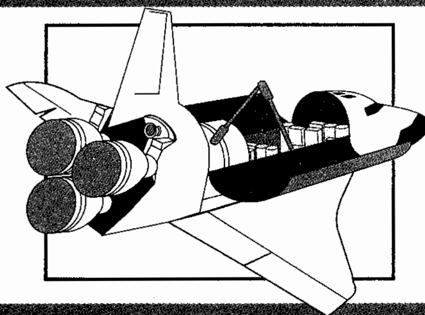
donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El control mediante la realimentación del estado se describe mediante $u(kT) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(kT)$, donde $\mathbf{K} = [k_1 \ \ k_2]$. Encuentre los valores de k_1 y k_2 para que las raíces de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado estén en 0.5 y 0.7.

Apéndice A

Trazas en el dominio de la frecuencia



PALABRAS CLAVE Y TEMAS

- ▲ **Traza polar**
- ▲ **Trazas de Bode**
- ▲ **Traza de magnitud-fase**
- ▲ **Punto de cruce de ganancia**
- ▲ **Punto de cruce de fase**
- ▲ **Funciones de fase mínima y de fase no mínima**

Asúmase que $G(s)$ es la función de transferencia de la trayectoria directa de un sistema de control lineal con realimentación unitaria. El análisis en el dominio de la frecuencia del sistema en lazo cerrado puede manejarse desde las trazas en el dominio de la frecuencia de $G(s)$ con s sustituida por $j\omega$. La función $G(j\omega)$ es en general una función compleja de la frecuencia ω, y se puede escribir como:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|\angle G(j\omega) \quad \text{(A-1)}$$

donde $|G(j\omega)|$ denota la magnitud de $G(j\omega)$ y $\angle G(j\omega)$ es la fase de $G(j\omega)$.

Las siguientes trazas en el dominio de la frecuencia de $G(j\omega)$ con respecto a ω a menudo se emplean en el análisis y diseño de sistemas de control lineal en el dominio de la frecuencia.

1. *Traza polar.* Una traza de la magnitud en relación a la fase en coordenadas polares cuando ω varía desde cero hasta infinito.
2. *Trazas de Bode.* Una traza de la magnitud en decibeles contra ω (o $\log_{10}\omega$) en coordenadas semilog (o rectangulares)
3. *Traza de magnitud-fase.* Una traza de la magnitud en decibeles con respecto a la fase en coordenadas rectangulares con ω como un parámetro variable sobre la curva.

Construcción asistida por computadora de las trazas en el dominio de la frecuencia

Crear los datos para graficar las trazas en el dominio de la frecuencia usualmente consume bastante tiempo si los cálculos se realizan en forma manual, en especial si la función es de orden superior. En la práctica, una computadora digital debe ser utilizada para realizar los cálculos así como la graficación de la traza. Muchos paquetes de software están disponibles en forma comercial y pueden emplearse para la construcción de las trazas en el dominio de la frecuencia. El programa **FREQRP** del paquete de software **ACSP** y **CSAD/MATLAB** en las funciones **bplot** y **prlplot** pueden emplearse para este propósito. Desde un punto de vista analítico, el analista y diseñador debe estar familiarizado con las propiedades de las trazas en el dominio de la frecuencia, de tal forma que las interpretaciones apropiadas puedan hacerse sobre estas trazas elaboradas con ayuda de una computadora.

A-1 Trazas polares

La traza polar de una función de la variable compleja s, $G(s)$, es una gráfica de la magnitud de $G(j\omega)$ con respecto a la fase de $G(j\omega)$ en coordenadas polares cuando ω varía desde cero hasta infinito. Desde el punto de vista matemático, el proceso pueden referirse como el mapeo de la mitad positiva del eje imaginario del plano s dentro del plano $G(j\omega)$. Un ejemplo simple de

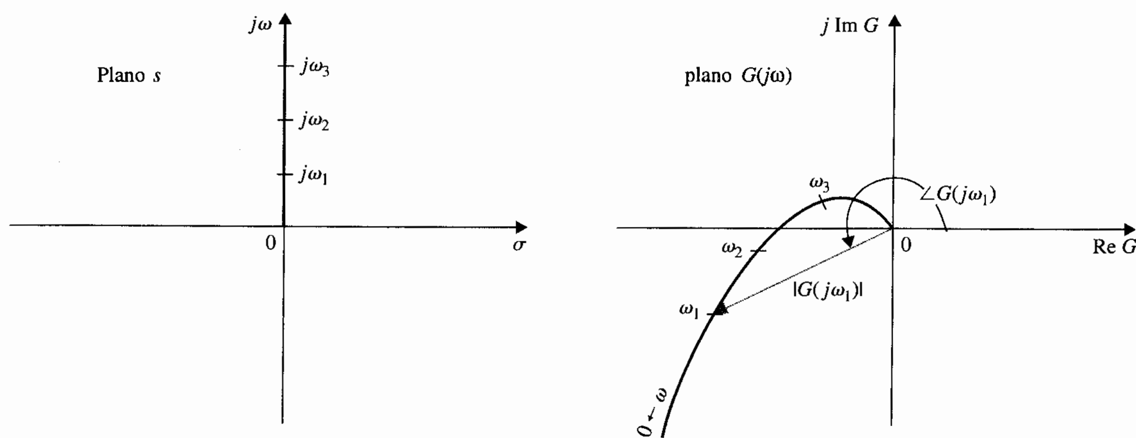


Figura A-1 La traza polar se muestra como un mapeo de la mitad positiva del eje $j\omega$ en el plano s dentro del plano $G(j\omega)$.

este mapeo se muestra en la Fig. A-1. Para cualquier frecuencia $\omega = \omega_1$, la magnitud y la fase de $G(j\omega_1)$ están representadas por un vector en el plano $G(j\omega)$. Al medir la fase, la dirección del sentido contrario a las manecillas del reloj se señala como un positivo, y el sentido de las manecillas del reloj es negativo.

Ejemplo A-1

Para ilustrar la construcción de la traza polar de una función $G(s)$, considere la función:

$$G(s) = \frac{1}{1 + Ts} \tag{A-2}$$

donde T es una constante positiva. Al hacer $s = j\omega$, se tiene:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} \tag{A-3}$$

En términos de magnitud y fase, la ecuación (A-3) se escribe:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \angle -\tan^{-1} \omega T \tag{A-4}$$

Cuando ω es cero, la magnitud de $G(j\omega)$ es unitaria, y la fase de $G(j\omega)$ está en 0°. Por lo que en $\omega = 0$, $G(j\omega)$ está representada por un vector de longitud unitaria dirigido en dirección 0°. Cuando ω se incrementa, la magnitud de $G(j\omega)$ disminuye y la fase se vuelve más negativa. Cuando ω aumenta, el largo del vector en coordenadas polares disminuye y el vector rota en sentido de las manecillas del reloj (negativa) Cuando ω se aproxima a infinito, la magnitud de $G(j\omega)$ se vuelve cero y la fase alcanza –90°. Esto se presenta mediante un vector con una longitud infinitesimalmente pequeña dirigido a lo largo del eje –90° en el plano $G(j\omega)$. Al sustituir otros valores finitos de ω en la ecuación (A-4), la traza exacta de $G(j\omega)$ se vuelve un semicírculo, como se muestra en la Fig. A-2. ▲

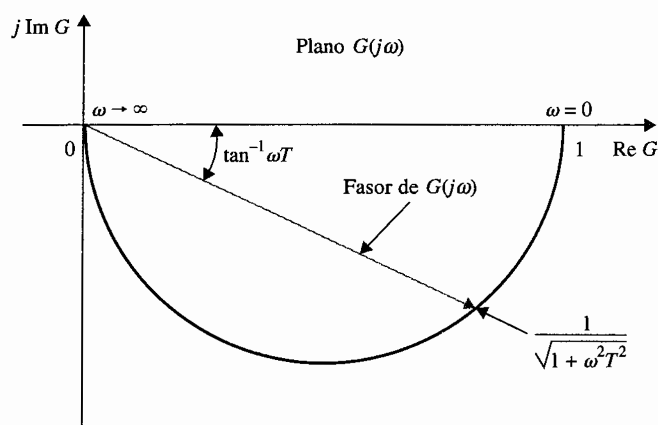


Figura A-2 Traza polar de $G(j\omega) = 1/(1 + j\omega T)$.

Ejemplo A-2

Como un segundo ejemplo ilustrativo, considere la función:

$$G(j\omega) = \frac{1 + j\omega T_2}{1 + j\omega T_1} \tag{A-5}$$

donde T_1 y T_2 son constantes reales positivas. La ecuación (A-5) se escribe:

$$G(j\omega) = \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_2^2}{1 + \omega^2 T_1^2}} \angle(\tan^{-1} \omega T_2 - \tan^{-1} \omega T_1) \tag{A-6}$$

La traza polar de $G(j\omega)$, en este caso, depende de las magnitudes relativas de T_1 y T_2. Si T_2 es mayor que T_1, la magnitud de $G(j\omega)$ siempre es mayor que la unidad cuando ω varía desde cero hastà infinito, y la fase de $G(j\omega)$ es siempre positiva. Si T_2 es menor que T_1, la magnitud de $G(j\omega)$ siempre es menor que la unidad y la fase es siempre negativa. Las trazas polares de $G(j\omega)$ de la ecuación (A-6) que corresponden a las dos condiciones arriba mencionadas, se muestran en la Fig. A-3. ▲

En muchas aplicaciones de sistemas de control, tal como el criterio de estabilidad de Nyquist, una traza exacta de la respuesta en frecuencia no es esencial. A menudo, un bosquejo de la traza polar de la función de transferencia $G(j\omega)H(j\omega)$ es bastante adecuado para el análisis de estabilidad en el dominio de la frecuencia. La forma general de la traza polar de una función $G(j\omega)$ puede determinarse de la información siguiente.

1. La conducta de la magnitud y fase de $G(j\omega)$ en $\omega = 0$ y $\omega = \infty$
2. Las intersecciones de la traza polar con los ejes real e imaginario, y los valores de ω en estas intersecciones

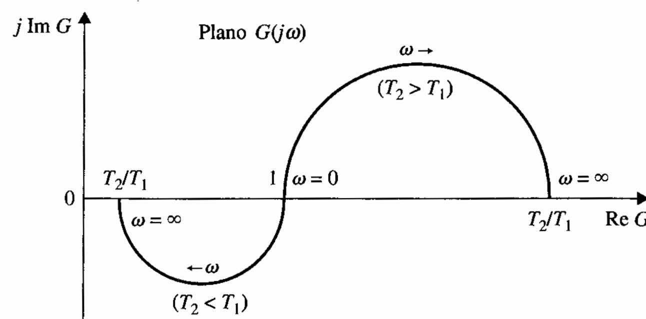


Figura A-3 Trazas polares de $G(j\omega) = (1 + j\omega T_2)/(1 + j\omega T_1)$.

Ejemplo A-3

En el análisis del dominio de la frecuencia de sistemas de control, a menudo se tienen que determinar las propiedades básicas de una traza polar. Considere la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)} \tag{A-7}$$

Al sustituir $s = j\omega$ en la ecuación (A-7), la magnitud y fase de $G(j\omega)$ en $\omega = 0$ y $\omega = \infty$ se calculan como sigue:

$$\lim_{\omega\to 0} |G(j\omega)| = \lim_{\omega\to 0} \frac{10}{\omega} = \infty \tag{A-8}$$

$$\lim_{\omega\to 0} \angle G(j\omega) = \lim_{\omega\to 0} \angle 10/j\omega = -90^\circ \tag{A-9}$$

$$\lim_{\omega\to \infty} |G(j\omega)| = \lim_{\omega\to \infty} \frac{10}{\omega^2} = 0 \tag{A-10}$$

$$\lim_{\omega\to \infty} \angle G(j\omega) = \lim_{\omega\to \infty} \angle 10/(j\omega^2) = -180^\circ \tag{A-11}$$

Por lo que las propiedades de la traza polar de $G(j\omega)$ en $\omega = 0$ y $\omega = \infty$ son certeras. A continuación, se determinan las intersecciones, si hay alguna, de la traza polar con los dos ejes del plano $G(j\omega)$. Si la traza polar de $G(j\omega)$ intercepta al eje real, en el punto de intersección, la parte imaginaria de $G(j\omega)$ es cero; esto es:

$$\text{Im}[G(j\omega)] = 0 \tag{A-12}$$

Para expresar $G(j\omega)$ como la suma de sus partes reales e imaginarias, se debe racionalizar $G(j\omega)$ mediante la multiplicación de su numerador y denominador por el complejo conjugado del denominador.

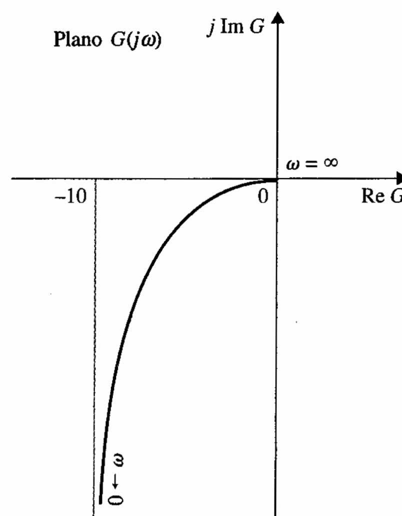


Figura A-4 Traza polar de $G(s) = 10/[s(s+1)]$.

Por tanto, $G(j\omega)$ se escribe:

$$G(j\omega) = \frac{10(-j\omega)(-j\omega + 1)}{j\omega(j\omega + 1)(-j\omega)(-j\omega + 1)} = \frac{-10\omega^2}{\omega^4 + \omega^2} - j\frac{10\omega}{\omega^4 + \omega^2} \tag{A-13}$$
$$= \mathrm{Re}[G(j\omega)] + j\mathrm{Im}[G(j\omega)]$$

Cuando se convierte $\mathrm{Im}[G(j\omega)]$ en cero, se tiene $\omega = \infty$, lo que significa que la gráfica $G(j\omega)$ intercepta sólo al eje real del plano $G(j\omega)$ en el origen.

En forma similar, la intersección de $G(j\omega)$ con el eje imaginario se encuentra haciendo $\mathrm{Re}[G(j\omega)]$ de la ecuación (A-13) a cero. La única solución real para ω también es $\omega = \infty$, lo que corresponde al origen del plano $G(j\omega)$. La conclusión es que la traza polar de $G(j\omega)$ *no* intercepta ninguno de los ejes en ninguna frecuencia finita diferente de cero. Bajo ciertas condiciones, nos interesan las propiedades de $G(j\omega)$ en infinito, lo que corresponde a $\omega = 0$ en este caso. En la ecuación (A-13) observamos que $\mathrm{Im}[G(j\omega)] = \infty$ y $\mathrm{Re}[G(j\omega)] = -10$ en $\omega = 0$. Con base en esta información, así como en el conocimiento de los ángulos de $G(j\omega)$ en $\omega = 0$ y $\omega = \infty$, la traza polar de $G(j\omega)$ es con facilidad bosquejada sin que en verdad se dibuje, como se muestra en la figura A-4. ▲

Ejemplo A-4

Dada la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{10}{s(s + 1)(s + 2)} \tag{A-14}$$

Se desea hacer un bosquejo en borrador de la traza polar de $G(j\omega)$. Los siguientes cálculos se hacen para las propiedades de la magnitud y fase de $G(j\omega)$ en $\omega = 0$ y $\omega = \infty$:

$$\lim_{\omega\to 0} |G(j\omega)| = \lim_{\omega\to 0} \frac{5}{\omega} = \infty \tag{A-15}$$

$$\lim_{\omega\to 0} \angle G(j\omega) = \lim_{\omega\to 0} \angle 5/j\omega = -90^\circ \tag{A-16}$$

$$\lim_{\omega\to \infty} |G(j\omega)| = \lim_{\omega\to \infty} \frac{10}{\omega^3} = 0 \tag{A-17}$$

$$\lim_{\omega\to \infty} \angle G(j\omega) = \lim_{\omega\to \infty} \angle 10/(j\omega^3) = -270^\circ \tag{A-18}$$

Para encontrar las intersecciones de la traza de $G(j\omega)$ en los ejes real e imaginario del plano $G(j\omega)$, se racionaliza $G(j\omega)$ para obtener:

$$G(j\omega) = \frac{10(-j\omega)(-j\omega + 1)(-j\omega + 2)}{j\omega(j\omega + 1)(j\omega + 2)(-j\omega)(-j\omega + 1)(-j\omega + 2)} \tag{A-19}$$

Después de la simplificación, la ecuación (A-19) se escribe:

$$G(j\omega) = \mathrm{Re}[G(j\omega)] + j\mathrm{Im}[G(j\omega)] = \frac{-30}{9\omega^2 + (2 - \omega^2)^2} - \frac{j10(2 - \omega^2)}{9\omega^3 + \omega(2 - \omega^2)^2} \tag{A-20}$$

Al convertir $\mathrm{Re}[G(j\omega)]$ en cero, se tiene $\omega = \infty$ y $G(j\infty) = 0$, lo que significa que la gráfica $G(j\omega)$ intercepta con el eje imaginario sólo en el origen. El convertir $\mathrm{Im}[G(j\omega)]$ en cero, se tiene $\omega = \pm\sqrt{2}$ rad/s.

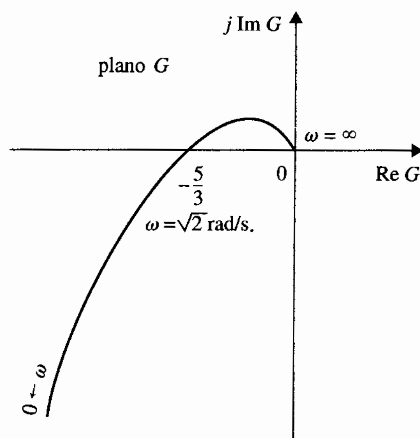


Figura A-5 Traza polar de $G(s) = 10/[s(s + 1)(s + 2)]$.

Esto da el punto de intersección sobre el eje real en:

$$G(\pm j\sqrt{2}) = -\tfrac{5}{3} \tag{A-21}$$

El resultado de $\omega = -\sqrt{2}$ rad/s no tiene significado físico, ya que la frecuencia es negativa; simplemente representa un punto de mapeo sobre el eje negativo $j\omega$ del plano s. En general, si $G(s)$ es una función racional de s (una cociente de dos polinomios de s), la traza polar de $G(j\omega)$ para los valores negativos de ω es la imagen en espejo de aquella para ω positiva, con el espejo colocado sobre el eje real del plano $G(j\omega)$. De la ecuación (A-20) también se observa que $\text{Re}[G(j0)] = \infty$ e $\text{Im}[G(j0)] = \infty$. Con esta información es posible hacer un bosquejo de la traza polar para la función de transferencia en la ecuación (A-14), como se muestra en la Fig. A-5. ▲

Aun cuando el método de obtención del bosquejo en borrador de la traza polar de una función de transferencia como se describe es directo, en general, para funciones de transferencia complicadas que pueden tener múltiples cruces sobre los ejes real e imaginario del plano de la función de transferencia, la manipulación algebraica puede de nuevo estar muy involucrada. Aún más, la traza polar es una herramienta básica para análisis; es en alguna forma embarazoso para propósitos de diseño. Se mostrará en la siguiente sección que se puede obtener información aproximada sobre la traza polar a partir de las trazas de Bode, la cual puede bosquejarse sin ningún cálculo. Por lo que para funciones de transferencia complicadas, en vez de utilizar la computadora digital, o los bosquejos de diagrama polar, si es necesario, es preferible obtenerlas con la ayuda de las trazas de Bode.

A-2 Trazas de Bode (trazas de esquina o trazas asintóticas)

Las trazas de Bode de la función $G(j\omega)$ se componen de dos gráficas, una con la amplitud de $G(j\omega)$ en decibeles (dB) contra $\log_{10}\omega$ o ω, y la otra con la fase de $G(j\omega)$ en grados como una

▲ Las trazas de Bode también se conocen como trazas de esquina o trazas asintóticas.

función de $\log_{10} \omega$ o ω. Las trazas de Bode también se conocen como las **trazas de esquina** o **trazas asintóticas** de $G(j\omega)$. Estos nombres se originan del hecho de que las trazas de Bode se pueden construir empleando aproximaciones en línea recta que son asíntoticas a la gráfica real.

En términos simples, las trazas de Bode tienen las siguientes características:

1. Ya que la magnitud de $G(j\omega)$ en las trazas de Bode se expresa en dB, los factores de producto y división en $G(j\omega)$ se vuelven adiciones y sustracciones, respectivamente. Las relaciones de fase también son sumadas y restadas entre sí de manera algebraica.
2. La gráfica de magnitud de las trazas de Bode de $G(j\omega)$ se puede aproximar mediante segmentos de línea recta, lo que permite el simple bosquejo de las trazas sin cálculos detallados.

Ya que la aproximación en línea recta de las trazas de Bode es relativamente fácil de construir, los datos necesarios para otras trazas en el dominio de la frecuencia, tales como la traza polar y la traza de magnitud-fase, pueden ser fácilmente generados a partir de las trazas de Bode.

Considere la función:

$$G(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{s^j(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} e^{-T_d s} \tag{A-22}$$

donde K y T_d son constantes reales, y las z's y p's pueden ser números complejos (en pares conjugados). En el capítulo 8, la ecuación (A-22) es la forma preferida para la construcción del lugar geométrico de las raíces, ya que los polos y ceros de $G(s)$ son con facilidad identificados. Para la construcción manual de las trazas de Bode, $G(s)$ se escribe de preferencia en la siguiente forma:

$$G(s) = \frac{K_1(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots (1 + T_m s)}{s^j(1 + T_a s)(1 + T_b s) \cdots (1 + T_n s)} e^{-T_d s} \tag{A-23}$$

donde K_1 es una constante real, las T's pueden ser números reales o complejos (en pares conjugados) y T_d es el tiempo de retardo real. Si las trazas de Bode se construyen con un programa de computadora, entonces cualquiera de las formas de las ecuaciones (A-22) o (A-23) puede ser usada.

Prácticamente todos los términos de la ecuación (A-23) son de la misma forma, sin pérdida de generalidad, se puede usar la siguiente función de transferencia para ilustrar la construcción de las trazas de Bode.

$$G(s) = \frac{K(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{s(1 + T_a s)(1 + 2\zeta s/\omega_n + s^2/\omega_n^2)} e^{-T_d s} \tag{A-24}$$

donde K, T_d, T_1, T_2, T_a, ζ, y ω_n son constantes reales. Se asume que el polinomio de segundo orden en el denominador tiene ceros complejos conjugados.

La magnitud de G en dB se obtiene al multiplicar el logaritmo en base 10 de $|G(j\omega)|$ por 20; se tiene:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}|K| + 20\log_{10}|1 + j\omega T_1| + 20\log_{10}|1 + j\omega T_2|$$
$$-20\log_{10}|j\omega| - 20\log_{10}|1 + j\omega T_a| - 20\log_{10}|1 + j2\zeta\omega - \omega^2/\omega_n^2| \quad \text{(A-25)}$$

La fase de $G(j\omega)$ es:

$$\angle G(j\omega) = \angle K + \angle(1 + j\omega T_1) + \angle(1 + j\omega T_2) - \angle j\omega - \angle(1 + j\omega T_a)$$
$$- \angle(1 + 2\zeta\omega/\omega_n - \omega^2/\omega_n^2) - \omega T_d \quad \text{rad} \quad \text{(A-26)}$$

En general, la función $G(j\omega)$ puede ser de orden más alto que aquella de la ecuación (A-24) y tener más términos factoriales. Sin embargo las ecuaciones (A-25) y (A-26) indican que los términos adicionales en $G(j\omega)$ sólo producirían términos similares en las expresiones de magnitud y fase, por lo que el método básico de construcción de las trazas de Bode sería el mismo. También se indica que, en general, $G(j\omega)$ puede contener solo cinco tipos simples de factores:

1. Factor constante: K
2. Polos o ceros en el origen de orden p: $(j\omega)^{\pm p}$
3. Polos o ceros en $s = -1/T$ de orden q: $(1 + j\omega T)^{\pm q}$
4. Polos y ceros complejos de orden r: $(1 + j2\zeta\omega/\omega_n - \omega^2/\omega_n^2)^{\pm r}$
5. Retardo puro $e^{-j\omega T_d}$, donde T_d, p, q y r son enteros positivos

Las ecuaciones (A-25) y (A-26) verifican una de las características únicas de las trazas de Bode en que cada uno de los cinco tipos listados se pueden considerar como una traza por separado; las trazas individuales son entonces sumadas o restadas de acuerdo para producir la traza de magnitud total en dB y la traza de fase de $G(j\omega)$. Las curvas pueden ser dibujadas en papel gráfico semilog o papel gráfico de coordenadas lineales rectangulares, dependiendo de si ω o $\log_{10}\omega$ se emplean como la abscisa.

Ahora se investigará el bosquejar las trazas de Bode de diferentes tipos de factores.

Constante real K

Ya que:

$$K_{dB} = 20\log_{10} K = \text{constante} \quad \text{(A-27)}$$

y

$$\angle K = \begin{cases} 0^\circ & K > 0 \\ 180^\circ & K < 0 \end{cases} \tag{A-28}$$

Las trazas de Bode de la constante real K se muestra en la Fig. A-6 en coordenadas semilog.

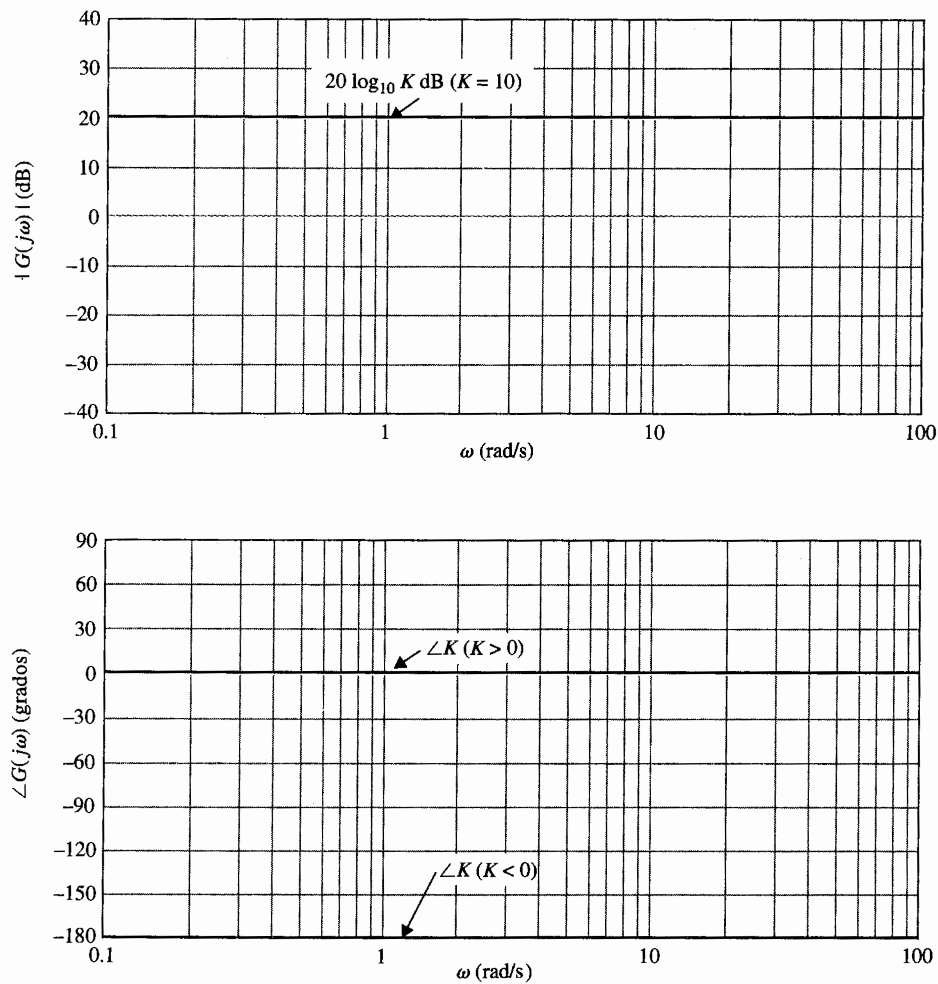


Figura A-6 Trazas de Bode de K constante.

Polos y ceros en el origen, $(j\omega)^{\pm p}$

La magnitud de $(j\omega)^{\pm p}$ en dB está dada por:

$$20 \log_{10}|(j\omega)^{\pm p}| = \pm 20p \log_{10} \omega \qquad \text{dB} \tag{A-29}$$

para $\omega \geq 0$. La última expresión para la p dada representa una línea recta ya sea en coordenadas semilog o rectangulares. Las pendientes de estas líneas se determinan tomando la derivada de la ecuación (A-29) con respecto a $\log_{10} \omega$; esto es:

$$\frac{d}{d \log_{10} \omega}(\pm 20p \log_{10} \omega) = \pm 20p \qquad \text{dB/década} \tag{A-30}$$

Estas líneas pasan a través del eje 0-dB en $\omega = 1$. Por lo que el cambio de unidad en $\log_{10} \omega$ corresponde al cambio de $\pm 20p$ dB en magnitud. Aún más, un cambio de unidad en $\log^{10} \omega$ en coordenadas rectangulares es equivalente a una **década** de variación en ω, esto es, de 1 a 10, 10 a 100, etc., en coordenadas semilog. Por lo que las pendientes de las líneas rectas descritas por la ecuación (A-29) se dicen que tienen $\pm 20p$ dB/década de frecuencia.

En lugar de emplear décadas, algunas veces se emplean **octavas** para representar la separación de dos frecuencias. Las frecuencias ω_1 y ω_2 se separan por una octava si $\omega_2/\omega_1 = 2$. El número de décadas entre cualquiera de las dos frecuencias ω_1 y ω_2 está dado por:

$$\text{número de décadas} = \frac{\log_{10}(\omega_2/\omega_1)}{\log_{10}10} = \log_{10}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \tag{A-31}$$

En forma similar, el número de octavas entre ω_2 y ω_1 es:

$$\text{número de octavas} = \frac{\log_{10}(\omega_2/\omega_1)}{\log_{10}2} = \frac{1}{0.301}\log_{10}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \tag{A-32}$$

Por lo que la relación entre octavas y décadas es:

$$\text{número de octavas} = 1/0.301 \text{ décadas} = 3.32 \text{ décadas} \tag{A-33}$$

Al sustituir la ecuación (A-33) por la ecuación (A-30), se tiene:

$$\pm 20p \text{ dB/década} = \pm 20p \times 0.301 \cong 6p \qquad \text{dB/octava} \tag{A-34}$$

Para la función $G(s) = 1/s$, que tiene un polo simple en $s = 0$, la magnitud de $G(j\omega)$ es una línea recta con una pendiente de -20 dB/década pasando a través del eje 0-dB en $\omega = 1$ rad/s.

La fase de $(j\omega)^{\pm p}$ se escribe:

$$\angle(j\omega)^{\pm p} = \pm p \times 90° \tag{A-35}$$

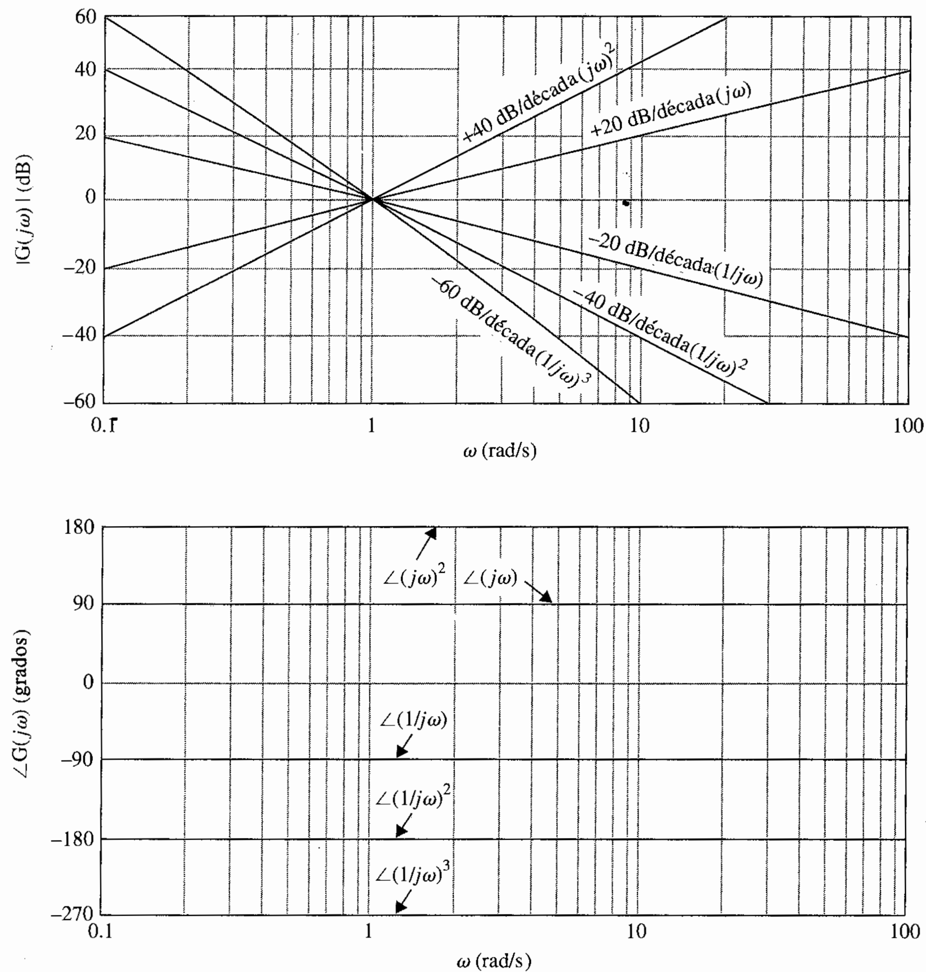


Figura A-7 Trazas de Bode de $(j\omega)^p$.

Las curvas de magnitud y fase de la función $(j\omega)^{\pm p}$ se muestran en la Fig. A-7 para varios valores de P.

Cero simple, $1 + j\omega T$

Considere la función:

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T \tag{A-36}$$

donde T es una constante real positiva. La magnitud de $G(j\omega)$ en dB es:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10}|G(j\omega)| = 20 \log_{10}\sqrt{1 + \omega^2 T^2} \tag{A-37}$$

Para obtener las aproximaciones asintóticas de $|G(j\omega)|_{dB}$, se consideran ambos valores de ω, los muy grandes y los muy pequeños. En frecuencias muy bajas, $\omega T << 1$, la ecuación (A-37) se aproxima por:

$$|G(j\omega)|_{dB} \cong 20 \log_{10} 1 = 0 \quad dB \tag{A-38}$$

ya que $\omega^2 T^2$ es despreciada cuando se compara con 1.

En frecuencias muy altas, $\omega T >> 1$, por lo que $1 = \omega^2 T^2$ se puede aproximar por $\omega^2 T^2$; entonces la ecuación (A-37) se convierte en:

$$|G(j\omega)|_{dB} \cong 20 \log_{10} \sqrt{\omega^2 T^2} = 20 \log_{10} \omega T \tag{A-39}$$

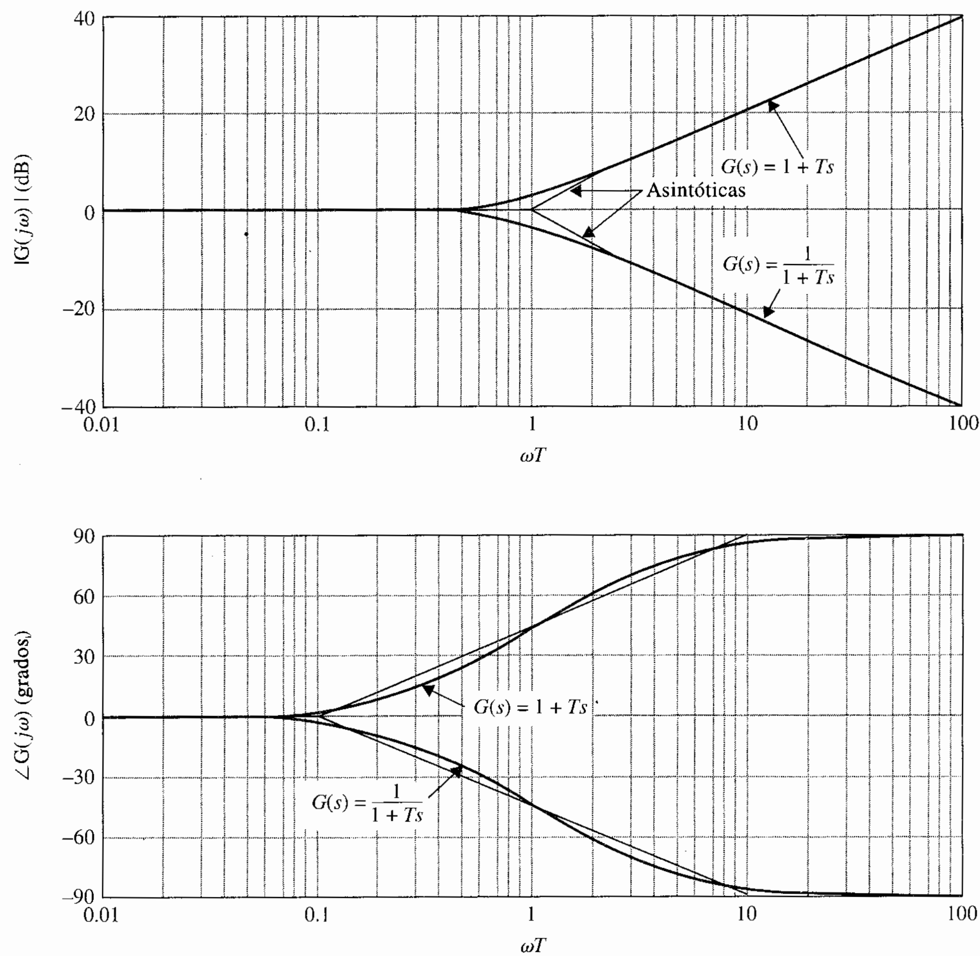


Figura A-8 Trazas de Bode de $G(s) = 1 + Ts$ y $G(s) = 1/(1 + Ts)$.

La ecuación (A-38) representa una línea recta con pendiente de 20 dB/década de frecuencia. La intersección de estas dos líneas se encuentra al realizar la ecuación (A-38) a la ecuación (A-39), lo que da:

$$\omega = 1/T \qquad \text{(A-40)}$$

Esta frecuencia también es la intersección de la traza aproximada de alta frecuencia y la traza aproximada de baja frecuencia, que es el eje 0-dB. La frecuencia dada en la ecuación (A-40) también se conoce como **frecuencia de corte** de la traza de Bode de la ecuación (A-36), ya que la traza asintótica forma el corte en esta frecuencia, como se muestra en la Fig. A-8. La traza real $|G(j\omega)|_{dB}$ de la ecuación (A-36) es una curva suave, y deriva solo ligeramente desde la aproximación de la línea recta. Los valores actuales y la aproximación en línea recta de $|1 + j\omega T|_{dB}$ como funciones de ωT se calculan en la tabla A-1. El error entre la curva de magnitud real y las asíntotas en línea recta son simétricas con respecto a la frecuencia de corte $\omega = 1/T$. Es útil recordar que el error es 3 dB en la frecuencia de corte, y 1 dB en la octava arriba ($\omega = 2/T$) y 1 octava abajo ($\omega = 1/2T$) de la frecuencia de corte. En 1 década arriba y abajo de la frecuencia de corte, el error cae a aproximadamente 0.3 dB. Con base en estos hechos, el procedimiento de elaboración de un bosquejo de $|1 + j\omega T|_{dB}$ es como sigue:

1. Localizar la frecuencia de corte $\omega = 1/T$ sobre el eje de frecuencia.
2. Dibujar la línea de 20 dB/década (o 6 dB/octava) y la línea horizontal en 0 dB, con las dos líneas interceptando en $\omega = 1/T$.
3. Si es necesario, la curva de magnitud actual se obtiene al adicionar los errores a la traza asintótica en las frecuencias estratégicas. A menudo una curva suave puede bosquejarse sólo al localizar el punto 3 dB en la frecuencia de corte y el punto 1 dB en una octava arriba y abajo de la frecuencia de corte.

Tabla A-1

ωT	$\log_{10}\omega T$	$\|1 + j\omega T\|$	$\|1 + j\omega T\|_{dB}$	Aproximación mediante línea recta $\|1 + j\omega T\|_{dB}$	Error (dB)	$\angle(1 + j\omega T)$ (grados)
0.01	−2	1.0	0.000043	0	0.00043	0.5
0.10	−1	1.04	0.043	0	0.043	5.7
0.50	−0.3	1.12	1	0	1	26.6
0.76	−0.12	1.26	2	0	2	37.4
1.00	0	1.41	3	0	3	45.0
1.31	0.117	1.65	4.3	2.3	2	52.7
2.00	0.3	2.23	7.0	6.0	1	63.4
10.00	1.0	10.4	20.043	20.0	0.043	84.3
100.0	2.0	100.005	40.00043	40.0	0.00043	89.4

La fase de $G(j\omega) = 1 + j\omega T$ es:

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \omega T \quad \text{(A-41)}$$

De manera similar a la curva de magnitud, una aproximación en línea recta se puede hacer para la curva de fase. Ya que la fase de $G(j\omega)$ varía desde 0° hasta 90°, se puede dibujar una línea desde 0° en una década abajo de la frecuencia de corte hasta 90° en una década arriba de la frecuencia de corte. Como se muestra en la Fig. A-8, la desviación máxima entre la aproximación en línea recta y la curva actual es menor que 6°. La tabla A-1 da los valores de $\angle(1 + j\omega T)$ con respecto a ωT.

Polo simple, $1/(1 + j\omega T)$

Para la función:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} \quad \text{(A-42)}$$

la magnitud $|G(j\omega)|$ en dB, está dada por el negativo del segundo miembro de la ecuación (A-37), y la fase $\angle|G(j\omega)|$ es el negativo del ángulo en la ecuación (A-41). Por tanto, es sencillo extender todo el análisis para el caso del cero simple a las trazas de Bode de la ecuación (A-42). Las aproximaciones asintóticas de $|G(j\omega)|_{dB}$ en frecuencias bajas y altas son:

$$\omega T << 1: \quad |G(j\omega)|_{dB} \cong 0 \text{ dB} \quad \text{(A-43)}$$
$$\omega T >> 1: \quad |G(j\omega)|_{dB} \cong -20 \log_{10} \omega T \quad \text{(A-44)}$$

Por lo que la frecuencia de corte de las trazas de Bode de la ecuación (A-42) está todavía en $\omega = 1/T$, excepto que en frecuencias altas, la pendiente de la aproximación en línea recta es –20 dB/década. La fase de $G(j\omega)$ es 0° en $\omega = 0$ y –90° cuando $\omega = \infty$. La magnitud en dB y la fase de las trazas de Bode de la ecuación (A-42) se muestran en la Fig. A-8. Los datos en la tabla A-1 aún son de utilidad para el caso de polo simple si los cambios adecuados de signo se hacen a los números. Por ejemplo, los números en el valor absoluto de $|1 + j\omega T|_{dB}$, la aproximación en línea recta de $|1 + j\omega T|_{dB}$, el error (**dB**), y las columnas $\angle|1 + j\omega T|$ deben ser todos negativos. En la frecuencia de corte, el error entre la aproximación en línea recta y la curva de magnitud actual es de –3 dB.

Polos y ceros cuadráticos

Ahora considere la función de transferencia de segundo orden:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + (2\zeta/\omega_n)s + (1/\omega_n^2)s^2} \quad \text{(A-45)}$$

Se está interesado en el caso sólo cuando $\zeta \leq 1$, ya que de otra forma $G(s)$ tendría dos polos reales diferentes y las trazas de Bode se pueden obtener al considerar $G(s)$ como el producto de dos funciones de transferencia con polos simples. Al hacer $s = j\omega$, la ecuación (A-45) se vuelve:

$$G(j\omega) = \frac{1}{[1 - (\omega/\omega_n)^2] + j2\zeta(\omega/\omega_n)} \tag{A-46}$$

La magnitud de $G(j\omega)$ en dB es:

$$20 \log_{10}|G(j\omega)| = -20 \log_{10}\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_n)^2} \tag{A-47}$$

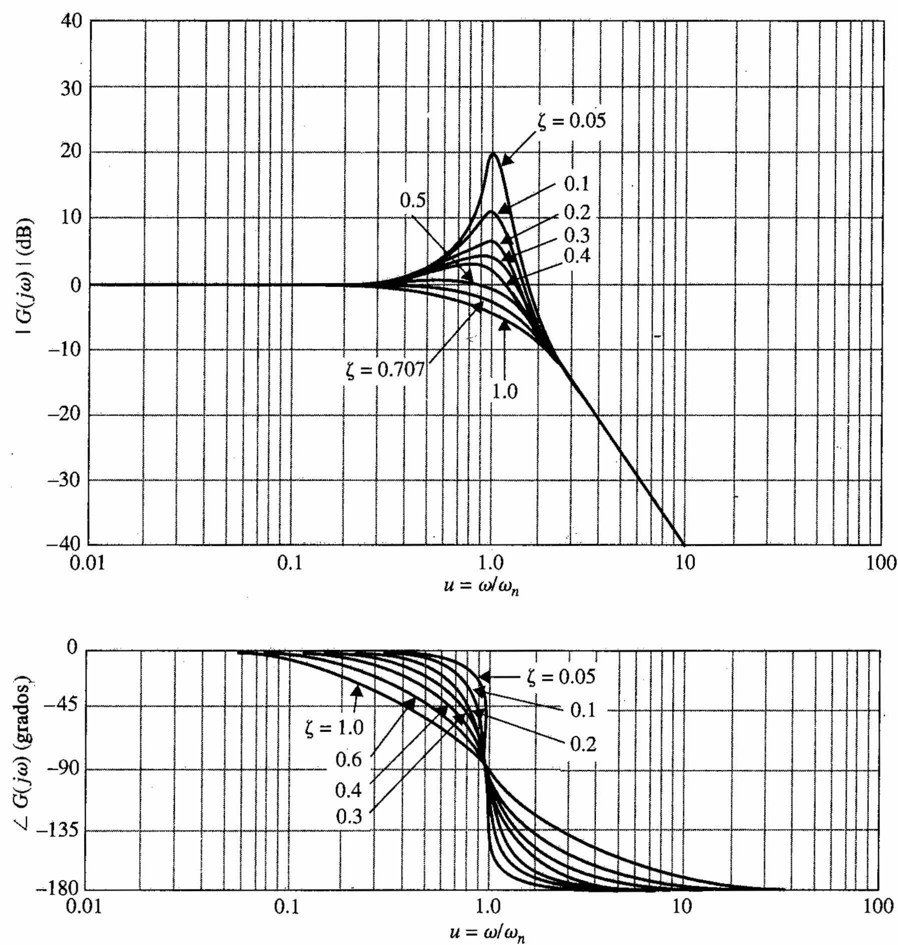


Figura A-9 Trazas de Bode de $G(s) = 1/[1 + 2\zeta(s/\omega_n) + (s/\omega_n)^2]$.

En frecuencias muy bajas, $\omega/\omega_n << 1$; la ecuación (A-47) puede aproximarse como:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|G(j\omega)| \cong -20\log_{10} 1 = 0\text{dB} \qquad \text{(A-48)}$$

Por lo que la asíntota de frecuencia baja de la traza de magnitud de la ecuación (A-45) es una línea recta que cae sobre el eje 0-dB. En frecuencias muy altas, $\omega/\omega_n >> 1$; la magnitud en dB de $G(j\omega)$ en la ecuación (A-45) se convierte en:

$$|G(j\omega)|_{dB} \cong -20\log_{10}\sqrt{(\omega/\omega_n)^4} = -40\log_{10}(\omega/\omega_n) \quad \text{dB} \qquad \text{(A-49)}$$

Esta ecuación representa una línea recta con una pendiente de –40 dB/década en las coordenadas de las trazas de Bode. La intersección de las dos asíntotas se encuentra al hacer la ecuación de la ecuación (A-48) a la ecuación (A-49), manteniendo la frecuencia de corte en $\omega = \omega_n$. La curva de magnitud actual de $G(j\omega)$ en este caso puede diferir en forma sorprendente de la curva asintótica. La razón para esto es que las curvas de amplitud y fase de segundo orden $G(j\omega)$ dependen no sólo de la frecuencia de corte ω_n, sino también del factor de amortiguamiento relativo ζ, que no entra a la curva asintótica. Las curvas reales y asintóticas de $|G(j\omega)|_{dB}$ se muestran en la Fig. A-9 para varios valores de ζ. Los errores entre los dos juegos de curvas se muestran en la Fig. A-10 para el mismo juego de valores de ζ. El procedimiento estándar de construcción de $|G(j\omega)|_{dB}$ de segundo orden es primero localizar la frecuencia de corte ω_n y la línea –40 dB/década a la derecha de ω_n. La curva actual se obtiene al hacer las correcciones a las asintóticas empleando ya sea los datos de las curvas de error de la Fig. A-10 o las curvas en la Fig. A-9 para la ζ correspondiente.

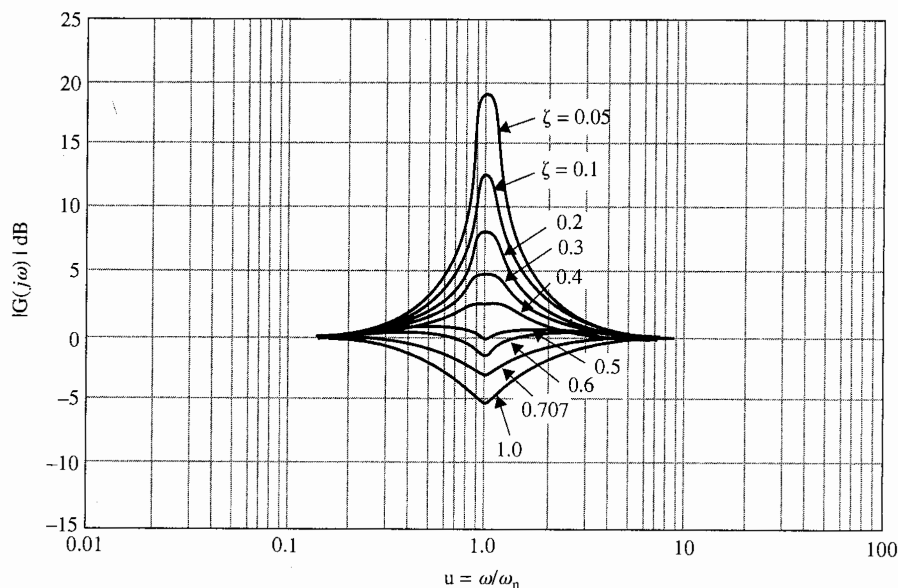


Figura A-10 Errores en curvas de magnitud de las trazas de Bode de $G(s) = 1/[1 + 2\zeta(s/\omega_n) + (s/\omega_n)^2]$.

La fase de $G(j\omega)$ está dada por:

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\left\{\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]\right\} \quad \text{(A-50)}$$

y se grafica como se muestra en la Fig. A-9 para varios valores de ζ.

El análisis de las trazas de Bode de la función de transferencia de segundo orden de la ecuación (A-45) se puede aplicar a la función de transferencia de segundo orden con dos ceros complejos. Para:

$$G(s) = 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2 \quad \text{(A-51)}$$

Las curvas de magnitud y fase se obtienen invirtiendo aquellas en la Fig. A-9. Los errores entre las curvas real y asintótica en la Fig. A-10 también se invierten.

Retardo puro, $e^{-j\omega T_d}$

▲ La magnitud del retardo puro es la unidad para toda ω.

La magnitud del término de retardo puro es igual a la unidad de todos los valores de ω. La fase de término de retardo puro es:

$$\angle e^{-j\omega T_d} = -\omega T_d \quad \text{(A-52)}$$

que decrementa linealmente como una función de ω. Por lo que la función de transferencia:

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)e^{-j\omega T_d} \quad \text{(A-53)}$$

la traza de magnitud $|G(j\omega)|_{dB}$ es idéntico a aquel de $|G_1(j\omega)|_{dB}$. La traza de fase $\angle G(j\omega)$ se obtiene restando ωT_d radianes de la curva de fase de $G_1(j\omega)$ en varias ω.

Ejemplo A-5

Como un ejemplo ilustrativo sobre la construcción manual de las trazas de Bode, considere la función:

$$G(s) = \frac{10(s+10)}{s(s+2)(s+5)} \quad \text{(A-54)}$$

El primer paso es expresar $G(s)$ en la forma de la ecuación (A-23) y hacer $s = j\omega$, manteniendo en mente que para graficación en computadora, este paso es innecesario; se tiene:

$$G(j\omega) = \frac{10(1+j0.1\omega)}{j\omega(1+j0.5\omega)(1+j0.2\omega)} \quad \text{(A-55)}$$

La ecuación (A-54) muestra que $G(j\omega)$ tiene frecuencias de corte en ω= 2, 5, y 10 rad/s. El polo en s = 0 da una curva de magnitud que es una línea recta con pendiente de –20 dB/década, pasando a través del punto ω = 1 rad/s sobre el eje 0-dB. Las trazas de Bode completas de la magnitud y fase de $G(j\omega)$ se obtienen al sumar las curvas componentes juntas, punto por punto, como se muestra en la Fig. A-11. Las curvas reales se pueden obtener mediante un programa de computadora y se muestran en la Fig. A-11. ▲

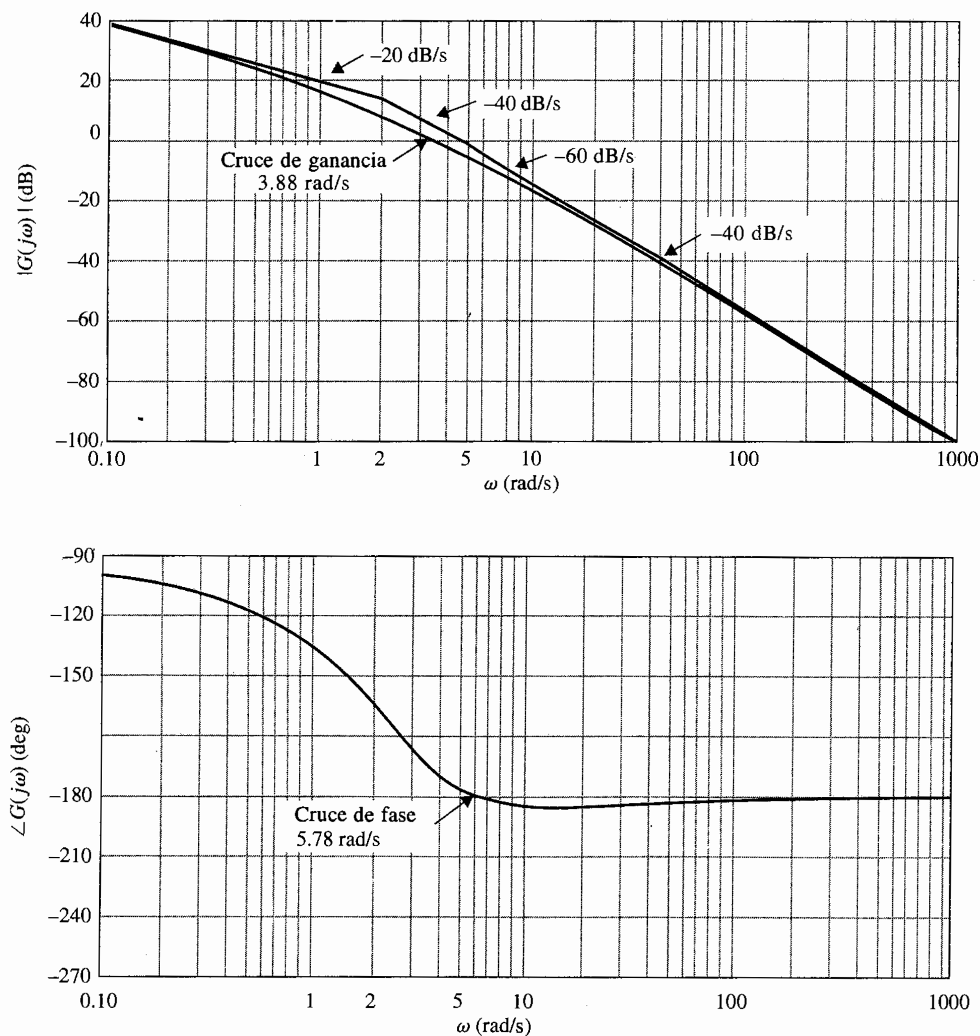


Figura A-11 Trazas de Bode de $G(s) = 10(s + 10/[s(s + 2)(s + 5)]$.

A-3 Traza de magnitud-fase

La traza de magnitud-fase de $G(j\omega)$ es una gráfica de la magnitud de $G(j\omega)$ en dB con respecto a su fase en grados, con ω como un parámetro sobre la curva. Una de las aplicaciones más importantes de este tipo de trazas es que cuando $G(j\omega)$ es la función de la trayectoria directa de un sistema de control con retroalimentación unitaria, la traza puede ser superpuesta a la carta de Nichols (véase capítulo 9) para dar información sobre la estabilidad relativa y la respuesta en frecuencia del sistema. Cuando el factor de ganancia K de la función de transferencia varía, la traza sólo se sube o baja de forma vertical de acuerdo al valor de K en dB. Sin

embargo, en la construcción de la traza, la propiedad de adicionar las curvas de los componentes individuales de la función de transferencia en las trazas de Bode no nos lleva a este caso. Por lo que es mejor hacer la traza de magnitud-fase o transferir los datos desde las trazas de Bode.

Ejemplo A-6

Como ejemplo ilustrativo, la traza polar y la traza de magnitud-fase de la ecuación (A-54) se muestran en las Figs. A-12 y A-13, respectivamente. Las trazas de Bode de la función se muestran en la Fig. A-11. Las relaciones entre estas tres trazas son con facilidad identificadas al comparar las curvas en las Figs. A-11, A-12 y A-13. ▲

A-4 Puntos de cruce de ganancia y fase

Los puntos de cruce de ganancia y fase sobre las trazas en el dominio de la frecuencia son importantes para el análisis y diseño de sistemas de control. Estos se definen como sigue.

Punto de cruce de ganancia. El punto de cruce de ganancia en las trazas del dominio de la frecuencia de $G(j\omega)$ es un punto en el cual $|G(j\omega)| = 1$ o $|G(j\omega)|_{dB} = 0$ dB. La frecuencia en el punto de cruce de ganancia se llama **frecuencia del cruce de ganancia ω_g**.

Punto de cruce de fase. El punto de cruce de fase sobre las trazas en el dominio de la frecuencia de $G(j\omega)$ es un punto en el cual $\angle G(j\omega) = 180°$. La frecuencia en el punto de cruce de fase se llama **frecuencia de cruce de fase ω_p**.

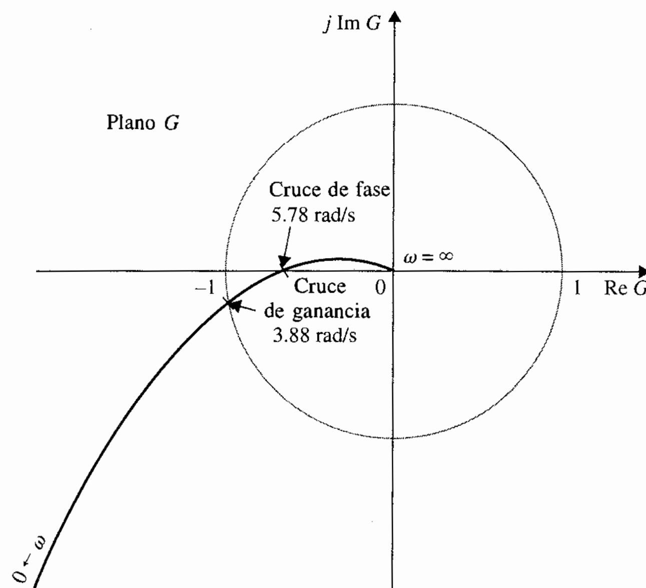


Figura A-12 Traza polar de $G(s) = 10(s + 10/[s(s + 2)(s + 5)]$.

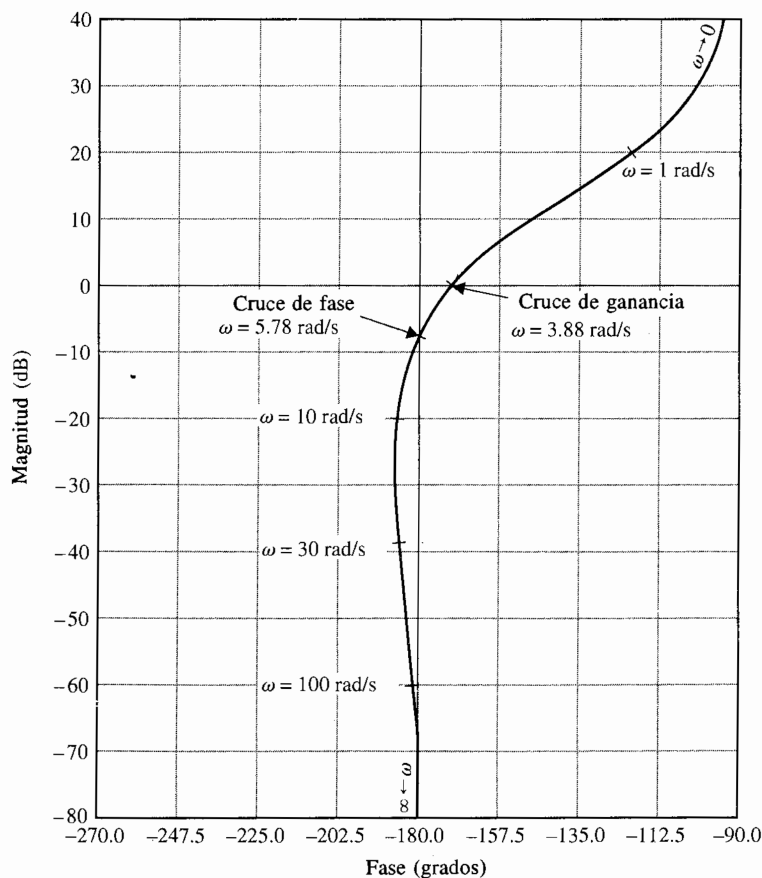


Figura A-13 Traza de magnitud contra fase de $G(s) = 10(s + 10/[s(s + 2)(s + 5)]$.

Los cruces de ganancia y fase se interpretan con respecto a los tres tipos de trazas.

Diagrama polar. El punto (o puntos) de cruce de ganancia es donde $|G(j\omega)| = 1$. El punto (o puntos) de cruce de fase es donde $\angle G(j\omega) = 180°$ (véase Fig. A-12).

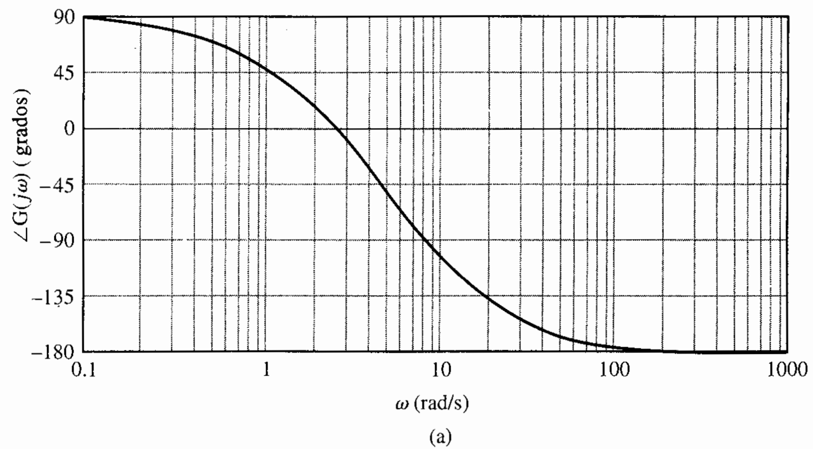
Trazas de Bode. El punto (o puntos) de cruce de ganancia es donde la curva de magnitud $|G(j\omega)|_{dB}$ cruza al eje 0-dB. El punto (o puntos) de cruce de fase es donde la curva de fase atraviesa al eje 180° (véase Fig. A-11).

Diagrama de magnitud-fase. El punto (o puntos) de cruce de ganancia es donde la curva $G(j\omega)$ cruza el eje 0-dB. El punto (o puntos) de cruce de fase es donde la curva $G(j\omega)$ atraviesa al eje 180° (véase Fig. A-13).

A-5 Funciones de fase mínima y fase no mínima

▲ Las características de magnitud y fase de una función de fase mínima están relacionadas en forma única.

La mayoría de las funciones de transferencia de los procesos encontrados en sistemas de control lineales no tiene polos y ceros en el semiplano derecho del plano s. Esta clase de funciones de transferencia se conoce como **función de transferencia de fase mínima.** Cuando una función de transferencia tiene ya sea un polo o un cero en el semiplano derecho del plano s, se llama **función de transferencia de fase no mínima.**



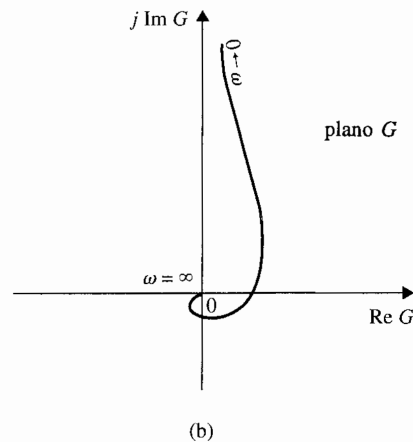


Figura A-14 (a) Curva de fase de las trazas de Bode (b) Traza polar. $G(s) = 10(s - 10/[s(s+2)(s+5)]$.

Las funciones de transferencia de fase mínima tienen una propiedad importante en que sus características de magnitud y fase están relacionadas en forma única. En otras palabras, dada una función de fase mínima $G(s)$ al conocer sus características de magnitud $|G(j\omega)|$, completamente define las características de fase, $\angle G(j\omega)$. A la inversa, da $\angle G(j\omega)$, $|G(j\omega)|$ están completamente definidas.

Las funciones de transferencia de fase no mínima no tienen relaciones de magnitud-fase únicas. Por ejemplo, dada la función:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - j\omega T} \tag{A-56}$$

la magnitud de $G(j\omega)$ es la misma mientras T sea positiva (fase no mínima) o negativa (fase mínima). Sin embargo, la fase de $G(j\omega)$ es diferente para el positivo y el negativo de T.

Propiedades adicionales de las funciones de transferencia de fase mínima son:

1. Para una función de transferencia de fase mínima $G(s)$ con m ceros y n polos, excluyendo los polos en $s = 0$, si existe alguno, cuando $s = j\omega$, y como ω varía desde ∞ hasta 0, la variación de fase total de $G(j\omega)$ es $(n - m)\pi/2$.
2. El valor de una función de transferencia de fase mínima no puede ser cero o infinito en ninguna frecuencia no cero finita.
3. Una función de transferencia de fase no mínima siempre tendrá una fase más positiva cuando ω varía desde ∞ hasta 0.

Ejemplo A-7

▲ No utilice ni la trazas de Bode ni la traza de fase de ganancia de una función de transferencia de fase no mínima para estudios de estabilidad.

Como un ejemplo ilustrativo sobre las propiedades de la función de transferencia de fase no mínima, considere que el cero de la función de transferencia de la ecuación (A-54) está en el semiplano derecho del plano s; esto es:

$$G(s) = \frac{10(s - 10)}{s(s + 2)(s + 5)} \tag{A-57}$$

La traza de magnitud de las trazas de Bode de $G(j\omega)$ es idéntica a aquella de la función de transferencia de fase mínima en la ecuación (A-54) y se muestra en la Fig. A-11. La curva de fase de las trazas de Bode de $G(j\omega)$ de la ecuación (A-57) se muestra en la Fig. A-14(a), y la traza polar se muestra en la Fig. A-14(b). Observe que la función de fase no mínima tiene una traslación de fase neta de 270° (desde −180° hasta +90°) cuando ω varía de ∞ hasta 0, mientras que la función de transferencia de fase mínima si la ecuación (A-54) tiene un cambio de fase neta de solo 90° (de −180° hasta −90°) sobre el mismo rango de frecuencia.

Debe tenerse cuidado cuando se empleen las trazas de Bode para el análisis y diseño del sistema con funciones de transferencia de fase no mínima. Para estudios de estabilidad, la traza polar, cuando se utiliza junto con el criterio de Nyquist que se discutió en el capítulo 9, es más conveniente para sistemas de fase no mínima. Las trazas de Bode de funciones de transferencia de la trayectoria directa de fase no mínima *no deben* emplearse para análisis de estabilidad de sistemas de control en lazo cerrado. Lo mismo se aplica para la traza de magnitud-fase. ▲

Apéndice B

Tabla de la Transformada de Laplace

Transformada de Laplace $F(s)$	Función tiempo $f(t)$
1	Función impulso unitario $\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	Función escalón unitario $u_s(t)$
$\frac{1}{s^2}$	Función rampa unitaria t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n (n = entero positivo)
$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$	$t^n e^{-\alpha t}$ (n = entero positivo)
$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t})\ (\alpha \neq \beta)$
$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\beta-\alpha}(\beta e^{-\beta t}-\alpha e^{-\alpha t})\ (\alpha \neq \beta)$
$\frac{1}{s(s+\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2}(1-e^{-\alpha t}-\alpha t e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s^2(s+\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha^2}(\alpha t-1+e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s^2(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2}\left[t-\frac{1}{\alpha}+\left(t+\frac{2}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}\right]$

Tabla de la Transformada de Laplace (*continuación*)

Transformada de Laplace $F(s)$	Función tiempo $f(t)$
$\frac{s}{(s+\alpha)^2}$	$(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$
$\frac{\omega_n^2}{s^2+\omega_n^2}$	$\text{sen}\ \omega_n t$
$\frac{s}{s^2+\omega_n^2}$	$\cos \omega_n t$
$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+\omega_n^2)}$	$1-\cos \omega_n t$
$\frac{\omega_n^2(s+\alpha)}{s^2+\omega_n^2}$	$\omega_n\sqrt{\alpha^2+\omega_n^2}\,\text{sen}(\omega_n t+\theta)$ donde $\theta = \tan^{-1}(\omega_n/\alpha)$
$\frac{\omega_n}{(s+\alpha)(s^2+\omega_n^2)}$	$\frac{\omega_n}{\alpha^2+\omega_n^2}e^{-\alpha t}+\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega_n^2}}\text{sen}(\omega_n t-\theta)$ donde $\theta = \tan^{-1}(\omega_n/\alpha)$
$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\text{sen}\,\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t \quad (\zeta<1)$
$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\text{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\theta)$ donde $\theta = \cos^{-1}\zeta \quad (\zeta<1)$
$\frac{s\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\frac{-\omega_n^2}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\text{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t-\theta)$ donde $\theta = \cos^{-1}\zeta \quad (\zeta<1)$
$\frac{\omega_n^2(s+\alpha)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\omega_n\sqrt{\frac{\alpha^2-2\alpha\zeta\omega_n+\omega_n^2}{1-\zeta^2}}\,e^{-\zeta\omega_n t}\text{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\theta)$ donde $\theta = \tan^{-1}\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{\alpha-\zeta\omega_n} \quad (\zeta<1)$
$\frac{\omega_n^2}{s^2(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$t-\frac{2\zeta}{\omega_n}+\frac{1}{\omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\text{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\theta)$ donde $\theta = \cos^{-1}(2\zeta^2-1) \quad (\zeta<1)$

Apéndice C

Tabla de la Transformada z

Transformada de Laplace	Función del tiempo $f(t)$	Transformada z
1	Impulso unitario $\delta(t)$	1
$\frac{1}{s}$	Escalón unitario $u_s(t)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{1-e^{-Ts}}$	$\delta_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$	$\lim_{\alpha\to 0}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\left[\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}\right]$
$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$	$\frac{Tze^{-\alpha T}}{(z-e^{-\alpha T})^2}$
$\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$	$1-e^{-\alpha t}$	$\frac{(1-e^{-\alpha T})z}{(z-1)(z-e^{-\alpha T})}$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{z\operatorname{sen}\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{ze^{-\alpha T}\operatorname{sen}\omega T}{z^2-2ze^{-\alpha T}\cos\omega T+e^{-2\alpha T}}$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-\alpha T}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-\alpha T}\cos\omega T+e^{-2\alpha T}}$

Respuestas a problemas seleccionados

Las respuestas dadas a continuación son para ciertos problemas seleccionados. Estas respuestas están dadas para fines de verificación, y por tanto con frecuencia son sólo para ciertas partes de un problema.

Capítulo 2

2-1 **(a)** Polos: $s = 0, 0, -1, -10$; ceros: $s = -2, \infty, \infty, \infty$

(c) Polos: $s = 0, -1, -1, +j, -1, -j$; cero: $s = -2$

2-3 **(a)** $G(s) = \dfrac{1 - e^{-s}}{s(1 + e^{-s})}$ $\quad G_T(s) = \dfrac{1}{s}(1 - e^{-s})^2$

(b) $G(s) = \dfrac{2(1 - e^{-0.5s})}{s^2(1 + e^{-0.5s})}$

2-6 **(a)** $g(t) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}e^{-2t} + \dfrac{1}{3}e^{-3t} \quad t \geq 0$

(e) $g(t) = 0.5t^2e^{-t} \quad t \geq 0$

2-11 **(d)**

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.3 & 0.5 & -0.3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

2-13 **(a)**

$$F(z) = \frac{ze^{-3}}{(z - e^{-3})^2}$$

(d)

$$F(z) = \frac{ze^{-2}(z + e^{-2})}{(z - e^{-2})^3}$$

2-16 **(c)** $F(z) = \dfrac{0.541z}{z - 1} - \dfrac{0.541z}{z + 0.85}$ $\quad f(k) = 0.541[1 - (-0.85)^k] \quad k = 0, 1, 2, \cdots$

2-18 **(b)** $x(k) = \cos\left(\dfrac{k\pi}{2}\right) \quad k = 0, 1, 2, \cdots$

2-19 **(d)** \$395.15

Capítulo 3

3-1 **(a)** $\dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{3s + 1}{s^3 + 2s^2 + 5s + 6}$ **(d)** $\dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{1 + 2e^{-s}}{2s^2 + s + 5}$

3-7 $\left.\dfrac{E(s)}{R(s)}\right|_{N=0} = \dfrac{1 + G_3(s)H_1(s) - G_1(s)G_3(s)}{\Delta}$ $\Delta = 1 + G_2(s)G_3(s) + G_3(s)H_1(s)$

3-15 **(b)** $\left.\dfrac{Y(s)}{E(s)}\right|_{N=0} = \dfrac{10(s + 4)}{s^2 + 6s - 20}$

3-17 $G_d(s) = \dfrac{s(s + 10)}{10}$

3-20 **(b)** $\Delta = 1 - 2[G(s)]^2$

3-21 **(b)** $y(t) = (20 - 25e^{-t} + 5e^{-5t})u_s(t)$

3-22 **(b)** Ecuación característica: $s^2 + 7s + 25 = 0$

3-23 **(c)** Ecuación característica: $s^3 + 5s^2 + 6s + 10 = 0$

(d) Función de transferencia: $\dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{1}{s^3 + 5s^2 + 6s + 10}$

3-25 **(c)** Ecuación característica: $s^3 + 21.01s^2 + 30.198s + 10 = 0$

3-27 **(d)** $\dfrac{Y(z)}{R(z)} = \dfrac{0.46z + 0.33}{(z - 1)(z - 0.368)}$

3-28 **(c)** $Y(z) = \dfrac{T}{z - 1}$

Capítulo 4

4-1 **(b)** Ecuaciones de fuerza $\dfrac{d^2y_1}{dt^2} = -\dfrac{(B_1 + B_2)}{M}\dfrac{dy_1}{dt} + \dfrac{B_2}{M}\dfrac{dy_2}{dt} + \dfrac{1}{M}f$ $\dfrac{dy_2}{dt} = \dfrac{dy_1}{dt} - \dfrac{K}{B_2}y_2$

4-3 **(b)** Ecuaciones par: $\dfrac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\dfrac{K}{J}(\theta_1 - \theta_2) + \dfrac{1}{J}T$ $K(\theta_1 - \theta_2) = B\dfrac{d\theta_2}{dt}$

4-7 **(b)** La relación de engranes óptima es: $n^* = \sqrt{J_m/J_L}$

4-8 **(b)** Función de transferencia: $\dfrac{Y(s)}{T_m(s)} = \dfrac{r}{s[(J_m + Mr^2)s + B_m]}$

4-12 (a) $\dfrac{H_i(s)}{H_e(s)} = -(R_a + L_a s)$ (b) $\left.\dfrac{\Omega_m(s)}{\Omega_r(s)}\right|_{T_L=0} \cong \dfrac{1}{K_b H_e(s)}$

4-14 (d) Función de transferencia de la trayectoria directa:

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_e(s)} = \frac{KK_sK_in}{s[J_TL_as^2 + (R_aJ_T + B_mL_a)s + R_aB_m + K_iK_b]}$$

4-17 (c) Función de transferencia de la trayectoria directa:

$$G(s) = \frac{608.7 \times 10^6 K}{s(s^3 - 423.42s^2 + 2.6667 \times 10^6 s + 4.2342 \times 10^8)}$$

4-19 (c) Ecuación característica: $Js^2 + (JK_L + B)s + K_2B + K_3K_4e^{-T_Ds} = 0$

4-22 (b) Ecuaciones de estado: $i_a(t)$ como entrada:

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) \qquad \frac{dv(t)}{dt} = -Bv(t) + K_iK_fi_a^2(t)$$

4-26 (b) Función de transferencia de la trayectoria directa:

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{KK_inG_c(s)e^{-T_Ds}}{s\{(R_a + L_as)[(J_m + J_L)s + B_m] + K_bK_i\}}$$

4-27 (c) $$\frac{E_o(s)}{E(s)} = \frac{-R_FR_2\left(s + \dfrac{1}{R_2C}\right)}{(R_1 + R_2)\left(s + \dfrac{1}{(R_1 + R_2)C}\right)}$$

Capítulo 5

5-3 (a) Valores característicos: $s = -0.5 + j1.323, -0.5 - j1.323$

(c) matriz de transición estados: $\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$

(g) Ecuación característica: $\Delta(s) = s^3 + 15s^2 + 75s + 125 = 0$

5-6 (a) Valores característicos de **A:** $2.325, -0.3376 + j0.5623, -0.3376 - j0.5623$

(b) Función de transferencia de salida: $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{s+2}{(s+1)^2}$

5-8 (c) $\mathbf{S} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{AB}^2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -6 & 23 \end{bmatrix}$ $\mathbf{P} = \mathbf{SM} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

5

5-11 (c) $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 & 1 + 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} \end{bmatrix}$ S es singular

5-13 (a) $\phi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}$

5-16 (a) Función de transferencia de la trayectoria directa:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{5(K_1 + K_2 s)}{s[s(s+4)(s+5) + 10]}$$

Función de transferencia en lazo cerrado:

$$M(s) = \frac{5(K_1 + K_2 s)}{s^4 + 9s^3 + 20s^2 + (10 + 5K_2)s + 5K_1}$$

5-19 (b) Matriz de transición estados: $\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & -te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$

5-28 (b) Ecuaciones de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 20 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & 0 \\ -0.1 & 0 & -20 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 30 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ T_D \end{bmatrix}$$

5-32 (b) Ecuación característica: $s^3 + 22s^2 + 170s + 600 = 0$

5-42 El sistema es controlable

5-43 (a) Función de transferencia: $\dfrac{\Theta_v(s)}{R(s)} = \dfrac{K_I H}{J_v s^2 (J_G s^2 + K_P s + K_I + K_N)}$

5-45 (b) Para controlabilidad, $k_2 \neq -\dfrac{11}{2}$

Para observabilidad, $|\mathbf{V}| = -1 + 3k_1 - 3k_2 \neq 0$

5-52 Función de transferencia de la trayectoria directa: $G(z) = \dfrac{0.632}{z - 0.368}$

Ecuación de estado en tiempo discreto: $x[(k+1)T] = 0.264x(kT) + 0.632r(kT)$

Capítulo 6

6-1 (b) Los polos están en $s = -5, -j\sqrt{2}, j\sqrt{2}$ Dos polos sobre el eje imaginario. Marginalmente estable

(d) Los polos están en $s = -5, -1 + j, -1 - j$ Todos los polos en el semiplano izquierdo del plano s. Estable

6-2 **(b)** Ninguna raíz en RHP **(f)** Dos raíces en RHP

6-3 **(e)** Condiciones para estabilidad: $K > 2$ y $K < -2.9055$

6-5 **(b)** Condición para estabilidad: $K > 4.6667$

6-9 Requerimiento para estabilidad: $K_t > 0.081$

6-12 **(a)** Hay una raíz en la región a la derecha de $s = -1$ en el plano s

6-17 **(b)** $F(z)$ tiene dos raíces fuera del circulo unitario

6-20 **(c)** Requerimiento para estabilidad: $0 < K < 3.9535$

Capìtulo 7

7-3 **(c)** $K_p = \infty \quad K_v = K \quad K_a = 0$

7-5 **(a)** Entrada escalón unitario: $e_{ss} = \dfrac{1}{K_H}\left(1 - \dfrac{b_0 K_H}{a_0}\right) = \dfrac{2}{3}$ Entrada rampa unitaria: $e_{ss} = \infty$

(d) Entrada escalón unitario: $e_{ss} = 0$ Entrada rampa unitaria: $e_{ss} = 0.05$

Entrada parábola unitaria: $e_{ss} = \infty$

7-6 **(c)** Entrada escalón unitario: $e_{ss} = 2.4$ Entradas rampa unitaria y parábola unitaria: $e_{ss} = \infty$

7-10 **(a)** Requerimiento de estabilidad: $K_t > 0.02$ y $K > 0$

7-13 Tiempo de levantamiento: $t_r = 0.2$ s ω_n 10.82 rad/s. $K = 4.68$ $K_t = 0.0206$

7-15 Función de transferencia del sistema: $\dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{802.59}{s^2 + 25.84s + 802.59}$

$y_{\text{máx}} = 1.2$ (20% sobrepaso)

7-24 **(b)** $k_2^2 = 59 + 10k_1$ **(c)** $k_2 = 13.14$

7-27 **(a)** Requerimiento de estabilidad: $0 < K < 3000.56$

(c) Requerimiento de estabilidad: $0 < K < 1400$

7-29 **(f)** $\alpha = 5$ $\left.\dfrac{Y(s)}{D(s)}\right|_{r=0} = \dfrac{100s(s+2)}{s^3 + 100s^2 + 699s + 1000}$

7-32 **(a)** $G_L(s) = \dfrac{0.995}{s(s + 0.895)}$ **(e)** $G_{dL}(s) = \dfrac{4.975}{s(s + 0.2225)}$

7-35 (a) $G_L(s) = \dfrac{0.2222}{s(s + 0.7888)}$

7-36 (a) $\dfrac{Y(z)}{R(z)} = \dfrac{0.0234z + 0.021904}{z^2 - 1.7953z + 0.8406}$

7-38 (b) Ecuación característica: $z^3 + 1.6805z^2 + 2.424z - 0.331 = 0$

Capítulo 8

8-2 (a) $K > 0$: $\theta_1 = 135°$ $K < 0$: $\theta_1 = -45°$ (e) $\theta_1 = -108.435°$

8-4 (a) Ecuación de punto de ruptura: $2s^5 + 20s^4 + 74s^3 + 110s^2 + 48s = 0$

Puntos de ruptura: -0.7272, -2.3887

8-5 (h) Intersección de asintóticas: $\sigma_1 = -4$ Puntos de ruptura: $0, -4, -8$

(i) Puntos de ruptura: $-2.07, 2.07, -j1.47, j1.47$

8-6 (d) $\zeta = 0.707$, $K = 8.4$

8-16 (a) $\sigma_1 = -1.5$, Puntos de ruptura: $(K > 0)$ $0, -3.851$

8-21 (a) Ecuación de punto de ruptura: $2s^2 + 3(1 + \alpha)s + 6\alpha = 0$

Para ningún otro punto de ruptura que no sea en $s = 0$, $0.333 < \alpha < 3$

8-25 (b) El sistema es marginalmente estable para: $-3.333 < K < 23.333$;

inestable para todos los otros valores de K.

Capítulo 9

9-1 (c) Para: $K = 100$, $\omega_n = 10$ rad/s $\zeta = 0.327$, $M_r = 1.618$, $\omega_r = 9.45$ rad/s

9-2 (b) $M_r = 15.34$, $\omega_r = 4$ rad/s BW = 6.223 rad/s

(e) $M_r = 1.57$, $\omega_r = 0$ rad/s BW = 1.12 rad/s

9-5 Máximo $M_r = 1.496$, Mínimo **BW** = 1.4106 rad/s

9-9 (a) $\Phi_{11} = 270°$, $Z = 2$ (b) $\Phi_{11} = (Z - 1)180° = 180°$, $Z = 2$

(m) $\Phi_{11} = (Z - 0.5)180° = -90°$, $Z = 0$

9-10 (h) El sistema es estable para: $-1/3 < K < 0$

9-11 (a) El sistema es estable para: $-25 < K < \infty$

9-12 (b) $\Phi_{11} = (Z - 1)180° = -180°$, $Z = 0$

9-14 **(a)** El sistema es estable para: $K > 0.5$

9-15 **(a)** El sistema es estable para: $K > 0.5$

(e) El sistema es inestable para todos los valores de K

9-18 **(a)** Para estabilidad, $N < 3$.

9-21 **(a)** Para estabilidad, $T_d = 1.47$ s

9-24 **(b)** Máximo $D = 15.7$ Pulg

9-28 **(e)** GM = 6.82 dB, PM = 50.27 grados

(h) GM = infinito, PM = 13.4 grados

9-29 **(c)** K puede incrementarse por 28.71 dB

9-30 **(d)** K debe incrementarse por -2.92 dB

9-36 **(b)** PM = 2.65°, GM = 10.51 dB, $M_r = 17.72$, $\omega_r = 5.75$ rad/s. BW = 9.53 rad/s

9-38 **(g)** BW = 30 rad/s

9-39 **(b)** $T_d = 0.1244$ s

9-43 **(b)** GM = 30.72 dB, PM = infinito

9-46 El máximo número para N para estabilidad es 7

Capítulo 10

10-3 **(a)** $K_P = 10$, $K_D = 0.09$

10-5 **(b)** $K_D \cong 0.00175$

10-7 **(a)** $K_D = 0.09$, PM = 93.8°, GM = ∞, $M_r = 1$, $BW = 1.41$ rad/s

10-9 **(a)** $K_P = 1.1$, $K_I = 10$, $K_v = 10$, PM = 31.51°

10-13 **(a)** t_s = mínimo (0.851 s) cuando $K_P = 0.6$. $K_P < 4.9718$ para estabilidad

10-16 **(b)** $K_D = 399.85$, $K_P = 348.93$

10-20 $K_P = 50$, $K_D = 6$, $K_I = 100$

10-22 **(a)** Se hace $1/aT$ para que el polo de $G(s)$ en $s = -10$ sea cancelado

(b) Se hace la fase de adelanto adicional en 67 grados. La nueva frecuencia de cruce de ganancia es = 70 rad/s

10-25 (a) $R_2 = 2.65 \times 10^5$ da un factor de amortiguamiento relativo de 0.65

10-27 (a) $a = 1000$, $T = 0.0004$ (c) $a = 0.074$

10-30 (b) $\zeta_p = 1.222$, $\omega_n = 45$ rad/s

10-34 $K = 59.3$

10-38 (c) $G_c(s) = \dfrac{1 + 0.0487s}{1 + 0.00348s}$

10-40 (a) $G_c(s) = \dfrac{1 + 15.63s}{1 + 117.13s}$

10-43 (a) $k_1 = 11$

10-45 (a) $k_1 = -64.84$, $k_3 = 20.34$

10-46 (b) $K_P = 2$, $K_I = 200$

Capítulo 11

11-1 (b) $G_c(z) = (10T + 0.1) - 0.1z^{-1}$

11-3 (d) físicamente realizable

11-4 $T = 0.01$ sec, $G(z) = \dfrac{0.02(z+1)(10.01z - 10)}{z(z-1)^2}$

11-6 $G_c(z) = \dfrac{21.21(z - 0.9222)}{(z + 0.4344)}$

11-9 $k_1 = 0.058$, $k_2 = 0.035$

Índice

A

Aceleración, 138
ACSP, 39, 66, 300, 471, 495, 574, 579, 685, 738, 865
Amortiguamiento crítico, 388
Amplificadores operacionales, 191, 199, 737, 765
ideal, 192
inversor, 195
primer orden, 194
Análisis en el dominio de la frecuencia, 539-663
estudios de sensibilidad, 544, 636-638
para sistemas en tiempo discreto, 638-645
Análisis en el dominio del tiempo, 361-469
Ancho de banda, 11, 544, 547-550, 678
de sistemas de segundo orden, 547-550
de sistemas de tercer orden, 555-556
Aproximación de Pade, 191, 605, 606
Aproximación de sistemas de orden superior, 424-436

B

Banda, 147
Banda y polea, 146
Bandas complementarias, 442
Bandas periódicas,
Bloques de Jordan, 262

C

Cancelación inexacta entre un polo y un cero, 762
Carta de Nichols, 627
aplicada a sistemas con realimentación no unitaria, 634
Ceros, 24
definición de, 24
Circuito eléctrico, 135, 155, 238
Circuito RLC, 135, 152
Círculo unitario, 440
Codificador incremental, 168
Codificadores, 160-171
absoluto, 168
incremental, 168
Coeficiente de fricción de Coulomb, 142
Coeficiente de fricción viscosa, 141, 149
Compensación de adelanto de fase (*véase también* controlador de adelanto de fase)
Compensación de atraso de fase (*véase también* controlador de atraso de fase)
Compensación en cascada, 667, 669
Compensación en la trayectoria directa, 775
Compensación en serie (*véase* compensación en cascada)
Compensación mediante realimentación en serie, 669
Compensación prealimentada, 669, 775
Compensación realimentada, 667, 669
Condiciones iniciales, 78, 80, 102, 103, 117
Constante de amortiguamiento (*véase* factor de amortiguamiento)
Constante de error
escalón, 371, 451
parabólico, 374, 453
rampa, 373, 451
Constante de error escalón (*véase* constante de error)
Constante de error parabólico (*véase* constante de error)
Constante de error rampa (*véase* constante de error)
Constante de tiempo, 388, 404, 438, 454
Constante del resorte, 140
lineal, 140
torsional, 144
Control de altituc' 16, 406

Control de dirección, 3
Control de seguimiento del Sol, rastreador solar, 6, 8
Control de turbopropela, 81, 120
Control derivativo, 671
Control integral, 671
Control mediante realimentación tacométrica, 167, 790
  efectos de, 827
Control por cancelación de polos y ceros, 761
Control proporcional, 671
Control realimentado del lazo interno, 789, 791
Controlabilidad, 273, 302
  concepto general, 273
  definición, 276
  del estado, 275
  pruebas para la, 277
Controlador, 9
Controlador de adelanto-atraso, 759
  implantación digital de, 842
Controlador de adelanto de fase, 714-743, 847, 851
  configuración de polos y ceros, 716
  de dos etapas, 737
  diagrama de Bode, 717
  dominio *w*, 847
  función de transferencia, 716
  limitaciones, 736
Controlador de atraso-adelanto (*véase* controlador de adelanto-atraso)
Controlador de atraso de fase, 714, 743-761, 780, 847, 849
  configuración de polos y ceros, 743
  diseño mediante los contornos de las raíces, 517
  dominio *w*, 847
  función de transferencia, 743
  implantación digital, 294
  limitaciones, 758
  traza de Bode, 747
Controlador de dos grados de libertad, 669
Controlador de muesca, 761, 766-775
Controlador digital, 107, 843
Controlador PD, 671, 676, 678, 851
Controlador PI, 691-708, 852
Controlador PID, 708-714
  implantación digital, 838, 841
Controlador robusto, 778, 789
Convertidor digital a analógico, 107
Convolución
  compleja, 34, 85
  transformada de Laplace, 34
  transformada *z*, 63
Convolución compleja (*véase* convolución)
Convolución real, 34
Cremallera y piñón, 146
Criterio de diseño, 637
Criterio de estabilidad de Jury, 349
Criterio de Hurwitz (*véase* criterio de Routh-Hurwitz)
Criterio de Nyquist, 334, 557
  aplicación, 345, 557
  funciones de transferencia de fase no mínima, 578
  funciones de transferencia de sistemas impropias, 583
  relación con el lugar geométrico de las raíces, 570
  retardos 600-603
  sistemas de lazos múltiples, 598
Criterio de Routh-Hurwitz, 190, 334, 347, 413
  casos especiales, 339
  de sistemas en tiempo discreto, 346
  limitaciones de, 343
Criterio de Schur-Cohn, 349
CSAD, 39, 66, 255, 258, 269, 270, 272, 279, 283, 300, 401, 406, 410, 471, 505, 574, 579, 631, 632, 635, 685, 716, 723, 729, 798, 801, 805, 865
Cuantizador, 366

D

DCSP, 347
Demodulador, 166
Descomposición de funciones de transferencia, 263-273
  directa, 264, 266, 272, 844
  en cascada, 269, 844
  forma canónica de Jordan, 261, 272
  paralela, 271, 845
  sistemas en tiempo discreto, 234
Descomposición directa (*véase* descomposición de funciones de transferencia)
Descomposición en cascada (*véase* descomposición de funciones de transferencia)
Descomposición paralela (*véase* descomposición de funciones de transferencia)
Desplazamiento, 138
Determinante de Hurwitz, 336, 337

Diagrama de bloques, 83
de sistemas de control, 84
de un sistema de motor de cd, 179
de un sistema multivariable, 86, 87
Diagrama de Bode, 334, 870, 884
con la transformación *w*, 641
de sistemas con retardo, 615
desventajas del, 614
ventajas del, 613
Diagrama de cuerpo libre, 151, 155, 159
Diagrama de estado, 100, 102, 157, 226, 236, 273
de sistemas de datos discretos, 294
forma canónica de controlabilidad, 265, 268
forma canónica de observable, 266, 267, 268
sistemas de datos muestreados, 296
Diagrama de estado en tiempo discreto, 284-298
Diagrama de magnitud contra fase, 882, 884
Diseño con una configuración fija, 667
Diseño en el dominio de la frecuencia, 669, 670, 676, 685, 695, 701, 707, 712, 717, 724, 731, 747, 755, 772, 849
Diseño en el dominio del tiempo, 665, 670, 679, 686, 698, 704, 710, 720, 730, 749
Diseño por ubicación de polos, 274, 796, 857

E

Ecuación auxiliar, 340
Ecuación característica, 80, 117, 245, 252, 253, 300, 349, 368
de un sistema de segundo orden, 387
de un sistema en tiempo discreto, 292
Ecuación de transición de estado, 102, 233, 236
discreta (*véase* ecuación de transición de estado en tiempo discreto)
Ecuación de transición de estado en tiempo discreto, 288
Ecuaciones de estado, 27, 56, 153, 229, 240, 242, 246
forma vector-matriz, 55, 56,185, 227
linealizadas, 184
no lineal, 56, 184
representación matricial, 55
sistemas en tiempo discreto, 286, 287
Ecuaciones de estado en tiempo discreto (*véase también* ecuaciones de estado)
solución de, 288
Ecuaciones de salida, 28, 105, 229
Ecuaciones diferenciales, 25, 245
lineales ordinarias, 25
no lineales, 25
Ecuaciones diferenciales no lineales, 25
Ecuaciones dinámicas, 227, 242, 276
Ecuaciones en diferencias, 57
Encierro, 559
Entrada escalón, 363, 371, 379
Entrada parabólica, 364, 374, 380
Entrada rampa, 364, 373, 379, 408
Error de cuantización, 366
Error en estado estable, 362, 365, 665
de sistemas en tiempo discreto, 447
debido a elementos no lineales, 365
debido a fricción, 366
definición de, 368
resumen de, 375
sistemas con realimentación no unitaria, 377-385
Especificaciones en el dominio de la frecuencia, 543, 665
Especificaciones en el dominio del tiempo, 385, 665, 666
Esquemas de compensación, 667
Estabilidad, 11
absoluta, 328
asintótica, 330, 344, 345, 351, 359
condicional, 618
en lazo abierto, 558
en lazo cerrado, 558
entrada acotada salida acotada (BIBO), 328, 344
entrada cero, 330, 344
marginal, 332, 333, 341, 345, 356, 359
relativa, 328, 356
retardo 557, 600
sistemas de lazos múltiples, 598
sistemas en tiempo continuo, 332
sistemas en tiempo discreto, 343, 345
traza de Bode, 334, 345, 613
traza de ganancia-fase, 621
Estabilidad a entrada cero, 330, 344
Estabilidad absoluta, 328
Estabilidad asintótica, 330, 331, 345
Estabilidad BIBO, 328, 344
Estabilidad en lazo cerrado, 558, 567
Estabilidad marginal (*véase* estabilidad)
Estabilidad relativa, 328, 605, 618, 665

Estado inicial, 135, 136, 138, 184, 230, 234
Expansión en fracciones parciales, 39, 66
Expansión en fracciones parciales
  solución por computadora, 39, 66
  transformada de Laplace, 34, 35
  transformada *z*, 64

F

Factor de amortiguamiento, 388
Factor de amortiguamiento relativo, 388, 389
Factor de amortiguamiento relativo, 423
Fase de cruce, 608, 883
Filtro activo, 764, 791
Forma canónica controlable, 241, 251, 253, 265, 797
Forma canónica de Jordan, 261, 272
Forma canónica digital, 258
Forma canónica en variable de fase, 241
Forma canónica observable, 256, 266
Fórmula de ganancia de Mason (*véase* gráfica de flujo de señal)
Fórmula de ganancia general (*véase* gráfica de flujo de señal)
Frecuencia de amortiguamiento (*véase* frecuencia de oscilación)
Frecuencia de corte, 877
Frecuencia de cruce de fase, 608, 883
Frecuencia de cruce de ganancia, 611, 883
Frecuencia de muestreo, 109
Frecuencia de oscilación, 390
Frecuencia de resonancia, 544
Frecuencia natural no amortiguada, 390
Fricción, 142, 365
  de Coulomb, 142, 145, 148, 149, 366
  estática, 145, 145
  movimiento de rotación, 142, 145
  movimiento de traslación, 140
  viscosa, 141, 145, 148
Fricción de Coulomb (*véase también* fricción)
Fricción estática (*véase* fricción)
Fricción viscosa (*véase* fricción)
Fuerza, 138
Fuerza contraelectromotriz, 172
Fuerza contraelectromotriz constante, 176, 178
Función analítica, 23
Función de transferencia, 78, 301
  de sistema en lazo cerrado, 85
  de sistemas de una entrada y una salida, 78
  de sistemas en tiempo discreto en lazo cerrado, 114
  de sistemas en tiempo discreto, 106, 111
  de sistemas multivariables, 81
  del retén de orden cero, (*véase* retén de orden cero)
  descomposición de (*véase* descomposición de funciones de transferencia)
  propia, 80
Función de transferencia de fase no mínima, 579, 885
Función de transferencia pulso, 110
Función de transferencia *z*, 111
Función de valor singular, 23
Función escalón unitario, 30, 32, 41, 69, 70
Función rampa unitaria, 69, 70
Funciones de transferencia de fase mínima, 568, 885

G

Ganancia de cruce, 611, 883
Gráfica de flujo de señal,
  álgebra, 94
  de sistemas de control realimentado, 94
  definiciones, 91
  elementos básicos, 89
  fórmula de ganancia, 96
  ganancia de la trayectoria directa, 94
  ganancia de lazo, 94
  ganancia de trayectoria, 94
  lazo, 92
  lazos disjuntos (que no se tocan), 94, 96
  nodo de entrada, 91, 96
  nodo de salida, 91, 96
  nodos, 89
  propiedades básicas, 90
  ramas, 89
  trayectoria directa, 91
  trayectoria, 91

I

Inclusión, 559
Inercia, 143
Integración rectangular hacia adelante, 838, 839
Integración rectangular hacia atrás, 838, 840
Integración trapezoidal, 838-840
Integral de convolución, 34

J

Juego, 150, 365

L

Ley de movimiento de Newton, 138, 142, 151
Linealización, 78
Lugar geométrico de factor de amortiguamiento constante, 391, 442
Lugar geométrico de factor de amortiguamiento relativo constante, 391, 455, 446
Lugar geométrico de frecuencia de oscilación constante, 391
Lugar geométrico de frecuencia natural no amortiguada constante, 391, 444
Lugar geométrico de las raíces, 409, 414, 440, 470-538, 572, 573, 576, 591, 593
  ángulo de llegada, 485, 490
  ángulo de salida, 485, 490
  asíntotas, 479-483
  cálculo de *K*, 498
  complementario, 472
  construcción de, (*véase* propiedades de)
  efectos de la adición de ceros, 510
  efectos de la adición de polos, 510
  propiedades de, 472, 477, 500
  puntos de ruptura, 488-490
  reglas de construcción (*véase* propiedades de)
  relación con el diagrama de Nyquist, 570
  sensibilidad, 495, 498
  sistemas en tiempo discreto, 524-528
  sobre el eje real, 483
Lugar geométrico de *M* constante, 622, 627
Lugar geométrico de *N* constante, 625

M

Máquina de coser industrial, 4, 7
Margen de fase, 605, 610, 611, 665, 678
  de sistemas de fase no mínima, 612
Margen de ganancia, 605, 608, 665, 678
  de sistemas de fase no mínima, 610
Masa, 139
Mason, S. J., 89
MATLAB, 39,66, 255, 258, 269, 300, 333, 506
Matriz
  adjunta, 49
  álgebra de, 49
  cofactor de una, 47
  columna, 45
  cuadrada, 45
  definición, 45
  determinante de una, 45, 46
  diagonal, 46
  identidad (*véase* matriz unitaria)
  igualdad de, 50
  inversa de una, 53
  ley asociativa, 52
  ley conmutativa, 51
  ley distributiva, 52
  multiplicación de, 51, 52
  no singular, 47
  nula, 46
  orden de una, 45
  rango de una, 54, 55
  renglón, 45
  resta de, 50
  simétrica, 46
  singular, 47
  soluciones con ayuda de computadora, 55
  suma de, 50
  transpuesta, 48
  traza de una matriz cuadrada, 49
  unitaria, 46
Matriz de controlabilidad, 254, 276
Matriz de observabilidad, 257, 280, 281
Matriz de transferencia, 252, 292
Matriz de transición de estado, 230, 301
  propiedades de, 232
Matriz de Vandermonde, 260
Microprocesador, 11
Modulación con portadora suprimida, 163
Motor de cd, 171-183, 201
  clasificación, 173
  curva par de torsión velocidad, 180, 181
  de bobina móvil, 174, 175
  de devanado superficial, 173
  de núcleo de hierro, 173
  diagrama de estados, 178
  fuerza contraelectromotriz constante, 176, 178
  fuerza contraelectromotriz, 172
  modelado matemático, 175
  par de torsión constante, 176, 177

principio de operación, 172
sin escobillas, 173, 174
Motor de corriente directa sin escobillas (*véase* motor de cd)
Movimiento de rotación, 142
Movimiento de traslación, 138, 140
Muestreador, 19, 108
ficticio, 110
ideal, 108
Muestreador ideal (*véase* muestreador)
Muestreador y retén (*véase* retén de orden cero)
Multiplicación real, 34

N

No linealidad de saturación, 185, 186
Nodo de entrada, 91, 92
Nodo de salida, 92

O

Observabilidad, 273, 279, 302
definición, 280
pruebas para la, 280
Observador, 667

P

Palancas, 147
Par constante, 176, 177, 178, 202
Par, 143, 172
Periodo de muestreo, 59
Perturbación, 228
Pico de resonancia, 543, 544
Plano complejo *s* (*véase* plano *s*)
Plano de parámetros, 354
Plano *s*, 22
Plano *z*, 847
Polos, 24
definición de, 24
simple, 24, 36
Polos dominantes (*véase* raíces dominantes)
Porcentaje de sobrepaso máximo, 395
Potenciómetro, 160
diagrama de bloques, 163
Principio del argumento, 560
Proceso controlado, 9
Programa CC, 347, 471, 508, 574, 579
Programación digital, 845
directa, 845
en cascada, 846
en paralela, 846
Punto crítico, 564

R

Raíces dominantes, 412, 422
Realimentación
efectos sobre ganancia total, 12
efectos sobre la estabilidad, 12
efectos sobre la sensibilidad, 13
efectos sobre las perturbaciones externas, 14
negativa, 12
Red de atraso-adelanto (*véase* red de adelanto-atraso)
Relación causa y efecto, 11, 83, 120, 123
Resorte
lineal, 139
rigidez de, 140
torsional, 206
Resorte torsional, 144
Respuesta a entrada cero, 328
Respuesta a estado cero, 328
Respuesta al escalón unitario, 385
Respuesta al impulso, 78
de un retén de orden cero, 114
Respuesta con oscilaciones muertas, 855
Respuesta en estado estable, 362, 408, 414, 424
Respuesta transitoria, 362, 405, 412
Retardo, 189
aproximación, 190
traza de Bode, 881
Retén de datos (*véase* retén de orden cero)
Retén de orden cero, 18, 108, 296, 642
diagrama de estado de, 298
función de transferencia de, 113
respuesta al impulso de, 114
Retraso de transporte (*véase* retardo)
Realimentación de estado, 274, 285, 857
Realimentación de velocidad (*véase* realimentación tacométrica)
compensación, 667, 794-809
control integral, 802

S

Sensibilidad, 11, 13, 665, 742
de las raíces, 495
en el dominio de la frecuencia, 636
Sensibilidad de las raíces (*véase* lugar de las raíces)
Sensores (*véase también* codificadores)
Señal manipulada, 2
Señales de prueba típicas, 363
Señales de prueba, (*véase* señales de prueba típicas)
Sistema causal, 29, 69
Sistema condicionalmente estable, 618, 737
Sistema de control
componentes básicos de un, 2
de datos muestreados, 17
diagrama de bloques de un, 84
digital, 18
en lazo abierto, 9
en lazo cerrado, 9
en tiempo continuo, 16
en tiempo discreto, 17
no lineal, 19
respuesta en frecuencia de un, 541
respuesta transitoria de un, 362, 454
tipos de, 15, 370
Sistema de control de cd, 16, 20
Sistema de control de guíado de un misil, 210, 463
Sistema de control de la rueda de impresión (margarita), 3, 4, 10
Sistema de control de posición, 15, 167, 402, 438
Sistema de control de procesador de textos, 5
Sistema de control de velocidad en ralentí, 3, 10
Sistema de control de velocidad, 15, 166, 767
Sistema de control en lazo abierto, 9
elementos de, 9
Sistema de control en lazo cerrado, 9, 20
respuesta en frecuencia de, 541
Sistema de control modulado, 15
Sistema de motor de cd, 83
Sistema de segundo orden, 25
prototipo, 387, 388, 392, 395, 396, 398, 400, 401, 405, 416, 665, 878
Sistema de suspensión magnética de una esfera, 188, 299
Sistema de tercer orden, 441
Sistema digital de piloto automático, 19
Sistema en tiempo discreto, 15, 17,115,437
análisis en el dominio de la frecuencia, 638
diseño de, 847-860
estabilidad de, 343-350
respuesta en tiempo de, 437
Sistema fuerza resorte, 140
Sistema masa-resorte-fricción, 151
Sistema multivariable, 3, 81
Sistema no lineal, 15, 26, 183
linealización, 183
Sistema prototipo de segundo orden, 387, 396, 401, 544
Sistema regulador, 10, 795
Sistema robusto, 472, 517-524, 793
Sistemas de control de ca, 16, 17, 20
Sistemas de control de datos muestreados (*véase también* sistemas de control en tiempo discreto)
Sistemas de control de rastreador solar, seguimiento del Sol, 197, 738, 752, 756, 779, 785, 792
Sistemas de control digital (*véase* sistemas en tiempo discreto)
Sistemas de control no lineales, 15
Sistemas invariantes con el tiempo, 15, 16
Sistemas lineales, 15
Sistemas mecánicos, 151-160
ecuaciones de, 151-160
modelado de, 138
Sistemas variantes con el tiempo, 15, 16
Sobrepaso (*véase* sobrepaso máximo)
Sobrepaso máximo, 385, 394, 665
Sobrepaso negativo, 386, 394, 456

T

Tabulación de Routh (arreglo), 336
Tacómetros, 166, 201
Telescopio espacial grande, 365
Teorema de multiplicación compleja, 34
Teorema de traslación compleja, 33, 110
Teorema del valor final
transformada de Laplace, 33
transformada *z*, 62, 74
Teorema del valor inicial
transformada de Laplace, 32
transformada *z*, 62
Tiempo de asentamiento, 386, 396, 398, 665
Tiempo de levantamiento, 386, 396, 665

Tiempo de retardo, 386-396
Tipos de sistemas de control, 15, 370
Tornillo sinfin, 145
Transformación bilineal, 346
Transformación *r*, 346, 347
Transformaciones de similitud, 250
Transformada de Laplace, 28
 aplicada para resolver ecuaciones diferenciales, 41
 definición, 29
 inversa, 30, 34, 69, 75
 tabla, 887
 teoremas, 31-33, 35
 unilateral, 29
Transformada inversa de Laplace, 30
Transformada inversa *z*, 64, 70, 74
 expansión en fracciones parciales, 64
 fórmula de inversión, 66
Transformada *w*, 346, 641
Transformada *z*, 58
 aplicación a la solución de ecuaciones en diferencias lineales, 67, 291
 de sistemas en tiempo discreto, 291
 definición de, 58
 fórmula de inversión, 66
 inversa, 70, 74
 tabla, 889
 teoremas de, 61-64
Transición de estado, 102, 233
Traslación compleja, 33
Trayectoria crítica, 603
Trayectoria de Nyquist, 565, 566, 580
Traza asintótica (*véase* diagrama de Bode)
Traza de Bode (*véase* diagrama de Bode)
Traza de ganancia fase, 621, 883
Traza polar, 571, 865, 884
Tren de engranes, 147

U

Unidades
 aceleración, 139
 constante de par, 177
 constante de resorte, 141, 144, 145
 desplazamiento angular, 143, 144
 distancia, 139
 fricción, 141, 145
 fuerza, 139
 inercia, 143, 144
 masa, 139
 par, 143, 144
 resorte lineal, 140
 velocidad angular, 144

V

Valores característicos, 245, 247, 252, 301
Variable controlada, 2
Variables complejas, 22
 funciones de, 22
Variables de estado, 27, 153, 159
 definición de, 27
Variables de salida, 2, 28
Vector de entrada, 228
Vector de estado, 56, 228
Vector de salida, 228
Vectores característicos, 245, 248, 252, 260, 262
 generalizados, 249
Velocidad, 138

Z

Zona muerta, (*véase también* juego)

SISTEMAS DE CONTROL AUTOMÁTICO

SÉPTIMA EDICIÓN

BENJAMIN C. KUO

Este libro ha sido actualizado para reflejar el empleo de la computadora cada vez mayor en el aprendizaje y el diseño. La séptima edición de **Sistemas de Control Automático** presenta un *nuevo enfoque accesible* con el fin de que los estudiantes que llevan cursos introductorios de sistemas de control puedan conservar la profundidad y el rigor del clásico "best-seller" de Benjamin Kuo.

Esta nueva edición integra *varias aplicaciones del mundo real* a través del texto, y el cual abarca el análisis y el diseño. Otras características incluyen lo siguiente:

- demostración de la resolución de problemas complejos con la ayuda del software
- explicación concisa del análisis del error en estado estable, incluyendo los sistemas de realimentación
- explicación de la realización de circuitos de las funciones de transferencia de control
- tratamiento simplificado del criterio Nyquist en sistemas con funciones de transferencia de fase no mínima.
- exposición de los diseños del dominio del tiempo y dominio de la frecuencia en el mismo capítulo
- se ha agregado un capítulo sobre los sistemas de control en tiempo discreto

El texto incluye también abundantes *ejemplos ilustrativos, problemas y notas marginales*, para resaltar los puntos importantes y las observaciones.

El contenido incluye capítulos completos acerca de:
• fundamentos matemáticos • funciones de transferencia • diagramas de bloque y gráficas de flujo de señales • modelado matemático de sistemas físicos • análisis de variable de estado • estabilidad de los sistemas de control lineales • análisis de sistemas de control en el dominio del tiempo • técnicas del lugar geométrico de las raíces • análisis en el dominio de la frecuencia • diseño de sistemas de control • diseño de sistemas de control en tiempo discreto



